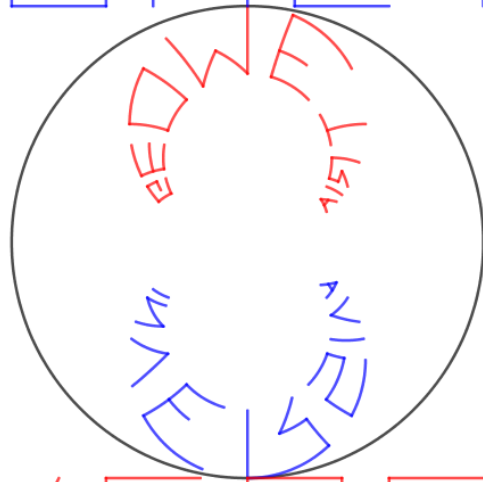


GEOMETRIA



INVERSIVA

## Estudi de la Geometria Inversiva

---

*Autor: Elías Velásquez Benchekri*

*2023-2024 2n de Batxillerat*

# Agraïments

Reconec i dono la meva gratitud:

Al meu tutor del Treball de Recerca, *Jose Diego López García*, pel seu esforç de guiar-me pel bon camí i a ajudar-me que el treball sigui concís.

A *Marc Felipe* (PhD Student de la UPC) per haver-me mostrat les aplicacions que existeixen en el món de la Física i ajudar-me a idear un codi per fer la inversió per a qualsevol imatge.

A *Pere Pascual* (professor de la UPC) per haver-me deixat llibres de geometria, càlcul i àlgebra matricial i lineal—fonts molt importants per aquest treball.

Al Dr. *Roberto Rubió* (professor de la UAB) per la seva orientació i suport conceptual en la planificació, organització i estructuració del treball.

A la meva *família* i al meu *tutor* per la seva comprensió durant aquells moments en què no he pogut dedicar-li tot el temps que hauria desitjat.

En general, a tots aquells que han contribuït a fer possible la creació d'aquest treball!

## Abstract

This project aimed to delve into and showcase specific aspects of Inversive Geometry, exploring a range of theorems to solve intriguing mathematical problems that are significantly facilitated by the *application* of inversions. While Inversive Geometry plays a crucial role in optics, this investigation focused solely on mathematical and physical problems.

The research involved assimilating knowledge from dense mathematical literature to formulate *demonstrations*. Additionally, understanding the mechanics of inversion and creating *applets* in mathematical software programs like GeoGebra and Desmos enriched the project, allowing for the exploration of nuanced scenarios beyond the limitations of a ten-page document.

To implement an inversion code in Python, the initial step involved providing a comprehensive introduction to inversions and their applications. However, the broader application of Inversive Geometry highlighted the importance of having a foundational understanding of the working *plane* to comprehend inversions fully.

Programming the code revealed that regardless of the complexity of a geometric figure, its inversion could be accomplished straightforwardly, leading to the discovery of fascinating scenarios. In summary, being able to demonstrate and apply numerous properties of Inversive Geometry unveiled compelling *connections* with other branches like Physics.

**Keywords:** application, demonstrations, applets, plane, connections.

## Resumen

Este proyecto pretendía profundizar y mostrar aspectos específicos de la Geometría Inversa, explorando una serie de teoremas para resolver intrigantes problemas matemáticos que se ven significativamente facilitados por la *aplicación* de las inversiones. Aunque la Geometría Inversa desempeña un papel crucial en la óptica, esta investigación se centró únicamente en problemas matemáticos y físicos.

La investigación implicó asimilar conocimientos de una densa literatura matemática para formular *demostraciones*. Además, la comprensión de la mecánica de la inversión y la creación de *applets* en programas de software matemático como GeoGebra y Desmos enriquecieron el proyecto, permitiendo la exploración de escenarios matizados más allá de las limitaciones de un documento de diez páginas.

Para implementar un código de inversión en Python, el paso inicial consistió en ofrecer una introducción exhaustiva a las inversiones y sus aplicaciones. Sin embargo, la aplicación más amplia de la Geometría Inversiva puso de relieve la importancia de tener una comprensión básica del *plano* de trabajo para comprender plenamente las inversiones.

La programación del código puso de manifiesto que, independientemente de la complejidad de una figura geométrica, su inversión podía llevarse a cabo de forma sencilla, lo que llevó al descubrimiento de escenarios fascinantes. En resumen, ser capaz de demostrar y aplicar numerosas propiedades de la Geometría Inversiva desveló notables *conexiones* con otras ramas como la Física.

**Palabras clave:** aplicación, demostraciones, applets, plano, conexiones.

# Índex

Capítols	Pàgina
<b>Introducció</b>	<b>8</b>
<b>1 Inversió</b>	<b>10</b>
1.1 Definició i propietats de la inversió . . . . .	10
1.1.1 Inversions respecte a una circumferència . . . . .	15
1.2 Fórmula algebraica amb coordenades . . . . .	17
1.3 Casuístiques per a rectes analíticament . . . . .	18
1.3.1 Rectes secants en dos punts diferents . . . . .	18
1.3.2 Rectes exteriors . . . . .	19
1.3.3 Rectes tangents . . . . .	20
1.3.4 Rectes que passen per $O$ . . . . .	21
1.4 Transformacions inversives per a còniques . . . . .	22
1.4.1 Circumferències . . . . .	22
1.4.2 Paràboles . . . . .	26
1.4.3 Lemniscata de Bernoulli . . . . .	29
1.4.4 El·lipses . . . . .	31
1.5 Teorema de l'angle . . . . .	33
1.6 Relació amb la geometria Euclidiana . . . . .	34
<b>2 Inversions com a transformacions</b>	<b>36</b>
2.1 Extensió del pla complex . . . . .	36
2.2 Esfera de Riemann . . . . .	36
2.2.1 Projectió estereogràfica . . . . .	38
2.2.2 Comportament sobre $\mathbb{S}$ . . . . .	40
2.2.3 Conformalitat i orientació . . . . .	43
2.3 Transformacions de Möbius . . . . .	47

<i>ÍNDEX</i>	5
2.3.1 Representació matricial . . . . .	49
2.3.2 Inverses de Möbius . . . . .	50
2.3.3 Homomorfisme de transformacions de Möbius . . . . .	50
2.4 Teorema fonamental de la geometria inversiva . . . . .	51
2.4.1 Representació de tres punts a tres punts . . . . .	52
2.5 Teorema de les circumferències d'Apolloni . . . . .	55
<b>3 Aplicacions</b>	<b>59</b>
3.1 Teorema de Ptolemeu . . . . .	59
3.2 Aplicació de la inversió a la física . . . . .	61
3.2.1 Problema a l'esfera conductora . . . . .	61
3.3 Problema de Shoemaker's Knife . . . . .	64
3.4 Inversió amb imatges . . . . .	67
3.4.1 Fractal de Mandelbrot . . . . .	68
3.4.2 Satèl·lits naturals . . . . .	70
<b>Conclusió</b>	<b>73</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>74</b>

# Índex de figures

1.1	Procediment geomètric per fer la inversió. . . . .	11
1.2	Esquema d'inversió per a punts . . . . .	12
1.3	Inversió en punt cíclic. . . . .	12
1.4	Inversió en recta exterior. . . . .	13
1.5	Procediment de la inversió d'una recta secant a la circumferència d'inversió en dos punts diferents. . . . .	14
1.6	Procediment de la inversió en una recta tangent a la circumferència d'inversió.	14
1.7	Inversió en rectes. . . . .	14
1.8	Inversió respecte a una circumferència. . . . .	15
1.9	Coordenades algebraiques . . . . .	17
1.10	Inversió de recta secant en dos punts diferents . . . . .	19
1.11	Inversió de la recta exterior. . . . .	20
1.12	Inversió en recta tangent . . . . .	21
1.13	Inversió en recta que passa per $O$ . . . . .	22
1.14	Inversió de paràboles. . . . .	27
1.15	Inversió d'hipèrboles. . . . .	30
1.16	Inversió d'el·lipses. . . . .	31
1.17	Angles semblants. . . . .	34
1.18	Conjunt de geometria Euclidiana i inversiva. . . . .	35
2.1	Esfera de Riemann, $\mathbb{S}$ . . . . .	37
2.2	Secció de $\mathbb{S}$ . . . . .	39
2.3	Inversió de recta $\ell$ respecte a $\mathbb{S}$ . . . . .	41
2.4	Transformació inversiva de rectes de la latitud i la longitud de $\mathbb{S}$ . . . . .	43
2.5	Orientació des de dins de $\mathbb{S}$ . . . . .	46
2.6	Orientació des de fora de $\mathbb{S}$ . . . . .	46

2.7	Estratègia per a $\Gamma$ .	52
2.8	Estratègia per a $t(z)$ .	52
2.9	Circumferència d'Apol·loni.	56
2.10	Família de circumferències d'Apol·loni.	58
3.1	Inversió d' $A$ i $B$ .	59
3.2	Representació de la demostració del cas general del Teorema de Ptolemeu.	60
3.3	Secció de l'esfera conductora amb les càrregues $q$ i $q'$ en $P$ i $P'$ , respectivament.	63
3.4	Shoemaker's Knife.	64
3.5	Inversió de $\Omega_1$ , $\Omega_2$ i $\Omega_3$ respecte de $\mathcal{C}$ .	65
3.6	Successió de circumferències entre $\ell_1$ i $\ell_2$ .	65
3.7	Serie de circumferències buscada del problema del Shoemaker's Knife.	66
3.8	Codi de Python per fer la inversió geomètrica.	67
3.9	Funció del Fractal de Mandelbrot a Desmos.	69
3.10	Inversió implementada al Fractal de Mandelbrot.	69
3.11	Fractal de Mandelbrot amb infinites iteracions.	70
3.12	Inversió implementada al Fractal de Mandelbrot amb infinites iteracions.	70
3.13	Terra-Lluna.	71
3.14	Inversió implementada en la Terra i la Lluna.	71
3.15	$J1407b$ o Super-Saturn.	72
3.16	Inversió implementada en el Super-Saturn.	72



## Introducció

La finalitat d'aquesta recerca és aprofundir en la Geometria Inversiva i demostrar i relacionar teoremes que es detallaran en els següents capítols. Aquesta geometria, no gaire coneguda a nivell global, s'introdueix amb una explicació accessible per a tots els lectors. Malgrat que la inversió és un moviment geomètric àmpliament utilitzat en òptica, la investigació es centra principalment en la resolució de problemes matemàtics i físics.

La realització d'aquest treball de recerca és fruit del meu interès per a cursar estudis universitaris en matemàtiques i física. Tot i que el treball no té un pes significatiu en aquest últim àmbit, s'hi presenta una aplicació interessant per a calcular el potencial elèctric mitjançant inversions.

L'estudi de la Geometria Inversiva ha suposat un desafiament, ja que aquest tema es tracta normalment més endavant en els estudis universitaris de matemàtiques, i la informació disponible supera el nivell de segon de Batxillerat. No obstant això, la realització d'aquest treball m'ha proporcionat una millor comprensió de com un matemàtic ha de redactar, preparant-me per a futurs treballs d'investigació.

Per a trobar tota la informació que està continguda en aquesta investigació, he fet una gran lectura matemàtica sobre llibres de geometria en Castellà, Català, i, majoritàriament, en Anglès per elaborar una estructura introductòria, avançada i en aquest cas, aplicada en casos que he anat trobant en el món de les matemàtiques i el físic.

Es pot destacar que el treball s'ha escrit íntegrament amb  $\text{\LaTeX}$ , una eina àmpliament utilitzada en la redacció d'articles de divulgació científica. Aprofundir en l'ús d'aquesta eina ha estat beneficiós per al meu creixement com a futur científic.

L'objectiu final és desenvolupar un codi en Python per invertir qualsevol imatge respecte d'una circumferència d'inversió, ja que això pot resultar més interessant per al lector que aplicar inversions a llocs geomètrics.

El marc teòric que he seguit és que en el capítol 1 s'introdueix conceptes generals de la inversió geomètrica i analítica. A través d'applets creats amb GeoGebra i demostracions

de teoremes, s'aprèn com funciona la inversió. En el capítol 2, s'introdueix un nou pla: el pla complex estès, millorant la comprensió de la inversió. Tot i això, en aquest mateix capítol apareixen les transformacions de Möbius que poden complicar alguns conceptes. Per tant, s'ha intentat redactar de manera eficient per fer-ho comprensible. Ja arribats a l'últim capítol, s'han utilitzat varies idees trobades durant tot el treball per a aplicar-les a problemes matemàtics i físics.

# Capítol 1

## Inversió

### Compendi

Les transformacions geomètriques més comunes treballades a l'institut són les homotècies, translacions, rotacions, simetries axials i centrals. Però, qui no diu que existeixen d'altres? Aquest és el cas de la inversió, la qual estudiarem en aquest treball. Per explicar-la, començarem introduint-la en pla cartesià:  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Cal destacar que els plans on treballarem seran un aspecte fonamental per a aplicar adequadament la inversió.

### 1.1 Definició i propietats de la inversió

La inversió respecte a una circumferència és una transformació geomètrica en el pla, en la qual cada punt  $P$  del pla, diferent del centre de la circumferència, es fa correspondre amb un altre punt  $P'$  del mateix pla, tal i com es definirà a continuació. A més, aquests punts estan alineats amb el punt  $O$ , conegut com el centre d'inversió o circumferència.

**Definició 1.1.1.** Diem que un punt  $P'$  és l'invers de  $P$  respecte d'una circumferència (de centre  $O$  i radi  $r$ ) si compleix les següents propietats

1.  $P$ ,  $P'$  i el centre de la circumferència  $O$  es troben en una mateixa semirecta.
2.  $OP \cdot OP' = r^2$ .

on  $r$  és el radi de la circumferència i  $O$  el centre d'aquesta.

Geomètricament, si tenim un punt exterior  $P$  a la circumferència de centre  $O$ , per a trobar el seu invers  $P'$ , hem de seguir aquests passos:

- (i) Unir el punt  $P$  amb el centre de la inversió  $O$  mitjançant un segment.
- (ii) Des del punt  $P$ , traçar un segment que sigui tangent a la circumferència. Anomenarem el punt de tangència com  $T$ .
- (iii) Dibuixar el segment perpendicular de  $T$  a  $OP$ .
- (iv) El punt de concurrència entre aquests dos segments és el punt  $P'$ .

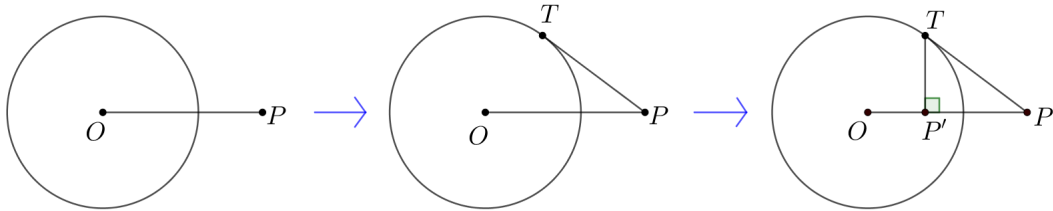


Figura 1.1: Procediment geomètric per fer la inversió.

Gràcies a la il·lustració anterior, ens fem una idea de com s'inverteix un punt exterior a la circumferència respecte d'aquesta.

El procediment per a trobar la imatge d'un punt interior segueix el mateix mètode que l'anterior, però, començant pel final.

A partir d'aquest procediment, s'entén que aplicant la inversió respecte d'una circumferència a un punt  $P$  obtindrem  $P'$  i en aplicar-la a un punt  $P'$  obtindrem  $P$ . Expressat d'una altra manera podem dir que  $t$  serà fer la inversió respecte d'una circumferència, complint-se, així, que

$$t(P) = P' \quad \text{i} \quad t(P') = P$$

D'aquestes igualtats, deduïm que aplicant dos cops el moviment s'obté la identitat, i.e.

$$t^2(P) = t(t(P)) = t(P') = P$$

i

$$t^2(P') = t(t(P')) = t(P) = P';$$

que això es complirà per a qualsevol parella  $P$  i  $P' = t(P)$ .

Una imatge més representativa d'aquests punts inversos respecte la circumferència és la següent.

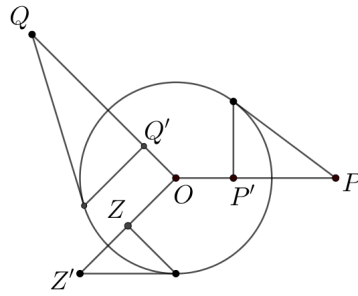


Figura 1.2: Esquema d'inversió per a punts

Continuant amb la inversió, observem quina és la imatge d'un punt que es troba sobre la circumferència (aquest tipus de punts s'anomenen punts cíclics). Aleshores, si tenim un punt cíclic  $D$ , per a trobar la seva imatge, haurem de seguir els passos anteriors:

- (i) Dibuixar el segment que uneix el punt  $D$  amb el centre  $O$ .
- (ii) Traçar un segment tangent a la circumferència des de  $D$ .

En aquest cas, el punt de tangència que és el mateix punt  $D$  serà la seva imatge:  $D = t(D) = D'$ .

D'aquesta manera, quan el punt es troba sobre la circumferència, la seva imatge coincideix amb ell mateix, com es pot observar gràficament.

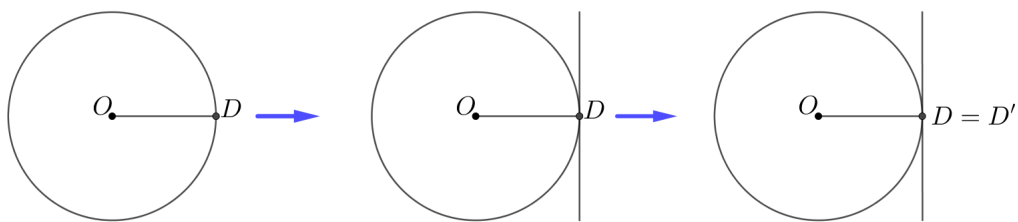


Figura 1.3: Inversió en punt cíclic.

Ara que hem observat com actua la inversió sobre els punts, ens podríem preguntar que passaria, geomètricament amb les rectes.

Doncs bé, fixem-nos que la inversió envia punts interiors a exteriors i viceversa, i, a més, els punts cíclics s'inverteixen sobre si mateixos. D'aquesta manera, aplicant les anteriors

proprietats dibuixarem un primer model per a veure quin lloc geomètric surt. Suposem que tenim una recta exterior a la circumferència d'inversió. Llavors, podem dibuixar les imatges de diferents punts a poc a poc per a veure que anem obtenint, i.e.

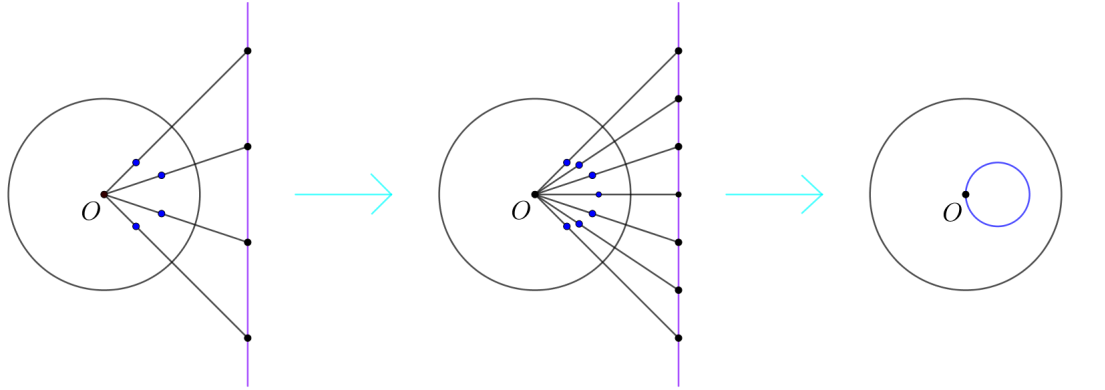


Figura 1.4: Inversió en recta exterior.

Com es pot apreciar en la imatge, al principi semblaria que estem dibuixant un conjunt de punts que no paren a formar cap figura geomètrica coneguda. Però, després de fer-ne molts més, podem observar que obtenim una circumferència puntejada en  $O$ .

Ara, sabent que aplicant la inversió a una recta exterior obtenim com a imatge una circumferència dins de la circumferència d'inversió, hauríem de comprovar si per a una recta secant en dos punts que no passi per  $O$  succeeix el mateix.

Quan apliquem la inversió a una recta secant la circumferència d'inversió en dos punts diferents, observem que el segment de la recta que es troba a l'interior de la circumferència d'inversió es converteix en un arc extern d'una nova circumferència, mentre que els segments exteriors s'inverteixen i es situen a l'interior de la circumferència d'inversió, formant l'altre arc de circumferència.

Comprovarem, llavors, que la circumferència resultant és secant amb la circumferència d'inversió en els mateixos punts en què talla a la recta inicial.

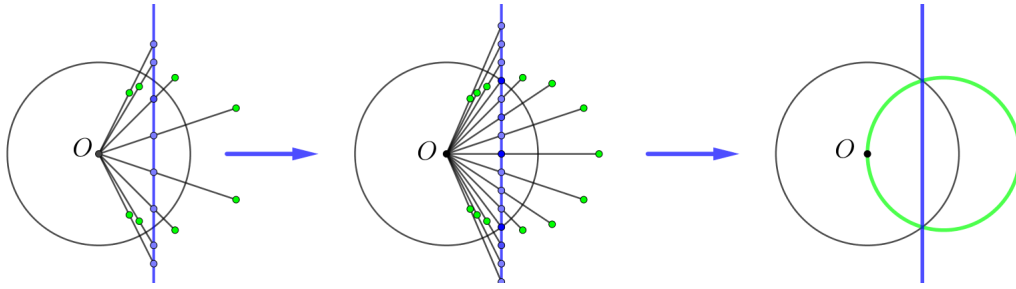


Figura 1.5: Procediment de la inversió d'una recta secant a la circumferència d'inversió en dos punts diferents.

Una altra possibilitat és sobre que passaria si apliquéssim la inversió a una recta tangent a la circumferència d'inversió. Bé, aquest cas particular és molt senzill. Es considera que una recta tangent és secant en només un punt (implicant que la recta és tota exterior menys un punt, el punt cíclic). Basant-nos en les definicions anteriors, el lloc geomètric que obtindrem serà d'una circumferència puntejada en  $O$  i secant interior en el punt de tangència.

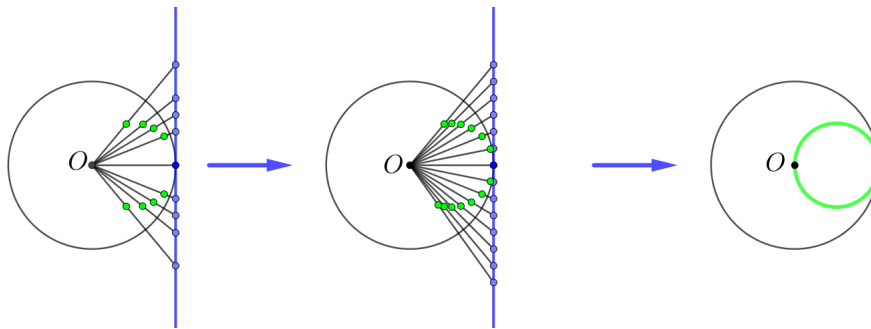


Figura 1.6: Procediment de la inversió en una recta tangent a la circumferència d'inversió.

Una il·lustració de totes aquestes casuístiques és la següent:

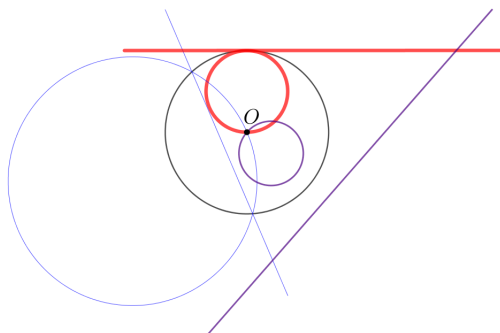


Figura 1.7: Inversió en rectes.

**OBSERVACIÓ 1.1.2.** La inversió és una transformació geomètrica amb correspondència biunívoca, i.e.

$$I : \mathbb{R}^2 - \{O\} \mapsto \mathbb{R}^2 - \{O\}$$

$$P \mapsto P'$$

El moviment és semblant a una reflexió però respecte una circumferència en comptes d'una recta.

### 1.1.1 Inversions respecte a una circumferència

La transformació inversiva té una propietat fonamental que relaciona cada punt amb el seu invers  $i$ , el radi i el centre de la circumferència. El teorema és el següent:

#### Teorema 1.1.3 (Propietat fonamental de la inversió)

Sigui la circumferència  $\mathcal{C}$  de radi  $r$  i centre  $O$ , i un punt  $P$  diferent de  $O$  llavors, existeix un altre punt  $P'$ , que és l'invers de  $P$ , alineat amb  $O$  i  $P$  complint la següent propietat

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

*Demostració.* Per a demostrar aquesta propietat haurem de reprendre el concepte de la secció 1.1 on s'explicava geomètricament la inversió. Situant-nos en la imatge 1.1, podem afegir la idea de traçar el radi des de  $O$  fins a  $T$ . Com els segments  $OP$  i  $TP'$  són perpendiculars i  $OT$  i  $TP$  també ho són; llavors  $\angle OTP = \angle OP'T$ ,  $\angle OTP' = \angle OPT$  i  $\angle TOP = \angle TOP' \implies \triangle OTP \sim \triangle OP'T$ .

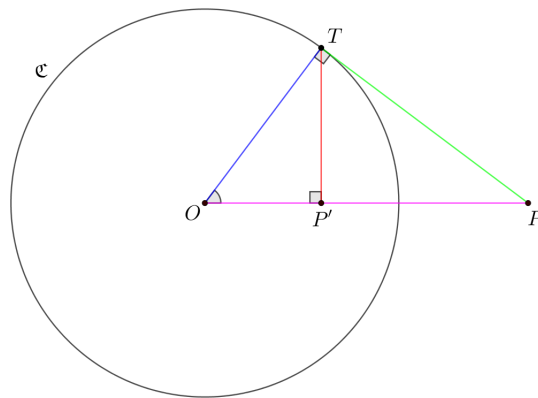


Figura 1.8: Inversió respecte a una circumferència.



Per tant, per semblança obtenim que

$$\frac{OP}{OT} = \frac{OT}{OP'},$$

i traient denominadors

$$OP \cdot OP' = OT^2.$$

Però,  $OT$  és un radi  $r$  de  $\mathfrak{C}$ , aleshores,

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

□

Un cop demostrada la propietat, ara podrem donar una definició més precisa.

**Definició 1.1.4.** Sigui  $\mathfrak{C}$  una circumferència de centre  $O$  i radi  $r$ , i, a més,  $P$  un punt diferent d' $O$ . Si  $P'$  és el punt en la semirecta  $OP$  que satisfà la condició

$$OP \cdot OP' = r^2,$$

llavors diem que  $P'$  és l'invers de  $P$  respecte a la circumferència  $\mathfrak{C}$ . El punt  $O$  es diu el centre de la inversió i  $\mathfrak{C}$ , la circumferència de la inversió. La transformació  $t$  és definida per

$$t(P) = P' \quad (P \in \mathbb{R}^2 - \{O\})$$

coneguda com a inversió sobre  $\mathfrak{C}$ .

S'imposa que  $P$  sigui un punt diferent del centre d'inversió perquè ens dona problemes fer la inversió del punt  $O$ . Aquesta condició es deu a que  $OP \cdot OP' = r^2$  és un producte diferent de zero, ni  $OP$  ni  $OP'$  poden ser zero. Per tant, ni  $P$  ni  $P'$  poden coincidir amb  $O$ . Així,  $O$  queda exclòs del domini de la transformació  $t$ .

Un cop hem definit la inversió amb exactitud podem utilitzar el Teorema 1.1.3 per a demostrar matemàticament respecte d'aquesta inversió que els punts de la  $\mathfrak{C}$  són invariants. Aleshores, sigui un punt  $P$  cíclic a una circumferència. Es compleix que  $OP$  és un radi d'aquesta. Aquest fet implica

$$\begin{aligned} r^2 &= OP \cdot OP', \\ &= r \cdot OP', \end{aligned}$$

per tant,

$$OP' = r.$$

## 1.2 Fórmula algebraica amb coordenades

Per a poder continuar amb la inversió de llocs geomètrics en el pla (e.g. rectes, circumferències...), hauríem de poder obtenir una expressió de les coordenades de  $P'$  en funció de les coordenades de  $P$ . És a dir, ens interessaria tenir una expressió de la inversió en coordenades.

Suposem que a partir d'ara  $\mathcal{C}$  és una circumferència de radi unitari amb centre  $O(0,0)$ .

A més, suposem que el punt  $P \in \mathbb{R} - \{O\}$  té com a coordenades  $(x, y)$ . Com el punt  $P'$  està alineat amb  $P$  i  $O$ , aleshores,  $P' = (kx, ky)$  per un cert valor positiu de  $k$ .

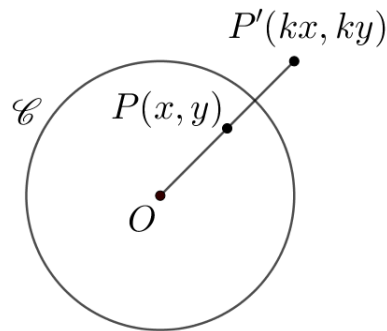


Figura 1.9: Coordenades algebraiques

Com el radi de  $\mathcal{C}$  és 1, tenim que  $OP \cdot OP' = 1$ . Elevant al quadrat aquesta igualtat ens queda que  $OP^2 \cdot OP'^2 = 1$ , i aplicant la fórmula de distància entre dos punts obtenim

$$(x^2 + y^2) \cdot (k^2x^2 + k^2y^2) = 1.$$

Aïllant  $k$  veiem el següent

$$k^2 = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2};$$

aleshores, donat que  $k > 0$

$$k = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Com a resultat,

$$P' = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Un cop obtingut la correspondència algebraica, obtenim el teorema següent:

**Teorema 1.2.1**

La inversió en el cercle unitari  $\mathcal{C}$  ve donada per la funció

$$t : (x, y) \mapsto \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{O\})$$

**OBSERVACIÓ 1.2.2.** Tot i que en aquest treball utilitzarem la inversió respecte  $\mathcal{C}$ , l'expressió de coordenades per a qualsevol circumferència de radi  $R$  i centre  $(0,0)$  s'obté substituint l'1, del procés anterior, per un cert valor  $R$  positiu diferent de 0:

$$k = \frac{R^2}{x^2 + y^2};$$

per tant,

$$t : (x, y) \mapsto R^2 \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{O\})$$

### 1.3 Casuístiques per a rectes analíticament

Després d'haver expressat les coordenades del punt invertit en funció de les del punt inicial, ara podem aplicar aquesta idea per a les rectes. Per a poder aplicar la inversió a aquestes només caldrà fer la transformació de cada punt de la recta i intuir que com  $(x', y')$  és la imatge de  $(x, y)$  sota la inversió en  $\mathcal{C}$ , la correspondència serà la següent:

$$(x, y) = \left( \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2}, \frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} \right). \quad (1.1)$$

#### 1.3.1 Rectes secants en dos punts diferents

Suposem que ens trobem amb la circumferència d'inversió  $\mathcal{C}$  i una recta secant en dos punts diferents d'equació  $\pi : 3x - 2y = 1$ . Per a poder saber quin lloc geomètric resultant obtindrem, hem de relacionar les coordenades d'un punt amb les del seu invers. Per tant,  $P = t(P')$  ha de satisfer l'equació  $\pi$  substituint en  $3x - 2y = 1$ , i.e.:

$$\frac{3x'}{(x')^2 + (y')^2} - \frac{2y'}{(x')^2 + (y')^2} = 1,$$

multiplicant per  $(x')^2 + (y')^2$ , veiem que  $3x' - 2y' = (x')^2 + (y')^2 \implies (x')^2 - 3x' + (y')^2 + 2y' = 0$ ; i completant els quadrats:

$$(x')^2 - 2 \cdot x' \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (y')^2 + 2 \cdot y' \cdot 1 + 1^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1^2 = 0;$$

$$(x')^2 - 2 \cdot x' \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (y')^2 + 2 \cdot y' \cdot 1 + 1^2 = \frac{9}{4} + 1;$$

$$\left(x' - \frac{3}{2}\right)^2 + (y' + 1)^2 = \frac{13}{4}.$$

Per tant, l'equació que surt és d'una circumferència de centre  $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$  i radi  $\frac{\sqrt{13}}{2}$ . Aquesta nova circumferència  $\mathfrak{C}$  passa pel centre d'inversió  $O$  i és secant a  $\mathcal{C}$  en els mateixos dos punts que la recta  $\pi$  concorre amb  $\mathcal{C}$ .

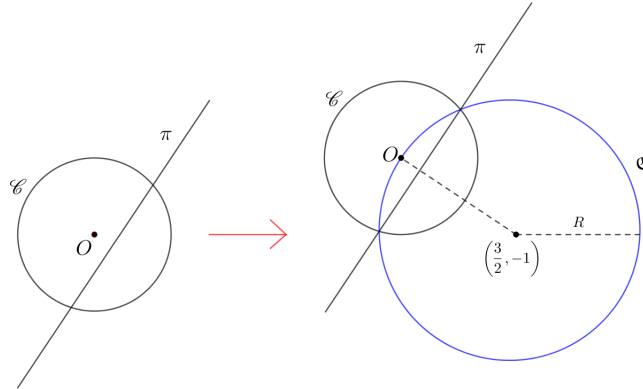


Figura 1.10: Inversió de recta secant en dos punts diferents

### 1.3.2 Rectes exteriors

Per al cas de les rectes exteriors s'ha d'utilitzar el mateix procediment que de l'anterior apartat. Suposem que ens trobem un altre cop en una circumferència  $\mathcal{C}$  amb una recta exterior d'equació  $\tau : x = \frac{3}{2}$ . La inversió  $P = t(P')$  ha de satisfer l'equació  $\tau$  substituint en  $x = \frac{3}{2}$ , i.e.

$$\frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} = \frac{3}{2},$$

aplicant el mcd de les fraccions veiem que  $2x' = 3(x')^2 + 3(y')^2$ , i dividint entre tres i completant els quadrats:

$$(x')^2 - \frac{2}{3}x' + (y')^2 = 0;$$

$$(x')^2 - 2 \cdot x' \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + (y')^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0;$$

$$(x')^2 - 2 \cdot x' \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + (y')^2 = \frac{1}{9};$$

$$\left(x' - \frac{1}{3}\right)^2 + (y')^2 = \frac{1}{9}.$$

Per tant, com en l'anterior subapartat, hem obtingut una circumferència de centre  $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$  i radi  $\frac{1}{3}$ . A més a més, el nou lloc geomètric,  $\mathfrak{C}$ , passa pel centre d'inversió  $O$  però no és secant en cap punt amb la circumferència  $\mathcal{C}$ .

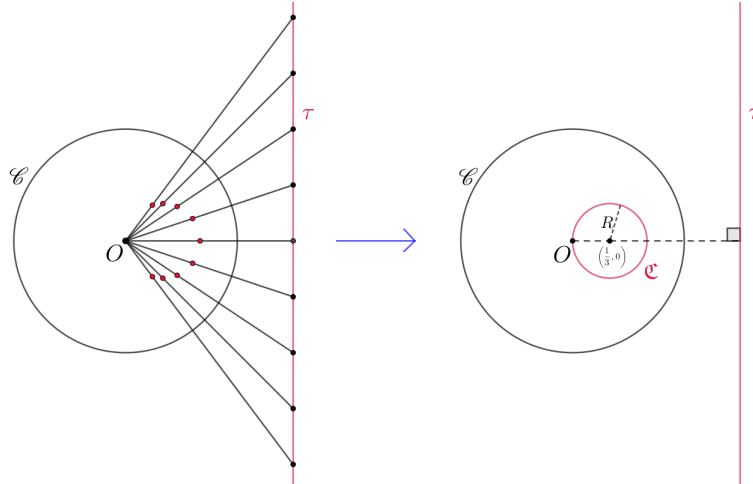


Figura 1.11: Inversió de la recta exterior.

**OBSERVACIÓ 1.3.1.** Sigui com sigui la recta exterior, aquesta i el diàmetre estès que passa per  $O$  de la circumferència  $\mathfrak{C}$  sempre seran perpendiculars.

### 1.3.3 Rectes tangents

Com hem representat i explicat abans en la Figura 1.7, amb les rectes tangents hi haurà només un punt de la recta que serà cíclic.

Suposem que ens trobem en una circumferència  $\mathcal{C}$  amb una recta tangent d'equació  $\Omega : x = 1$ . Per a trobar el lloc geomètric invers, hem de relacionar les coordenades d'un punt amb les del seu invers. Aleshores,  $P = t(P')$  ha de satisfer l'equació  $\Omega$  substituint en  $x = 1$ , i.e.

$$\frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} = 1,$$

multiplicant per  $(x')^2 + (y')^2$  obtenim que  $x' = (x')^2 + (y')^2 \implies (x')^2 - x' + (y')^2 = 0$ ; i completant els quadrats:

$$(x')^2 - 2 \cdot x' \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (y')^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0;$$

$$(x')^2 - 2 \cdot x' \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (y')^2 = \frac{1}{4};$$

$$\left(x' - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Com podem apreciar en l'equació, ens sortirà una nova circumferència de centre  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  i radi  $\frac{1}{2}$ . Aquesta circumferència té la propietat que el seu diàmetre és el radi de  $\mathcal{C}$  i llavors el radi de  $\mathcal{C}'$  serà la meitat de l'original.

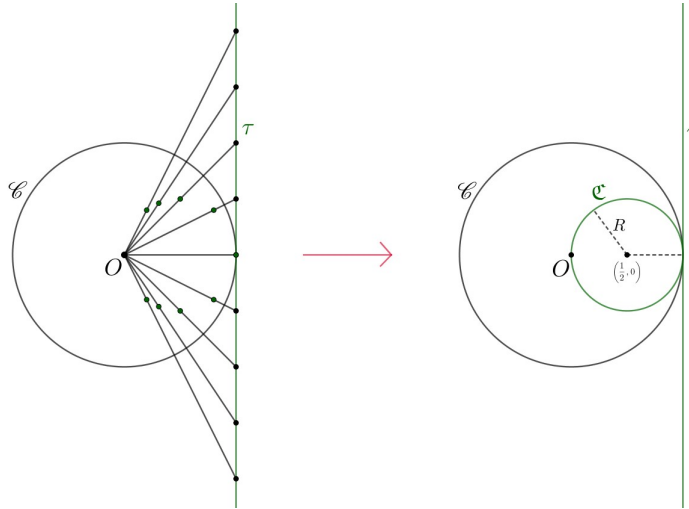


Figura 1.12: Inversió en recta tangent

### 1.3.4 Rectes que passen per $O$

L'últim cas de rectes és la que passa per  $O$ . Anteriorment, no havíem esmentat aquest cas pel fet que fent la inversió analíticament s'entén millor la seva representació. Però abans de res, una idea sobre el lloc geomètric invers que volem trobar és la següent.

Quan explicàvem com actuava la inversió en punts, veiem que aquests sempre estaven alineats amb el centre  $O$ . I si fèiem el segment d' $O$  a  $P$  i l'expandíem, obtindríem una recta de punts alineats amb  $OP$ . Així mateix, a fer la inversió en un punt  $P$ , donava un altre punt  $P'$  que estava contingut en el segment estès d' $OP$ . Per tant, ara tenint una recta que passa pel centre d'inversió i una circumferència  $\mathcal{C}$ , apliquem la inversió a la recta respecte de  $\mathcal{C}$  i obtindrem la mateixa recta.

Aquest fet ocorre perquè invertint cada punt de la recta prendrem un altre punt que està contingut en aquesta i així repetidament. No obstant això, matemàticament es demostra fàcilment.

Suposem que tenim la recta d'equació  $\lambda : y = x$  que passa pel centre de la circumferència  $\mathcal{C}$ . Aleshores, la inversió de  $P = t(P')$  ha de satisfer l'equació  $\lambda$  substituïnt en  $y = x$ , i.e.

$$\frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} = \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2},$$

que multiplicant per  $(x')^2 + (y')^2$  obtenim

$$y' = x'.$$

D'aquesta manera demostrem que sí es transforma en la mateixa recta, la qual hem anomenat  $\ell$ .

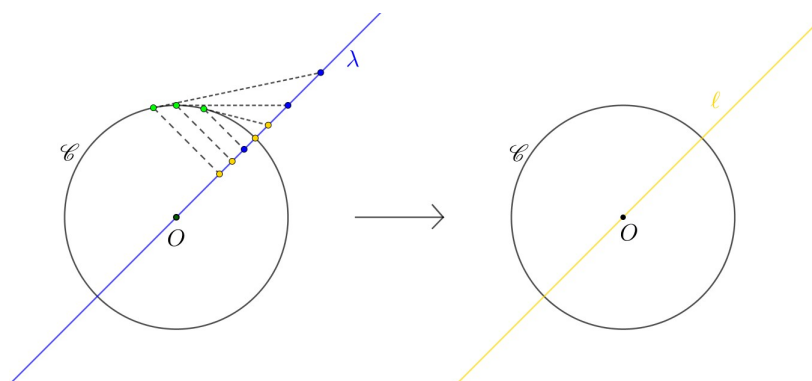


Figura 1.13: Inversió en recta que passa per  $O$

## 1.4 Transformacions inversives per a còniques

Un cop hem detallat geomètricament i analíticament la inversió en llocs geomètrics més senzills, durant aquesta secció aplicarem la mateixa idea de l'anterior (1.3) per a les còniques.

### 1.4.1 Circumferències

En aquest apartat veurem com la inversió transforma una circumferència en una recta o en una circumferència. Llavors estudiem en quins casos ocorre l'un o l'altre.

El primer cas és quan la circumferència no conté el centre d'inversió,  $O$ , en el seu arc.

Suposem que ens trobem amb la circumferència  $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$  i una altra d'equació  $\Gamma_1 : (x - 3)^2 + y^2 = 1$  exterior a  $\mathcal{C}$ . Si  $P(x, y) \in \Gamma_1$  i  $P'(x', y') = t(P)$ , tindrem que

$P = t(P')$  i, per tant,  $P = t(P')$  ha de satisfer l'equació  $\Gamma_1$  substituint  $x = \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2}$  i  $y = \frac{y'}{(x')^2 + (y')^2}$  en  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ , i.e.

$$\begin{aligned} \left( \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} - 3 \right)^2 + \left( \frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} \right)^2 &= 1; \\ \frac{(x')^2}{[(x')^2 + (y')^2]^2} + \frac{(y')^2}{[(x')^2 + (y')^2]^2} - \frac{6x'}{(x')^2 + (y')^2} + 8 &= 0; \\ \frac{1}{(x')^2 + (y')^2} - \frac{6x'}{(x')^2 + (y')^2} + 8 &= 0; \end{aligned}$$

traient denominadors i expressant l'expressió similar a la d'una circumferència, obtenim

$$8(x')^2 - 6x' + 8(y')^2 = -1;$$

dividint tot per 8 i completant quadrats

$$\begin{aligned} (x')^2 - 2 \cdot x' \cdot \frac{3}{8} + \left( \frac{3}{8} \right)^2 + (y')^2 - \left( \frac{3}{8} \right)^2 &= -\frac{1}{8}; \\ \left( x' - \frac{3}{8} \right)^2 + (y')^2 &= \frac{9}{64} - \frac{1}{8}; \\ \left( x' - \frac{3}{8} \right)^2 + (y')^2 &= \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

Observant l'expressió, podem concloure que hem obtingut una circumferència de centre  $\left( \frac{3}{8}, 0 \right)$  i radi  $\frac{1}{8}$ . Com en aquest cas  $\Gamma$  estava fora de  $\mathcal{C}$  la nova circumferència es trobarà a dins de  $\mathcal{C}$ .

**OBSERVACIÓ 1.4.1.** Un detall molt important és que la nova circumferència no contindrà  $O$  en el seu arc perquè el lloc geomètric que forma aquesta no s'estén cap a l'infinit com passava amb les rectes.

Tornant amb el segon cas, suposem que tenim una circumferència d'equació  $\Gamma_2 : (x - 2)^2 + y^2 = 4$  i la circumferència  $\mathcal{C}$  on  $\Gamma_2$  conté el centre d'inversió  $O$ . Llavors,  $P = t(P')$  ha de satisfer l'equació  $\Gamma_2$  substituint en  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ , i.e.

$$\begin{aligned} \left( \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} - 2 \right)^2 + \left( \frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} \right)^2 &= 4; \\ \frac{(x')^2}{[(x')^2 + (y')^2]^2} + \frac{(y')^2}{[(x')^2 + (y')^2]^2} - \frac{4x'}{(x')^2 + (y')^2} + 4 &= 4; \\ \frac{1}{(x')^2 + (y')^2} - \frac{4x'}{(x')^2 + (y')^2} &= 0; \end{aligned}$$



multiplicant tot per  $(x')^2 + (y')^2$  obtenim

$$1 - 4x' = 0;$$

$$4x' = 1;$$

$$x' = \frac{1}{4}.$$

L'expressió algebraica ens mostra que el lloc geomètric resultant és una recta secant als mateixos dos punts que les circumferències. Recordem que aquest procés és l'invers al de l'apartat 1.3.1 complint la propietat d'involució.

Ara bé, una qüestió important és per què, geomètricament, a l'hora de fer la inversió d'una circumferència a vegades obtenim una recta. El motiu és que en introduir el pla estès  $(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$  es fa referència que en aplicar la transformació  $P = t(P')$ , el punt  $O$  s'intercanvia amb el  $\infty$  ( $O = t(\infty)$ ) i viceversa. Aleshores, l'explicació que es dona per a aquest fet és que quan fem la inversió d'una recta o un lloc geomètric que conté el punt de l'infinit, aquest s'intercanvia amb el centre d'inversió. A més a més, s'interpreta que la recta és pot considerar com una circumferència de radi infinit. Per això, la inversió transforma circumferències generalitzades en circumferències generalitzades.

**OBSERVACIÓ 1.4.2.** Una circumferència generalitzada en el pla estès és un lloc geomètric que o bé s'interpreta com una recta o bé com una circumferència.

### Teorema 1.4.3

La inversió d'una recta o circumferència respecte a una circumferència d'inversió és la inversió de circumferències generalitzats a circumferències generalitzades.

Ara trobarem una expressió general de la inversió d'una circumferència respecte de  $\mathcal{C}$ .

Suposem l'equació d'una circumferència qualsevol centrada en  $O(a, b)$  i de radi  $r^2$ , amb termes  $a, b, r \in \mathbb{R}$ , com a la següent expressió:

$$C : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$P = t(P')$  ha de satisfer l'equació  $C$  substituint en  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , i.e.

$$\left( \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} - a \right)^2 + \left( \frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} - b \right)^2 = r^2;$$

operant quadrats obtenim que

$$\frac{(x')^2}{[(x')^2 + (y')^2]^2} - 2a \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} + a^2 + \frac{(y')^2}{[(x')^2 + (y')^2]^2} - 2b \frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} + b^2 = r^2;$$

$$\frac{1}{(x')^2 + (y')^2} - 2a \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} - 2b \frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} + a^2 + b^2 = r^2;$$

multiplicant per  $(x')^2 + (y')^2$  veiem que

$$1 - 2ax' - 2by' + a^2(x')^2 + a^2(y')^2 + b^2(x')^2 + b^2(y')^2 = r^2(x')^2 + r^2(y')^2;$$

i agrupant termes

$$(x')^2(a^2 + b^2 - r^2) - 2ax' + (y')^2(a^2 + b^2 - r^2) - 2by' = -1$$

Arribats a aquesta part, podem prendre dues vies: que l'equació representi una recta o una circumferència. La primera només serà possible si  $C$  conté al centre d'inversió  $(0, 0)$ , és a dir, que  $a^2 + b^2 - r^2 = 0$ . La segona, en canvi, podrà aplicar-se quan sigui diferent de 0.

Considerem que l'expressió d'abans és una recta; llavors

$$(x')^2 \cdot 0 - 2ax' + (y')^2 \cdot 0 - 2by' = -1;$$

$$ax' + by' = \frac{1}{2};$$

notem que si  $a = 0$ , sortirà una recta horitzontal  $y' = \frac{1}{2b}$ , i si  $b = 0$ , obtindrem una recta vertical  $x' = \frac{1}{2a}$ . Ara bé, quan  $a \neq 0$  i  $b \neq 0$  la recta serà la següent:

$$y' = \frac{-ax + \frac{1}{2}}{b};$$

$$y' = -\frac{a}{b}x' + \frac{1}{2b}.$$

**OBSERVACIÓ 1.4.4.** Si derivem l'expressió ens surt que la recta sempre tindrà el pendent:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}$$

que es troba en funció dels valors de  $a$  i  $b$ .

Seguint amb l'altre cas, quan l'expressió  $(x')^2(a^2+b^2-r^2)-2ax'+(y')^2(a^2+b^2-r^2)-2by' = -1$  compleixi que  $a^2 + b^2 - r^2 \neq 0$ , obtindrem, aleshores, una nova circumferència.

Per tal de veure quin centre i radi tindrà aquesta nova circumferència, completarem quadrats de l'equació anterior:

$$(x')^2(a^2 + b^2 - r^2) - 2ax' + (y')^2(a^2 + b^2 - r^2) - 2by' = -1;$$

dividim tot per  $a^2 + b^2 - r^2$ , ja que és diferent de 0 i completem quadrats

$$\begin{aligned} (x')^2 - \frac{2x'a}{a^2 + b^2 - r^2} + \left(\frac{a}{a^2 + b^2 - r^2}\right)^2 + (y')^2 - \frac{2y'b}{a^2 + b^2 - r^2} + \left(\frac{b}{a^2 + b^2 - r^2}\right)^2 = \\ \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2 - r^2)^2} - 1; \\ \left(x' - \frac{a}{a^2 + b^2 - r^2}\right)^2 + \left(y' - \frac{b}{a^2 + b^2 - r^2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2 - r^2)^2} - 1. \end{aligned}$$

Per tant, ara el centre de la nova circumferència serà  $O' \left(\frac{a}{a^2 + b^2 - r^2}, \frac{b}{a^2 + b^2 - r^2}\right)$  i el

$$\text{radi } R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2 - r^2)^2} - 1}.$$

Abans de començar amb una nova cònica, deixo [aquí](#) una referència feta amb **GeoGebra**<sup>1</sup> perquè es pugui manipular i veure geomètricament els dos casos o més d'inversions sobre circumferències tractats en aquesta secció.

## 1.4.2 Paràboles

Amb les paràboles la imatge no serà tan comuna com passava amb els llocs geomètrics anteriors. De totes maneres, intentem veure que obtenim.

Per a entendre el resultat que aconseguirem, recordem quina forma té la paràbola. Està composta per dues branques amb tendència cap al  $\pm\infty$ . Llavors quan més s'apropin a aquest, les branques de la paràbola s'assemblaran més a un "semirecta". A més, aquestes es troben connectades de forma còncava o convexa (depèn on es miri) implicant una similitud a un petit tros d'una circumferència. D'aquesta manera, a l'hora d'aplicar la inversió sortirà un lloc geomètric amb forma ovalada o gota d'aigua.

---

<sup>1</sup>GeoGebra: Software matemàtic per a il·lustrar llocs geomètrics

Per tant, suposem que tenim una paràbola d'equació  $\xi : y = x^2 + \frac{3}{2}$  i una circumferència  $\mathcal{C}$ ,  $P = t(P')$  ha de satisfer l'equació  $\xi$  substituint en  $y = x^2 + \frac{3}{2}$ , i.e.

$$\frac{(y')}{(x')^2 + (y')^2} = \frac{(x')^2}{[(x')^2 + (y')^2]^2} + \frac{3}{2},$$

multiplicant en ambdós costats per  $2 \cdot [(x')^2 + (y')^2]^2$ , obtenim

$$2(y') \cdot [(x')^2 + (y')^2] = 2(x')^2 + 3 [(x')^2 + (y')^2]^2;$$

desenvolupant l'expressió:

$$2(x')^2(y') + 2(y')^3 = 2(x')^2 + 3(x')^4 + 6(x')^2(y')^2 + 3(y')^4;$$

agrupant termes

$$3(x')^4 + 3(y')^4 + 6(x')^2(y')^2 - 2(y')^3 - 2(x')^2(y') + 2(x')^2 = 0$$

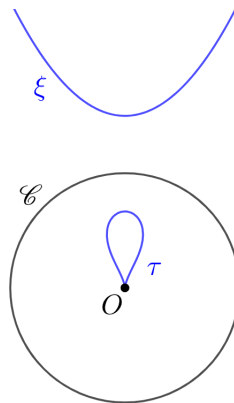


Figura 1.14: Inversió de paràboles.

Remarquem que com la paràbola és una figura que tendeix cap a l'infinit, hi haurà correspondència entre el centre d'inversió i el punt  $\infty$ .

Ara passarem a determinar l'expressió general de la paràbola un cop aplicat la inversió respecte de  $\mathcal{C}$ .

Una expressió comú de la paràbola amb coeficients  $a, b$ , i  $c$  tal que  $a, b, c \in \mathbb{R}$  és la següent:

$$U : y = ax^2 + bx + c$$

$P = t(P')$  ha de satisfer l'equació  $U$  substituint en  $y = ax^2 + bx + c$ , i.e.

$$\frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} = a \cdot \left( \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} \right)^2 + b \cdot \left( \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} \right) + c;$$

$$\frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} = \frac{a(x')^2}{[(x')^2 + (y')^2]^2} + \frac{b(x')}{(x')^2 + (y')^2} + c;$$

multipliquem per  $[(x')^2 + (y')^2]^2$  i operem

$$(y') [(x')^2 + (y')^2] = a(x')^2 + b(x') [(x')^2 + (y')^2] + c [(x')^2 + (y')^2]^2;$$

$$(x')^2(y') + (y')^3 = a(x')^2 + b(x')^3 + b(x')(y')^2 + c(x')^4 + 2c(x')^2(y')^2 + c(y')^4;$$

agrupem tot cap a un costat,

$$c(x')^4 + c(y')^4 + 2c(x')^2(y')^2 + b(x')^3 - (y')^3 - (x')^2(y') + b(x')(y')^2 + a(x')^2 = 0.$$

Notem que quan la paràbola contingui el centre d'inversió, i.e., que  $c = 0$ , l'expressió queda de la següent forma:

$$b(x')^3 - (y')^3 - (x')^2(y') + b(x')(y')^2 + a(x')^2 = 0.$$

Estudiem el cas quan  $U$  ja no és una paràbola per almenys veure quin tipus d'imatge podem obtenir. Llavors, quan  $a = 0$  i  $c$  és estrictament diferent de 0 podem obtenir una equació bastant coneguda:

$$\frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} = 0 \cdot \left( \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} \right)^2 + b \cdot \left( \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} \right) + c;$$

$$\frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} = \frac{b(x')}{(x')^2 + (y')^2} + c;$$

multipliquem per  $(x')^2 + (y')^2$  i operem

$$y' = b(x') + c(x')^2 + c(y')^2;$$

passem tot a un costat i dividim per  $c$  ja que és diferent de 0

$$(x')^2 + \frac{b}{c}(x') + (y')^2 - \frac{1}{c}(y') = 0;$$

completem quadrats i obtenim que

$$(x')^2 + 2 \cdot \frac{b}{2c}(x') + \left( \frac{b}{2c} \right)^2 + (y')^2 - 2 \cdot \frac{1}{2c}(y') + \left( -\frac{1}{2c} \right)^2 = \left( \frac{b}{2c} \right)^2 + \left( -\frac{1}{2c} \right)^2;$$

$$\left( x' + \frac{b}{2c} \right)^2 + \left( y' - \frac{1}{2c} \right)^2 = \frac{b^2 + 1}{4c^2}.$$

Vegem, per tant, que quan  $a = 0$  la imatge de la recta serà una circumferència de centre  $O'(-\frac{b}{2c}, \frac{1}{2c})$  i radi  $R = \frac{\sqrt{b^2+1}}{|2c|}$ . És clar que quan  $a = 0$ , la funció de la paràbola passarà a ser una funció d'una recta de la següent forma:

$$y = bx + c.$$

I com s'ha destacat abans,  $c$  ha de ser estrictament diferent de 0 pel fet que si  $c = 0$ , la equació contindria el punt  $(0, 0)$  i la inversió d'aquesta equació donaria la mateixa expressió—sent així, una recta  $y = bx$  amb pendent  $b$  i no una circumferència.

Per a fer d'altres manipulacions i veure com actua la transformació inversiva amb paràboles, [aquí](#) teniu una altra referència feta en GeoGebra.

Com hem pogut veure, aquesta figura no és una forma geomètricament coneguda, però té una petita similitud amb el que trobarem en el següent apartat.

### 1.4.3 Lemniscata de Bernoulli

La Lemniscata de Bernoulli, és una figura bastant coneguda que es pot representar a partir de la inversió d'una hipèrbola respecte a una circumferència d'inversió. La Lemniscata, per aclarir, és el símbol de l'infinit. Aleshores, sigui la hipèrbola d'equació  $\Pi : x^2 - y^2 = 1$  i la circumferència de radi unitari  $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$  que la veurem amb el símbol,  $\mathcal{L}$ , durant tot el treball,  $P = t(P')$  ha de satisfer l'equació  $\Pi$  substituint en  $x^2 - y^2 = 1$ , i.e.

$$\begin{aligned} \left( \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} \right)^2 - \left( \frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} \right)^2 &= 1; \\ \frac{(x')^2}{[(x')^2 + (y')^2]^2} - \frac{(y')^2}{[(x')^2 + (y')^2]^2} &= 1; \\ (x')^2 - (y')^2 &= [(x')^2 + (y')^2]^2; \\ 1 \cdot [(x')^2 - (y')^2] &= [(x')^2 + (y')^2]^2. \end{aligned}$$

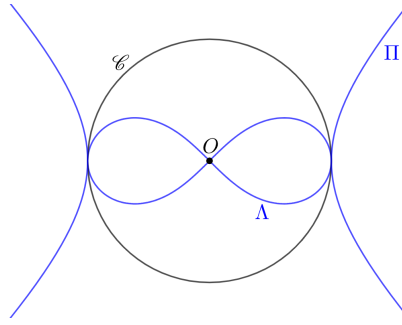


Figura 1.15: Inversió d'hipèrboles.

Adonem-nos que cadascuna de les dues branques de la hipèrbola s'assemblen bastant a la paràbola que, per tant, una part d'aquest lloc geomètric de la Figura 1.14 és semblant a la imatge obtinguda en la Figura 1.15.

Una expressió general del que seria aplicar la inversió a una hipèrbola qualsevol és la següent.

Com l'equació de la hipèrbola, centrada al centre d'inversió  $O(0,0)$  i amb semieixos  $a$  i  $b$  tal que  $a, b \in \mathbb{R}$  d'equació:

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$P = t(P')$  ha de satisfer l'equació  $H$  substituint en  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , i.e.

$$\frac{1}{a^2} \cdot \left( \frac{(x')}{(x')^2 + (y')^2} \right)^2 - \frac{1}{b^2} \cdot \left( \frac{(y')}{(x')^2 + (y')^2} \right)^2 = 1;$$

$$\frac{(x')^2}{a^2 \cdot [(x')^2 + (y')^2]^2} - \frac{(y')^2}{b^2 \cdot [(x')^2 + (y')^2]^2} = 1;$$

multipliquem tot per  $[(x')^2 + (y')^2]^2$  i obtenim que

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = [(x')^2 + (y')^2]^2.$$

Aquesta serà la imatge de la hipèrbola respecte de la inversió.

Si es vol manipular i experimentar com va variant la imatge sota la inversió deixo [aquí](#) una referència per poder fer-ho.

### 1.4.4 El·lipses

L'últim cas que trobem per a les còniques és amb l'el·lipse. Aquest lloc geomètric és semblant als anteriors que per similitud la imatge que ha de sortir hauria de ser paregut a un lloc geomètric de forma ovalada. Suposem que tenim l'el·lipse d'equació  $\Theta : \frac{1}{4} \cdot (x - 3)^2 + y^2 = 1$  i la circumferència  $\mathcal{C}$ ,  $P = t(P')$  ha de satisfer l'equació  $\Theta$  substituint en  $\frac{1}{4} \cdot (x - 3)^2 + y^2 = 1$ , i.e.

$$\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} - 3 \right)^2 + \left( \frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} \right)^2 = 1;$$

$$\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{(x')^2}{[(x')^2 + (y')^2]^2} - \frac{6x'}{(x')^2 + (y')^2} + 9 \right) + \frac{(y')^2}{[(x')^2 + (y')^2]^2} = 1;$$

multiplicant tot per  $4 \cdot [(x')^2 + (y')^2]^2$

$$(x')^2 - 6x' \cdot [(x')^2 + (y')^2] + 4(y')^2 = 4 \cdot [(x')^2 + (y')^2]^2 - 9 \cdot [(x')^2 + (y')^2]^2;$$

desenvolupant l'expressió obtenim

$$(x')^2 - 6(x')^3 - 6(x')(y')^2 + 4(y')^2 = -5(x')^4 - 10(x')^2(y')^2 - 5(y')^4;$$

i agrupant termes

$$5(x')^4 + 5(y')^4 + 10(x')^2(y')^2 - 6(x')^3 - 6(x')(y')^2 + (x')^2 + 4(y')^2 = 0.$$

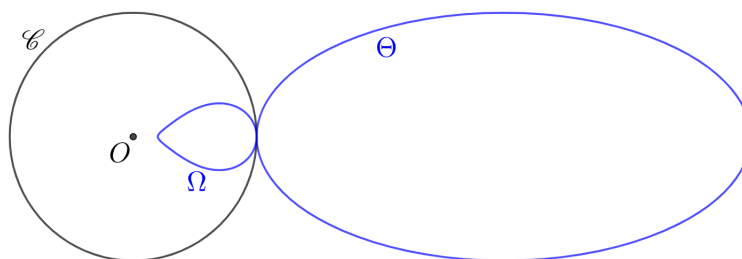


Figura 1.16: Inversió d'el·lipses.

Efectivament, la imatge és semblant a les dues anteriors còniques, però recordem que no són iguals. A més, cal destacar que hem fet un cas concret de l'el·lipse perquè hi hagi aquesta similitud, perquè hi ha altres cassos que no s'assemblen gaire a la imatge de les còniques anteriors.



Al cap i a la fi, l'el·lipse és a una secció cònica (com totes les anteriors) implicant que totes aquestes presentin propietats semblants. De fet, l'el·lipse és una circumferència aplatada que fa l'efecte que els extrems aplatats siguin paràboles o hipèrboles que s'uneixen simètricament. Per aquest fet, i, en aquest cas forçat, obtenim la imatge d'una gota.

Ara passarem a veure quina expressió comuna podem obtenir en fer la inversió d'una el·lipse qualsevol.

Suposem que l'equació d'una el·lipse amb centre  $(h, k)$  i semieixos  $a, b$  tal que  $a, b, h, k \in \mathbb{R}$  és la següent:

$$E : \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

que desenvolupant quadrats obtenim que

$$\frac{x^2 - 2hx + h^2}{a^2} + \frac{y^2 - 2ky + k^2}{b^2} = 1.$$

Aleshores,  $P = t(P')$  ha de satisfer l'equació  $E$  substituint en  $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ , i.e.

$$\frac{1}{a^2} \left( \frac{(x')^2}{[(x')^2 + (y')^2]^2} - \frac{2h(x')}{(x')^2 + (y')^2} + h^2 \right) + \frac{1}{b^2} \left( \frac{(y')^2}{[(x')^2 + (y')^2]^2} - \frac{2k(y')}{(x')^2 + (y')^2} + k^2 \right) = 1;$$

multipliquem tot per  $[(x')^2 + (y')^2]^2$  i agrupem termes

$$\frac{(x')^2 + h [(x')^2 + (y')^2] [h [(x')^2 + (y')^2] - 2(x')]}{a^2} + \frac{(y')^2 + k [(x')^2 + (y')^2] [k [(y')^2 + (x')^2] - 2(y')]}{b^2} = [(x')^2 + (y')^2]^2.$$

Aquesta és l'expressió que obtenim per a la imatge de  $E$ . Es nota que si l'el·lipse es troba centrada en el centre d'inversió, i.e., quan  $h = 0$  i  $k = 0$ , l'expressió se simplifica al següent:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = [(x')^2 + (y')^2]^2.$$

Estudiem el cas quan  $a = b$ , que aleshores  $E$  és una circumferència. Si imposem que  $a = b$  i dividim tot per  $(x')^2 + (y')^2$  obtenim que

$$(x')^2 + (y')^2 = \frac{1}{a^2};$$

una circumferència de centre  $(0, 0)$  i de radi  $R = \frac{1}{|a|}$ .

Si es vol veure i manipular la inversió d'el·lipses deixo [aquí](#) la referència feta a GeoGebra per poder fer-ho.

## 1.5 Teorema de l'angle

Un cop mostrat diferents casuístiques de la inversió, anomenarem ara una altra propietat que compleix aquesta transformació, la dels angles.

Abans de mostrar el lemma següent definim com s'entenen els angles entre corbes. Es tracen les tangents a les corbes en el punt on concorren i es considera l'angle en sentit horari i antihorari. Aleshores, per a veure com actua la inversió sobre els angles, és suficient examinar que passa amb els angles entre les tangents corresponents.

### **Lemma 1.5.1** (Lemma de Simetria)

*Sigui  $\ell$  una recta que no passa pel punt  $O$ , sota la inversió respecte una circumferència  $\mathcal{C}$  amb centre  $O$ , la imatge de  $\ell$  és una circumferència  $\omega$  que conté a  $O$ , i la tangent a  $\omega$  en  $O$  és paral·lela a  $\ell$ .*

*Demostració.* Si dibuixem la recta  $m$  que passa pel punt  $O$  i és perpendicular a  $\ell$ , llavors  $\ell$  és simètric respecte a  $m$ . Anàlogament, la circumferència  $\omega$  és simètrica a  $m$  i, per tant,  $\ell$  és paral·lela a la tangent de  $\omega$  en  $O$ , ja que la recta  $m$  passa pel centre de  $\omega$ .

Ara considerem que ocorre amb l'angle entre dues rectes  $\ell_1$  i  $\ell_2$  que intersequen en un punt  $P$  diferent de  $O$ . Sota la inversió, les imatges de les rectes són dos cercles  $\omega_1$  i  $\omega_2$  que concorren en els punts  $O$  i  $P'$ , on  $P'$  és la imatge de  $P$ . Per a comparar l'angle de  $\ell_1$  i  $\ell_2$  en  $P$  amb l'angle de  $\omega_1$  i  $\omega_2$  en  $P'$ , primer el compararem amb l'angle que s'ha fet en  $O$ .

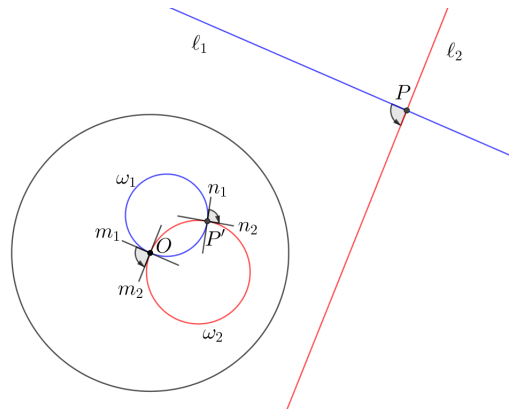


Figura 1.17: Angles semblants.

Pel Lemma de simetria,  $\ell_1$  és paral·lela a la tangent  $m_1$  a  $\omega_1$  en  $O$  i  $\ell_2$  a la tangent  $m_2$  a  $\omega_2$  en  $O$ . Aleshores, se segueix que l'angle de  $\ell_1$  amb  $\ell_2$  ha de ser igual en magnitud i sentit amb l'angle de  $m_1$  a  $m_2$ .

Un cop demostrat aquest angle, fixem-nos que aplicant la reflexió respecte a la recta que passa pels centres de  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , aquesta envia les tangents  $m_1$  i  $m_2$  en  $O$  cap a les tangents  $n_1$  i  $n_2$  en  $P'$ . Per tant, com la reflexió preserva magnituds, però canvia l'orientació, concloem que l'angle entre  $n_1$  i  $n_2$  en  $P'$  mesura el mateix que l'angle entre  $m_1$  i  $m_2$  en  $O$ , però canvia l'orientació. Per tant, l'angle en  $P'$  és d'igual magnitud, però de sentit contrari.  $\square$

Acabem amb el teorema següent.

**Teorema 1.5.2 (Teorema de l'angle)**

La inversió en un cercle preserva les magnituds dels angles entre corbes, però inverteix la seva orientació.

## 1.6 Relació amb la geometria Euclidiana

Per a acabar aquest capítol, anomenarem les relacions que té la geometria inversiva amb l'Euclidiana.

La definició de geometria inversiva és l'estudi de les propietats del grup de les inversions, que transforma circumferències o rectes en altres circumferències o rectes i preserva

la magnitud dels angles. Quan vam parlar sobre la inversió en el subapartat 1.1.1 vam mencionar que la inversió es pot considerar com la generalització de les reflexions respecte una recta o millor dit, en una circumferència generalitzada. Per tant, com una reflexió es pot interpretar com una inversió amb l'infinit, podem considerar que tota transformació Euclidiana es pot passar com a composició d'inversions i, llavors es pot considerar com una transformació inversiva.

Gràcies a aquesta relació podem observar que tota propietat que es manté en les transformacions inversives, es presenten de la mateixa manera en les transformacions Euclidianes. Aleshores, quan les figures en  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  són interpretades en  $\mathbb{R}^2$  totes les propietats inversives es converteixen en propietats Euclidianes.

D'aquesta manera, podem representar la relació entre les dues geometries com a dos conjunts on l'Euclidiana ( $E$ ) és continguda en la inversiva ( $I$ ),  $E \subset I$ . Això és pel fet que en ignorar el punt  $\infty$  el grup  $E$  es pren com a un subgrup del grup  $I$ .

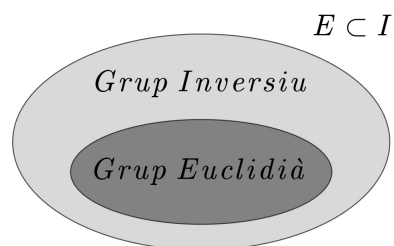


Figura 1.18: Conjunt de geometria Euclidiana i inversiva.

**OBSERVACIÓ 1.6.1.** Com el subgrup  $E$  és més petit que l' $I$ , l' $E$  tindrà més propietats que el  $I$ ; e.g. la longitud és una propietat Euclidiana, però no inversiva.

# Capítol 2

## Inversions com a transformacions

En aquest nou capítol deixarem a un costat el pla cartesià i introduïrem la inversió en el pla complex estès. D'aquesta manera, les propietats demostrades i aplicades en l'anterior capítol es faran servir en aquest nou per a intentar trobar de noves.

### 2.1 Extensió del pla complex

Considerant que en afegir el punt de l'infinit ens fa precisa la transformació inversiva, definirem el següent pla:

**Definició 2.1.1.** *S'anomena pla complex estès al conjunt de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}i) \cup \{\infty\} = \{(a, bi), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\} \cup \{\infty\}$ .*

**OBSERVACIÓ 2.1.2.** Podrem trobar notat el pla complex estès de les següents maneres:

$$\mathbb{C}_\infty, \widehat{\mathbb{C}}, \overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

A partir d'aquest capítol del TdR, treballarem progressivament amb aquest pla. A més a més, per tal de tenir una visualització de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , ara establim una correspondència un-un entre aquest pla i l'*Esfera de Riemann*.

### 2.2 Esfera de Riemann

Quan vam afegir-hi el punt a l'infinit al capítol anterior, vam considerar les rectes com a circumferències de diàmetre infinit per donar una generalització a l'efecte de les inversions aplicades a rectes i circumferències. Però, no és gens senzill visualitzar una recta com

una circumferència generalitzada, ja que les parts finals de la recta semblen ser infinitament allunyats. Fins i tot, és difícil imaginar-se on es troba, relatiu a  $\mathbb{C}$ , el punt a l'infinit.

Tot i això, existeix una interpretació del pla complex estès on el punt a l'infinit es troba com un punt real! Considerem que el pla complex  $\mathbb{C}$  és una part de  $\mathbb{R}^3$  amb els eixos reals i imaginaris alineats al llarg de l'eix-x i eix-y, respectivament. Llavors, cada nombre complex  $x + yi$  serà representat com el punt  $(x, y, 0)$  en el pla  $(x, y)$ .

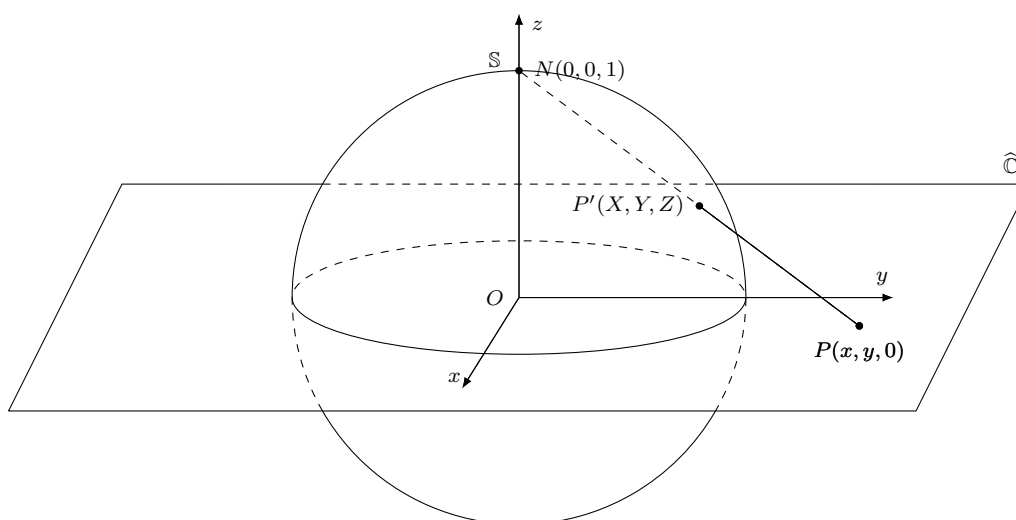


Figura 2.1: Esfera de Riemann,  $\mathbb{S}$

Seguidament, dibuixem l'esfera  $\mathbb{S}$  de radi 1 amb centre a l'origen la qual anomenarem *Esfera de Riemann*. Per analogia amb la Terra, ens referirem al punt  $N = (0, 0, 1)$  a la part superior de l'esfera, com al *Pol Nord* de  $\mathbb{S}$ , i al punt  $S = (0, 0, -1)$ , a la part inferior de l'esfera, com al *Pol Sud* de  $\mathbb{S}$ .

Cada recta que uneix un punt  $P$  del pla complex amb el Pol Nord interseca a l'*Esfera de Riemann* en un punt  $P'$  i viceversa. Seguint aquest mètode obtenim una correspondència un-un entre tots els punts  $P$  del pla complex estès i els punts  $P'$  de l'esfera menys el Pol Nord. L'únic punt en l'esfera que no es pot associar amb un punt del pla complex és el Pol Nord  $N$ .

Vegem, llavors, que cada vegada que el punt  $P'$  en l'esfera s'apropa més a  $N$ , el seu punt corresponent, a  $P$ , en el pla, s'allunya cada cop més de l'esfera. Per aquest fet, associem

el Pol Nord  $N$  amb el punt  $\infty$  en el pla complex estès.

### 2.2.1 Projecció estereogràfica

La funció  $\phi : \mathbb{S} \mapsto \widehat{\mathbb{C}}$ , que envia els punts de l'*Esfera de Riemann* als seus punts associats amb el pla complex estès, es diu projecció estereogràfica. Com  $\phi$  és una correspondència un-un, se segueix que podem utilitzar l'*Esfera de Riemann* com una visualització convenient del pla complex estès  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

De fet, podem trobar una fórmula  $(X, Y, 0)$  de  $\mathbb{R}^3$  per a la projecció estereogràfica del punt  $(X, Y, Z)$  de l'*Esfera de Riemann* sobre el punt  $z = x + yi$ .

#### Teorema 2.2.1 (Projecció Estereogràfica)

Sigui  $\phi$  la notació del mapatge de l'*Esfera de Riemann*  $\mathbb{S}$  cap a  $\widehat{\mathbb{C}}$  donat per la projecció estereogràfica. Aleshores, la projecció estereogràfica del punt  $(X, Y, Z)$  de  $\mathbb{S}$  cap al punt  $z = x + yi$  de  $\widehat{\mathbb{C}}$  és expressada per

$$\phi(X, Y, Z) = \frac{X}{1 - Z} + \frac{Y}{1 - Z}i.$$

També, el mapatge invers és definit per

$$\phi^{-1}(x + yi) = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

**OBSERVACIÓ 2.2.2.** Utilitzem les lletres majúscules per a notar les coordenades dels punts en  $\mathbb{R}^3$ , i les lletres minúscules per notar els punts o coordenades del pla complex.

*Demostració.* Per tal de demostrar aquest mapatge considerarem el punt invers, que es troba a sobre de la superfície de  $\mathbb{S}$ , separat de les seves components. D'aquesta manera treballarem únicament per un sol pla, i així podrem trobar relacions entre components sense complicar les operacions.

Aleshores, suposem que tenim un punt  $P(x, y, 0)$  i el seu invers  $P'(X, Y, Z)$ . Ubicant-nos ara en el pla- $(y, z)$  notem que el punt  $P_y = (0, y, 0)$  dona una component a  $P$ . A més, el punt invers de  $P_y$ , i.e.  $P'_y = (0, Y, Z)$ , que cau en  $\mathbb{S}$ , dona component a  $P'$ . Cal destacar que la component  $Z$  no és la que es dona als punts  $P$  i  $P'$ , sinó la  $y$  i  $Y$ , respectivament.

El pla- $(x, z)$  presentarà la mateixa analogia que el pla- $(y, z)$ , però amb la component  $x$ .

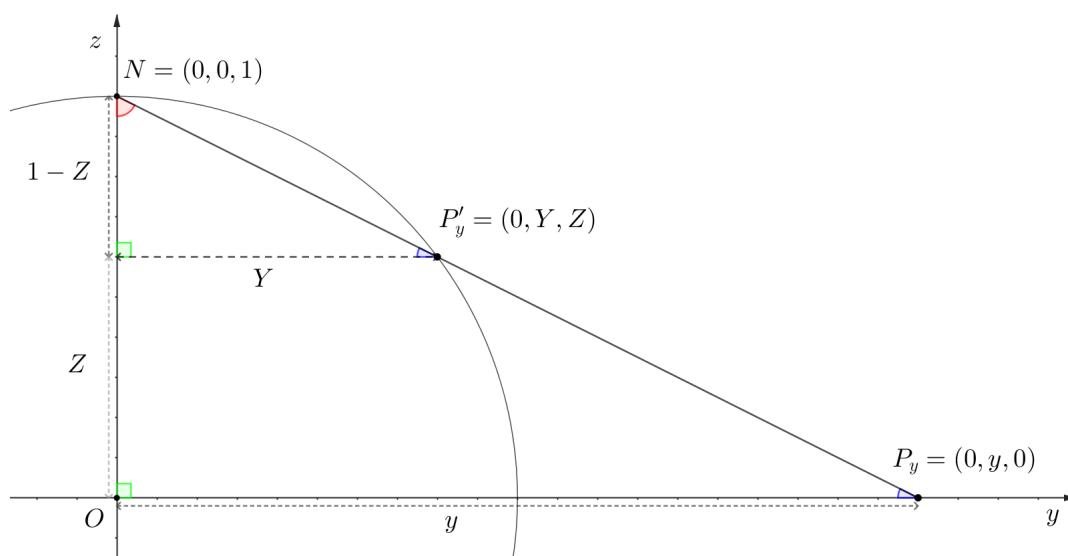


Figura 2.2: Secció de  $\mathbb{S}$ .

Comprovem que els triangles que es fan són semblants i pel Teorema de Tales es veu que

$$\frac{1 - Z}{Y} = \frac{1}{y} \implies Y = y(1 - Z).$$

De la mateixa manera si considerem el pla- $(x, z)$  pel mateix teorema traiem que

$$\frac{1 - Z}{X} = \frac{1}{x} \implies X = x(1 - Z).$$

Fixem-nos que el punt  $z = x + yi$  ara es podrà expressar en  $\mathbb{S}$  com  $\phi(X, Y, Z) = \frac{X}{1-Z} + \frac{Y}{1-Z}i$ . Així, suposant que sempre treballarem amb una Esfera de Riemann de radi unitari i centre  $O(0, 0, 0)$ , llavors l'expressió de  $\mathbb{S}$  serà  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ . I si substituïm les relacions de  $X$  i  $Y$  en l'equació de  $\mathbb{S}$  obtenim que

$$x^2(1 - Z)^2 + y^2(1 - Z)^2 + Z^2 = 1;$$

$$x^2(1 - Z)^2 + y^2(1 - Z)^2 = 1 - Z^2 = (1 - Z)(1 + Z);$$

que si dividim tot per  $1 - Z$ , ja que  $Z$  no podrà valer 1, però sí pot arribar a ser molt pròxim, vegem

$$x^2(1 - Z) + y^2(1 - Z) = 1 + Z,$$

ara si operem i aïllem la  $Z$  cap a un costat, la tindrem en funció de les components de  $P$ , i.e.,

$$x^2 - x^2Z + y^2 - y^2Z = 1 + Z;$$



$$x^2 + y^2 - 1 = Z(x^2 + y^2 + 1);$$

dividint per  $x^2 + y^2 + 1$ , acabem amb

$$Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Substituint  $Z$  en  $X$  i  $Y$ , obtenim que

$$X = x \left( 1 - \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) = x \left( \frac{x^2 + y^2 + 1 - x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1};$$

i que

$$Y = y \left( 1 - \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) = y \left( \frac{x^2 + y^2 + 1 - x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Es conclou, llavors que  $P' = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)$  □

## 2.2.2 Comportament sobre $\mathbb{S}$

En la projecció estereogràfica, existeix una distorsió de la distància entre punts. És a dir, quan dos punts estan a prop en  $\mathbb{S}$ , s'obté que les seves imatges poden estar ben a prop, o bastant separades.

### Teorema 2.2.3

Si dos punts es troben pròxims en  $\mathbb{S}$ , llavors, en aplicar la projecció estereogràfica, aquests poden trobar-se molt distants o pròxims en  $\widehat{\mathbb{C}}$

*Demostració.* Suposem que tenim una circumferència  $\omega_1$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$  centrada en  $O$ —el centre de l'Esfera de Riemann—i amb un radi més gran que el de  $\mathbb{S}$ . Aleshores, si apliquem la projecció estereogràfica a  $\omega_1$ , obtenim una circumferència concèntrica,  $\omega_2$ , en la superfície de  $\mathbb{S}$ . Per tant, com el radi de  $\omega_1$  és més gran que el de  $\omega_2$ , les distàncies entre punts cíclics també ho seran quan el radi sigui més gran i més petites quan el radi sigui més petit. Aleshores es compleix el següent:

Si dos punts  $A$  i  $B$ , amb imatges  $A'$  i  $B'$ , formen  $\omega_1$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , les seves imatges formaran, llavors, la circumferència concèntrica,  $\omega_2$ , en la superfície  $\mathbb{S}$  presentant la propietat de

$$R_{\omega_1} \geq R_{\omega_2} \implies d(A, B) \geq d(A', B').$$

El cas on  $R_{\omega_1} = R_{\omega_2}$  és pel possible fet quan els radis siguin els mateixos i per tant, les distàncies entre els seus punts cíclics també. □

Ara mostrem que ocorre amb una recta  $\ell$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Considerem un punt  $P$  en la recta  $\ell$ .

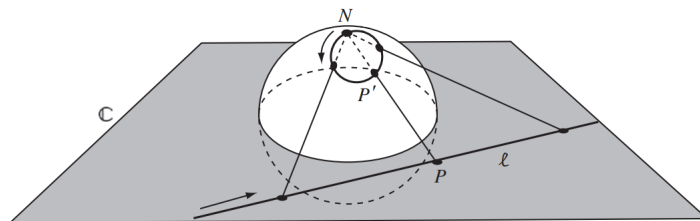


Figura 2.3: Inversió de recta  $\ell$  respecte a  $\mathbb{S}$ , extret de [2, pàg. 292]

A mesura que  $P$  es va desplaçant al llarg de  $\ell$ , el segment que uneix  $P$  amb el Pol Nord, traçarà les imatges,  $P'$ , formant el lloc geomètric d'una circumferència. Tot i això, aquesta nova circumferència situada en la superfície de  $\mathbb{S}$  tindrà un forat, estarà puntejada en el Pol Nord. Per omplir aquest buit, afegirem el punt de l'infinit a la recta  $\ell$ ; obtenint així la recta estesa  $\ell \cup \{\infty\}$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Gràcies al punt  $\infty$ , en l'esfera,  $N$  omplirà el forat de la circumferència. Per tant, la circumferència passarà per  $N$ . Per aquest fet, obtenim el següent teorema:

#### Teorema 2.2.4

Sota la projecció estereogràfica en l'*Esfera de Riemann*, les imatges de circumferències en  $\mathbb{S}$  són circumferències generalitzades en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Concretament, circumferències en  $\mathbb{S}$  que passen per  $N$  tenen com a imatges rectes esteses en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , i circumferències que no passen per  $N$  tenen com a imatges circumferències en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

*Demostració.* Una circumferència en l'Esfera de Riemann és un la intersecció d'aquesta,  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$  amb el pla  $aX + bY + cZ + d = 0$ , on  $a, b, c, d$  són nombres reals i no tots zero. Substituint

$$X = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad Y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \quad \text{i} \quad Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

en  $aX + bY + cZ + d = 0$ , obtenim

$$2ax + 2by + c(x^2 + y^2 - 1) + d(x^2 + y^2 + 1) = 0;$$

$$x^2(c+d) + 2ax + y^2(c+d) + 2by + (d-c) = 0.$$

Si la imatge d'una circumferència en  $\mathbb{S}$  que passa per  $N$  és una circumferència generalitzada en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , llavors, el punt  $(0, 0, 1)$  ha d'estar contingut en el pla  $aX + bY + cZ + d = 0$ . D'aquesta manera veiem que  $c + d = 0$ . En aplicar aquesta condició a l'anterior expressió, observem el següent

$$2ax + 2by + d - c = 0$$

i aïllant la  $y$  cap a un costat,

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c-d}{2b}.$$

Com es pot apreciar, s'obté una recta en el pla complex estès.

**OBSERVACIÓ 2.2.5.** Notem que aplicant la derivada tindrem l'expressió del pendent de la imatge.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}.$$

En canvi, si tenim una circumferència en l'Esfera de Riemann que no passa per  $N$ , llavors, el nou lloc geomètric és una circumferència en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , i.e.

$$x^2(c+d) + 2ax + y^2(c+d) + 2by + (d-c) = 0,$$

dividint per  $(c+d)$

$$x^2 + \frac{2a}{c+d}x + y^2 + \frac{2b}{c+d}y + \frac{d-c}{c+d} = 0,$$

i completant els quadrats,

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{2a}{c+d}x + \left(\frac{a}{c+d}\right)^2 + y^2 + \frac{2b}{c+d}y + \left(\frac{b}{c+d}\right)^2 &= \frac{c-d}{c+d} + \frac{a^2+b^2}{(c+d)^2}, \\ \left(x + \frac{a}{c+d}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{c+d}\right)^2 &= \frac{a^2+b^2+c^2-d^2}{(c+d)^2}. \end{aligned}$$

Per tant, concloem que ens sortirà una circumferència de centre  $\left(-\frac{a}{c+d}, -\frac{b}{c+d}\right)$  i radi  $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-d^2}}{|c+d|}$ .  $\square$

Arribats en aquest punt, descrivim que passa amb les rectes de latitud i longitud en l'Esfera de Riemann sota la projecció estereogràfica.

Una recta de longitud és una circumferència en  $\mathbb{S}$  que passa pel Pol Nord i pel Pol Sud de  $\mathbb{S}$ . Aquesta es projecta en una recta que passa per l'origen del pla  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Però, una recta

de latitud és una circumferència en l'*Esfera de Riemann* amb una alçada constant sobre el pla- $(x, y)$ . A més, la seva imatge serà una circumferència centrada a l'origen del pla (aquestes circumferències són concèntriques com en l'exemple del Teorema 2.2.3).

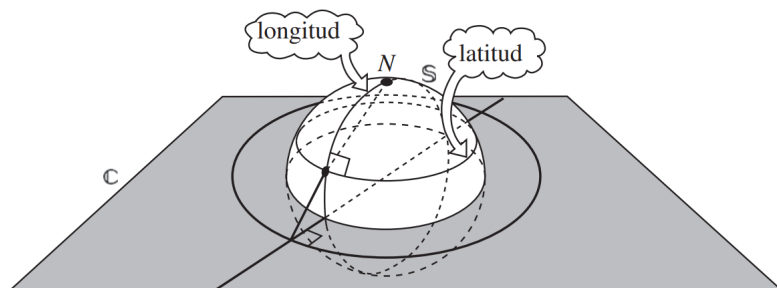


Figura 2.4: Transformació inversiva de rectes de la latitud i la longitud de  $\mathbb{S}$ , extret de [2, pàg. 293]

### 2.2.3 Conformalitat i orientació

Només les rectes de latitud i longitud s'intersequen en angles rectes a l'esfera, i les seves imatges també. Aleshores, mencionem el següent teorema.

#### Teorema 2.2.6

La projecció estereogràfica preserva la magnitud dels angles.

*Demostració.* Considerem la funció

$$f(x, y) = \frac{1}{\kappa}(2x, 2y, x^2 + y^2 - 1) \quad \text{on} \quad \kappa = x^2 + y^2 + 1.$$

Ara afirmem que

$$\langle De_1f, De_2f \rangle = 0 \quad \text{i} \quad |De_1f| = |De_2f| = \frac{2}{\kappa};$$

on  $e_i$  és una base canònica que ens implica que  $f$  és conforme.

Si la funció compleix les dues propietats anteriors, llavors, i només llavors, la projecció

estereogràfica preserva les magnituds dels angles. Per tant, comprovem-ho:

$$\begin{aligned}
 De_1f &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\kappa}(2, 0, 2x) + (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1)(-2x)\kappa^{-2} \\
 &= \frac{2}{\kappa^2}(\kappa - 2x^2, -2xy, x\kappa - x(\kappa - 2)) \\
 &= \frac{2}{\kappa^2}(\kappa - 2x^2, -2xy, x(\kappa - \kappa + 2)) \\
 &= \frac{2}{\kappa^2}(x^2 + y^2 + 1 - 2x^2, -2xy, 2x) \\
 &= \frac{2}{\kappa^2}(-x^2 + y^2 + 1, -2xy, 2x) \\
 \implies De_1f &= \frac{2}{\kappa^2}(-x^2 + y^2 + 1, -2xy, 2x)
 \end{aligned}$$

Per simetria,  $De_2f = \frac{2}{\kappa^2}(-2xy, x^2 - y^2 + 1, 2y)$ . Determinem ara  $\langle De_1f, De_2f \rangle$ :

$$\begin{aligned}
 \langle De_1f, De_2f \rangle &= \frac{4}{\kappa^4}[-2xy(-x^2 + y^2 + 1) - 2xy(x^2 - y^2 + 1) + 4xy] \\
 &= \frac{4}{\kappa^4}[-2xy - 2xy + 4xy] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Comprovem a més si  $|De_1f| = |De_2f| = \frac{2}{\kappa}$

$$\begin{aligned}
 |De_1f| &= \frac{2}{\kappa^2} \sqrt{(-x^2 + y^2 + 1)^2 + (-2xy)^2 + (2x)^2} \\
 &= \frac{2}{\kappa^2} \sqrt{x^4 + y^4 + 1 - 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 + 4x^2y^2 + 4x^2} \\
 &= \frac{2}{\kappa^2} \sqrt{x^4 + y^4 + 1 + 2x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2} \\
 &= \frac{2}{\kappa^2} \sqrt{\kappa^2} \\
 &= \frac{2}{\kappa^2} \kappa \\
 &= \frac{2}{\kappa}
 \end{aligned}$$

i com  $De_2f$  és simètric tindrà el mateix mòdul i hem acabat.  $\square$

Ara bé, una propietat interessant per a determinar és la del sentit dels angles que mantindrà la nova imatge.

### **Teorema 2.2.7**

La projecció estereogràfica inverteix l'orientació dels angles.

*Demostració.* Considerant la funció i les propietats anteriors, ara afegirem un altre vector per a orientar-nos i veure que succeeix amb l'invers.

Aleshores, fem el producte vectorial entre  $e_1$  i  $e_2$

$$e_1 \wedge e_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} = (0, 0, 1).$$

Aquest vector ens diu que l'hem de mirar des de dalt.

Seguidament, passem a determinar el vector  $De_1f(P) \wedge De_2f(P)$ , per a qualsevol punt  $P = (p_1, p_2)$

$$\begin{aligned} De_1f(P) \wedge De_2f(P) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x^2 + y^2 + 1 & -2xy & 2x \\ -2xy & x^2 - y^2 + 1 & 2y \end{vmatrix} \frac{4}{\kappa^4} = \\ &= \left[ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -2xy & 2x \\ x^2 - y^2 + 1 & 2y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} \\ -x^2 + y^2 + 1 & 2x \\ -2xy & 2y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{k} & \vec{i} \\ -x^2 + y^2 + 1 & -2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 + 1 \end{vmatrix} \right] \frac{4}{\kappa^4} = \\ &= \left[ -4xy^2\vec{i} - (2x^3 - 2xy^2 + 2x)\vec{i} - (-2x^2y + 2^3 + 2y)\vec{j} - 4x^2y\vec{j} \right] \frac{4}{\kappa^4} + \\ &\quad \left[ (-x^4 + x^2y^2 - x^2 + x^2y^2 - y^4 + y^2 + x^2 - y^2 + 1)\vec{k} - 4x^2y^2\vec{k} \right] \frac{4}{\kappa^4} = \\ &= \left[ (-4xy^2 - 2x^3 + 2xy^2 - 2x)\vec{i} + (2x^2y - 2y^3 - 2y - 4x^2y)\vec{j} \right] \frac{4}{\kappa^4} + \\ &\quad \left[ (-x^4 + 2x^2y^2 - y^4 + 1 - 4x^2y^2)\vec{k} \right] \frac{4}{\kappa^4} = \\ &= \left[ (-2x^3 - 2xy^2 - 2x)\vec{i} + (-2y^3 - 2x^2y - 2y)\vec{j} + (-x^4 - 2x^2y^2 - y^4 + 1)\vec{k} \right] \frac{4}{\kappa^4} = \\ &= \left[ -2x(x^2 + y^2 + 1)\vec{i} - 2y(y^2 + x^2 + 1)\vec{j} - ((x^2 + y^2)^2 - 1)\vec{k} \right] \frac{4}{\kappa^4} = \\ &= \left[ (-2x\kappa)\vec{i} + (-2y\kappa)\vec{j} - \kappa(x^2 + y^2 - 1)\vec{k} \right] \frac{4}{\kappa^4} = \\ &= \left[ -2x\vec{i} - 2y\vec{j} - (x^2 + y^2 - 1)\vec{k} \right] \frac{4}{\kappa^3} \\ &\implies \boxed{De_1f(P) \wedge De_2f(P) = \frac{-4}{\kappa^3}(2x, 2y, x^2 + y^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Veiem llavors que  $De_1f(P) \wedge De_2f(P)$  és un vector amb la mateixa direcció que  $f(P)$ , però amb constant negativa. Això vol dir que té sentit contrari a la direcció radial de

l'esfera, és a dir, va cap endins. Per aquest fet, es determina que la orientació de l'esfera induïda per  $f$  és des de dins d'aquesta.

Per tant, notem que la orientació es preserva si mirem el pla des de dalt i l'esfera des de dins,

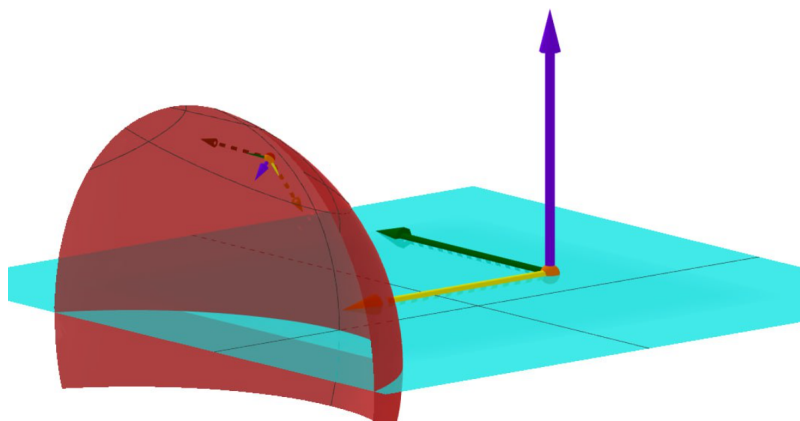


Figura 2.5: Orientació des de dins de  $\mathbb{S}$ .

i no es preserva si agafem la orientació de mirar l'esfera des de fora.

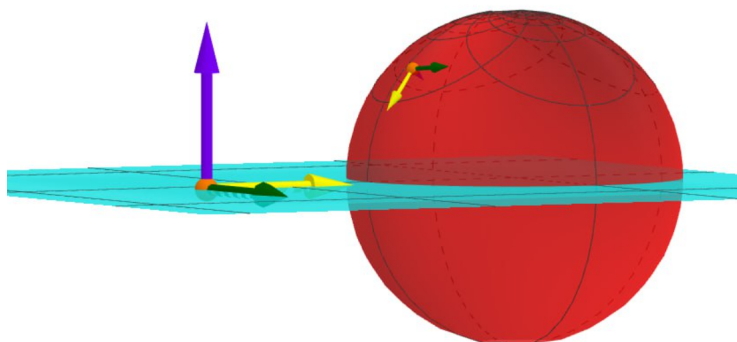


Figura 2.6: Orientació des de fora de  $\mathbb{S}$ .

Lo més natural per a nosaltres és el segon cas, mirar-la des de fora i, aleshores, la projecció estereogràfica vista des d'aquesta perspectiva, invertirà la orientació dels angles.

**OBSERVACIÓ.** El vector, del pla, de color lila és producte del producte vectorial dels vectors  $e_1$  i  $e_2$ , verd i groc, respectivament. Les imatges d'aquests vectors del pla són les que es troben a  $\mathbb{S}$ .

□

Una altra manera de demostrar aquesta propietat és considerant que l'esfera de Riemann és una varietat complexa de dimensió  $d = 1$ . No farem els càlculs, però si donarem la idea.

*Demostració.* S'agafen dos candidats a carta que recobreixen  $\mathbb{S}$ , projecció estereogràfica des del Pol Nord i Pol Sud, i veiem si són compatibles. En aquest cas concret no ho seran, però si canviem la primera per la projecció estereogràfica des del Pol Nord del conjugat i comprovem la compatibilitat de nou, veurem que ho són. Aleshores, haurem establert que l'esfera de Riemann és una varietat complexa. En conseqüència, la projecció estereogràfica per aquestes dues plaques serà antiholomorfa.

Si la projecció estereogràfica és una funció antiholomorfa complirà les equacions de Cauchy-Riemann, però alterades:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Així, comprovant el signe del jacobiana

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 < 0;$$

veiem que aquest és estrictament negatiu complint, per tant, que la orientació del pla tangent serà invertida. □

**OBSERVACIÓ.** Cal destacar que tant en aquesta demostració i en l'anterior s'ha observat des de casos concrets per tal que la propietat d'anticonformitat es compleixi. No obstant això, hi ha casos en que la projecció estereogràfica només serà conforme des de diferents perspectives.

## 2.3 Transformacions de Möbius

Les transformacions de Möbius són representacions algebraiques de les transformacions inversives que ajuden a abordar problemes algebraics que es poden trobar a la geometria



inversiva.

**Definició 2.3.1.** Donats  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  amb la restricció que  $ad - bc \neq 0$ . Anomenem transformació de Möbius a la funció bijectiva  $M : \mathbb{C}_\infty \mapsto \mathbb{C}_\infty$  amb la forma

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Si  $c \neq 0$ , definim  $M(\infty) = a/c$  i  $M(-d/c) = \infty$ ; però si  $c = 0$ , definim  $M(\infty) = \infty$ .

La propietat que  $ad - bc \neq 0$  ve donada pel fet que la funció no sigui constant, o bé que depengui de  $z$ . Això es demostra de la següent manera.

*Demostració.* Una funció serà constant quan la seva derivada sigui igual a 0. Per tant, per a que la transformació de Möbius no ho sigui,  $M'(z) \neq 0$ , i.e.

$$\begin{aligned} M'(z) &= \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{acz + ad - acz - ab}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0 \\ &\implies ad - bc \neq 0 \end{aligned}$$

□

**OBSERVACIÓ 2.3.2.** Una propietat interessant que presenta la transformació de Möbius és la de conformitat, és a dir, si preserva els angles i no necessàriament les longituds. La transformació de Möbius serà conforme si, i només si la seva derivada és diferent de 0:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

Per un costat sabem que  $ad - bc \neq 0$ , però per l'altre, quan  $cz + d = \infty$ , llavors no s'assolirà la propietat de conformitat. Per tant, es conclou que  $M$  serà conforme a  $\mathbb{C}$  i no a  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

A més a més, per a demostrar que  $M$  és una transformació bijectiva, s'ha de demostrar que és injectiva i sobrejectiva.

Per a demostrar la primera suposem que si  $M(z_1) = M(z_2)$ , llavors s'obté que

$$\begin{aligned} \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} &= \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}; \\ (az_1 + b)(cz_2 + d) &= (az_2 + b)(cz_1 + d). \end{aligned}$$

Operant, tenim que

$$(ac)z_1z_2 + (ad)z_1 + (bc)z_2 + bd = (ac)z_1z_2 + (ad)z_2 + (bc)z_1 + bd;$$

$$ad(z_1 - z_2) - bc(z_1 - z_2) = 0;$$

$$(z_1 - z_2)(ad - bc) = 0.$$

I com  $ad - bc \neq 0$ , es pot dividir tot per  $ad - bc$ , obtenint així que  $z_1 = z_2$ . Per tant,  $M$  és una transformació injectiva.

D'altra banda, per a demostrar la segona propietat, hem de veure que si es té un nombre  $q \in \mathbb{C}_\infty$ , aleshores, existeix un nombre de  $z \in \mathbb{C}_\infty$  pel qual  $q = M(z)$ . I.e.

$$q = \frac{az + b}{cz + d};$$

multiplicant per  $cz + d$ , obtenim que

$$cqz + dq = az + b;$$

$$z(cq - a) = b - dq;$$

i dividint tots dos membres per  $cq - a$  queda l'expressió següent

$$z = -\frac{dq - b}{cq - a}.$$

Per tant,  $M$  és sobrejectiva.

Amb aquestes demostracions es conclou que les transformacions de Möbius són bijectives.

**OBSERVACIÓ 2.3.3.** Es pot observar que si  $M$  és una funció bijectiva, llavors existeix una transformació inversa  $M$  que permet portar el pla  $q$  de nou al pla  $z$ . Així, es comprova que per a cada  $M$ , existeix una inversa expressada com a

$$M(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

### 2.3.1 Representació matricial

Una altra característica rellevant de la transformació de Möbius és la seva vinculació amb les matrius dimensió  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ . Si es considera una matriu complexa no singular  $A$  de dimensió  $2 \times 2$ , es pot utilitzar els coeficients  $a, b, c, d$  d'aquesta matriu per a construir la transformació  $M$ . A més a més, el conjunt de matrius  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$  complexes no singulars en relació amb la multiplicació de matrius forma el "Grup General Lineal"  $GL(2, \mathbb{C})$ .

Aquesta construcció defineix una correspondència  $\varphi : GL(2, \mathbb{C}) \mapsto \mathcal{M}$  que es dona explícitament per

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto M, \quad M(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

### 2.3.2 Inverses de Möbius

En mostrar la propietat bijectiva de les transformacions de Möbius i la seva representació matricial, es pot notar l'expressió de la seva inversa de la següent forma

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Podem afegir que, com aquesta transformació té inversa, llavors, la identitat és  $M \times M^{-1} = I$ . Que amb matrius s'obté el resultat següent:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \frac{1}{ad - bc} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \frac{1}{ad - bc} = \begin{pmatrix} \frac{ad - bc}{ad - bc} & 0 \\ 0 & \frac{ad - bc}{ad - bc} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aleshores, es conclou amb el teorema següent

#### Teorema 2.3.4

Tota transformació de Möbius  $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  amb  $ad - bc \neq 0$ , té com a inversa una altra transformació de Möbius

$$M^{-1} = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

### 2.3.3 Homomorfisme de transformacions de Möbius

Una altra propietat que tenen les transformacions de Möbius amb  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$  és que el mapatge de  $\varphi$  és un homomorfisme del grup amb la multiplicació  $GL(2, \mathbb{C})$  al grup amb la composició  $\mathcal{M}$  de mapes de Möbius.

*Demostració.* Sigui  $A$  i  $B$  dues transformacions de Möbius amb coeficients  $(a, b, c, d)$  i  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , respectivament llavors es vol demostrar que fer la composició  $A \circ B$  és equivalent a la multiplicació de les seves respectives matrius de mida  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ . Per tant, com  $A = \frac{az + b}{cz + d}$  i  $B = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ ,

$$A \circ B = \frac{a \left( \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right) + b}{c \left( \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right) + d} = \frac{\frac{a\alpha z + a\beta + b\gamma z + b\delta}{\gamma z + \delta}}{\frac{c\alpha z + c\beta + d\gamma z + d\delta}{\gamma z + \delta}};$$

i com  $\gamma z + \delta \neq 0$ ,

$$A \circ B = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}.$$

Després d'obtenir la composició, ara es veurà a què equival el producte de les matrius de  $A$  i  $B$ . Les respectives matrius són les següents:  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ . Aleshores,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}.$$

Per últim, en aplicar la correspondència  $\varphi$  a la matriu  $A \cdot B$ , es pot concloure que  $A \circ B = \varphi(A \cdot B)$ . □

Amb la demostració on  $\varphi$  és un homomorfisme, es dedueix que com  $A \circ B = \varphi(A \cdot B)$ , aleshores, el grup  $\mathcal{M}$  és semblant al subgrup  $SL(2, \mathbb{C})$  del grup  $GL(2, \mathbb{C})$ . Aquest subgrup és conegut com el "Grup Lineal Especial" de matrius  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$  amb elements complexos.

## 2.4 Teorema fonamental de la geometria inversiva

Després d'introduir les transformacions de Möbius, apliquem-les en propietats importants.

Cada circumferència generalitzada en  $\widehat{\mathbb{C}}$  és definida únicament per tres punts que la continguin. Però bé, si els punts no són cíclics, és a dir, es troben alineats en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , llavors aquests formaran una única recta. D'altra banda, si ho són, llavors, correspondran a una única circumferència en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . L'estratègia utilitzada per a definir la imatge d'una circumferència generalitzada és la següent:

I. Anotar  $z_1, z_2$  i  $z_3$  en  $\Gamma$ ;

II. Formalitzar les imatges  $t(z_1), t(z_2)$  i  $t(z_3)$ ;

III. Analitzar que  $t(\Gamma)$  és l'única circumferència generalitzada per aquests punts.

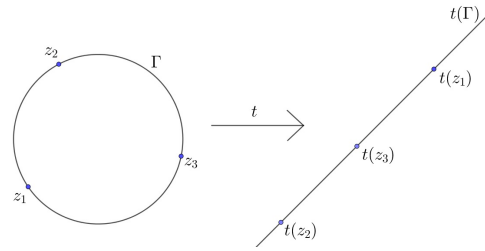


Figura 2.7: Estratègia per a  $\Gamma$ .

**Exemple 2.4.1**

Aplicarem, llavors l'estratègia sota  $t$ , una transformació inversiva definida per

$$t(z) = \frac{z - 2i}{z + 2}.$$

Com no hi ha cap norma per a escollir punts, prendrem el  $-2, 2i$  i  $2$ .

$$\therefore t(-2) = \infty; \quad t(2i) = 0 \quad \text{i} \quad t(2) = \frac{1}{2} \cdot (1 - i).$$

Per tant, la imatge de  $t$  és una circumferència generalitzada pels punts  $0, \infty$  i  $\frac{1}{2} \cdot (1 - i)$ .

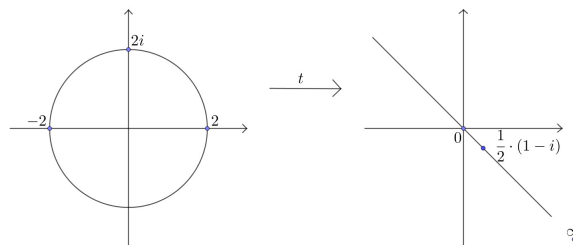


Figura 2.8: Estratègia per a  $t(z)$ .

**2.4.1 Representació de tres punts a tres punts**

Donada l'estratègia per a trobar la imatge d'un lloc geomètric a partir de tres punts observem el següent teorema.

**Teorema 2.4.2**

Per a tot  $z_1, z_2$  i  $z_3$  pertanyents en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , existeix una transformació de Möbius

$$M(z) = K \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

tal que enviï els punts  $z_1$  i  $z_3$  a 0 i  $\infty$ , respectivament. Aleshores, considerant  $z_2 = 1$ , per a obtenir  $K$  es trobarà la Transformació de Möbius.

Apliquem l'expressió en diferents casos:

**Problema 2.4.3.** A partir de tres punts mostrats avall, fórmula les seves transformacions de Möbius que enviïn aquests al 0, 1 i  $\infty$ , respectivament.

$$(a) -1, -3, 0 \quad (b) \frac{3}{2}, 2, 1 \quad (c) \infty, -3, 2 \quad (d) \frac{3}{2}, 2, \infty.$$

**Solució 2.4.4. (a)** Per a determinar que  $M(-1) = 0$  i  $M(0) = \infty$ , representem la transformació de Möbius amb la forma

$$M(z) = K \frac{z + 1}{z},$$

per a qualsevol nombre complex  $K$ . A més a més, tenim que  $M(-3) = 1$ , implicant-nos que

$$1 = K \frac{-3 + 1}{-3} \implies K = \frac{3}{2}.$$

Per tant, l'expressió de la transformació de Möbius per aquests tres punts és

$$M(z) = \frac{3z + 3}{2}.$$

**(b)** En aquest cas, per a determinar que  $M(\frac{3}{2}) = 0$  i  $M(1) = \infty$ , representem la transformació de Möbius amb la forma

$$M(z) = K \frac{z - \frac{3}{2}}{z - 1},$$

per a qualsevol complex  $K$ . Com  $M(2) = 1$  ens implica que

$$1 = K \frac{2 - \frac{3}{2}}{2 - 1} \implies K = 2.$$

$$\therefore M(z) = \frac{2z - 3}{2z - 2}.$$

(c) Per a determinar que  $M(\infty) = 0$  i  $M(2) = \infty$ , representem la transformació de Möbius amb la forma

$$M(z) = \frac{K}{z-2},$$

per a qualsevol complex  $K$ . A més a més, tenim que  $M(-3) = 1$ , implicant-nos el següent

$$1 = \frac{K}{-3-2} \implies K = -5.$$

$$\therefore M(z) = \frac{-5}{z-2}.$$

(d) En aquest últim cas, vegem que com  $M(\frac{3}{2}) = 0$  i  $M(\infty) = \infty$ , llavors  $M$  serà una recta estesa amb la forma

$$M(z) = K \left( z - \frac{3}{2} \right).$$

I com  $M(2) = 1$  ens implica que

$$1 = K \left( 2 - \frac{3}{2} \right) \implies K = 2.$$

$$\therefore M(z) = 2z - 3.$$

Tot seguit, amb aquestes estratègies concluïm amb un últim teorema

**Teorema 2.4.5** (Teorema Fonamental de la Geometria Inversiva)

Permetem que  $z_1, z_2, z_3$  i  $w_1, w_2, w_3$  siguin dos conjunts de tres punts a  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Aleshores, existeix una única transformació de Möbius  $M$  que mapeja  $z_1$  a  $w_1$ ,  $z_2$  a  $w_2$  i  $z_3$  a  $w_3$ .

La demostració d'aquest teorema es troba a [2, pàg. 327–329]. Només la citarem, ja que la necessitarem. A partir d'això, es dedueix una estratègia molt útil per a trobar mapatges.

**Estratègia 2.4.6.** Per a denotar la transformació de Möbius  $M$  que mapa els punts  $z_1, z_2, z_3$  als punts  $w_1, w_2, w_3$ , respectivament:

I) Trobar la transformació de Möbius  $M_1$  que mapi els punts  $z_1, z_2, z_3$  als  $0, 1, \infty$ , respectivament;

II) Trobar la transformació de Möbius  $M_2$  que mapi els punts  $w_1, w_2, w_3$  als  $0, 1, \infty$ , respectivament;

III) Avaluar  $M = M_2^{-1} \circ M_1$ .

Per a veure es comporta l'estratègia l'aplicarem en un cas específic.

**Problema 2.4.7.** Troba la transformació de Möbius  $M$  que envia els punts  $-1, i, 1$  als punts  $-1, -3, 0$ , respectivament.

**Solució 2.4.8.** Suposem que  $M_1$  envia els punts  $-1, i, 1$  a  $0, 1, \infty$ , respectivament, i anàlogament ocorre el mateix amb  $M_2$  i els punts  $-1, -3, 0$ . D'aquesta manera, per a què es compleixin les anteriors suposicions,  $M_1$  i  $M_2$  han de tenir les següents característiques:

$$M_1(z) = K_1 \frac{z+1}{z-1} \text{ i } M_2(z) = K_2 \frac{z+1}{z}.$$

A més, com  $M_1(i) = 1$  i  $M_2(-3) = 1 \implies K_1 = i$  i  $K_2 = \frac{3}{2}$ ;

$$\therefore M_1(z) = \frac{zi+i}{z-1} \text{ i } M_2(z) = \frac{3z+3}{2z}.$$

Però les seves matrius associades són les següents:

$$M_1 = \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ i } M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, en tenir ambdues matrius, ara podrem trobar la que ens permet enviar  $z_1, z_2, z_3$  a  $w_1, w_2, w_3$  respectivament, i.e.,  $M = M_2^{-1} \circ M_1$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-3 & 0+3 \\ -2i+3 & -3-2i \end{pmatrix} \implies M = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3-2i & -3-2i \end{pmatrix}.$$

Per tant, la transformació de Möbius buscada és  $M(z) = \frac{-3z+3}{(3-2i)z-3-2i}$ .

**OBSERVACIÓ 2.4.9.** Existeix una aplicació d'aquest teorema per a fer un mapeig de quatre punts d'una circumferència generalitzada a una altra. L'estratègia utilitzada és la mateixa que per a mapejar tres punts, trobant així una transformació de Möbius, i després afegir el quart punt per a determinar la seva imatge.

## 2.5 Teorema de les circumferències d'Apol·loni

Finalitzarem aquest capítol introduint un aspecte crucial de la inversió: les circumferències d'Apol·loni. Aquestes compleixen el següent



**Teorema 2.5.1** (Teorema de les Circumferències d'Apol·loni)

Considerem dos punts  $A$  i  $B$  en el pla i un valor positiu real  $k$ , diferent de zero. Llavors, existeix un punt  $P$  que traça una circumferència centrada en un punt de la recta que passa per  $A$  i  $B$  tal que  $\frac{AP}{BP} = k$ .

*Demostració.* Suposem que ens trobem en el cas on  $A$  i  $B$  són en l'eix- $x$  essent  $A = (-u, 0)$  i  $B = (u, 0)$ , amb  $u > 0$ . Així, diguem que el punt  $P = (x, y)$  traça una circumferència  $\Gamma$  tal que  $AP = BP \cdot k$ , amb  $k > 0$  i diferent de 1.

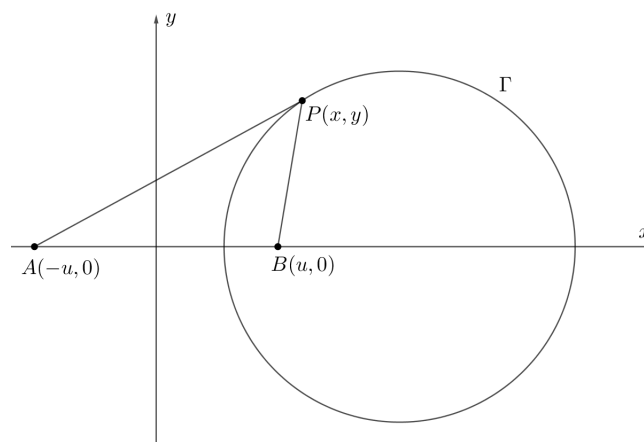


Figura 2.9: Circumferència d'Apol·loni.

Aplicant la fórmula Euclidiana de distàncies entre dos punts a la proporció  $AP = BP \cdot k$  i elevant-la al quadrat obtenim

$$(x + u)^2 + (y - 0)^2 = [(x - u)^2 + (y - 0)^2] \cdot k^2;$$

desenvolupant quadrats i agrupant termes es veu

$$x^2 + 2xu + u^2 + y^2 = x^2k^2 - 2xuk^2 + u^2k^2 + y^2k^2;$$

ara aïllem tot cap a un costat i traiem factor comú

$$x^2(1 - k^2) + 2xu(1 + k^2) + u^2(1 - k^2) + y^2(1 - k^2) = 0;$$

dividint tot per  $1 - k^2$  l'expressió queda de la següent forma

$$x^2 + 2xu \left( \frac{1 + k^2}{1 - k^2} \right) + u^2 + y^2 = 0;$$

que igualant quadrats,

$$\left(x + u \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)\right)^2 + (y-0)^2 - u^2 \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 + u^2 = 0;$$

i deixant l'expressió semblant a la d'una circumferència

$$\left(x + u \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)\right)^2 + (y-0)^2 = u^2 \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - u^2.$$

Per tant, podem apreciar com el resultat de les distàncies corresponen a una circumferència de centre  $c = \left(-u \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right), 0\right)$  i de radi

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{u^2 \left(\frac{(1+k^2)^2}{(1-k^2)^2} - 1\right)} = \sqrt{u^2 \left(\frac{(1+k^2)^2 - (1-k^2)^2}{(1-k^2)^2}\right)} = \sqrt{u^2 \frac{4k^2}{(1-k^2)^2}} \\ &\implies r = \frac{2uk}{|1-k^2|}. \end{aligned}$$

□

Un cop demostrat el teorema, ara podem fer referència a la *família de circumferències d'Apolloni*. Com hem vist anteriorment, qualsevol circumferència que compleixi les característiques del teorema 1.3.4 és considerada una circumferència d'Apolloni. Analitzem la casuística que podem trobar variant el valor de  $k$  a l'interval  $(0, \infty)$ .

Si  $k = 1$ , això implica que  $AP = BP$  i ' $r = \infty$ ', la qual cosa ens porta a una circumferència generalitzada o, en aquest cas, una recta estesa  $\ell$  tangencial a  $AB$ . Així doncs, considerant la casuística on el traç de  $P$  conté, en un dels casos, el punt  $\infty$ , podem afirmar que per a cada valor positiu de  $k$ , obtenim una circumferència generalitzada o, millor dit, una circumferència d'Apolloni. A aquest conjunt de circumferències se'ls diu la Família de circumferències d'Apolloni definides pels punts  $A$  i  $B$ .

Seguint amb les casuístiques, si  $k$  és un nombre molt gran,  $AP > BP$ , causant que  $P$  estigui més lluny de  $A$  i més a prop de  $B$ . Si  $0 < k < 1$ ,  $AP < BP$ , de manera que el punt  $P$  estarà més a prop de  $A$  i més lluny de  $B$ . Quan  $k = 1$ , obtenim la circumferència generalitzada  $\ell$ . Però quan  $k = 0$  i quan ' $k = \infty$ ', llavors es corresponen amb els punts  $A$  i  $B$ , respectivament. Per tant, una representació visual de la Família de les circumferències d'Apolloni és la següent:

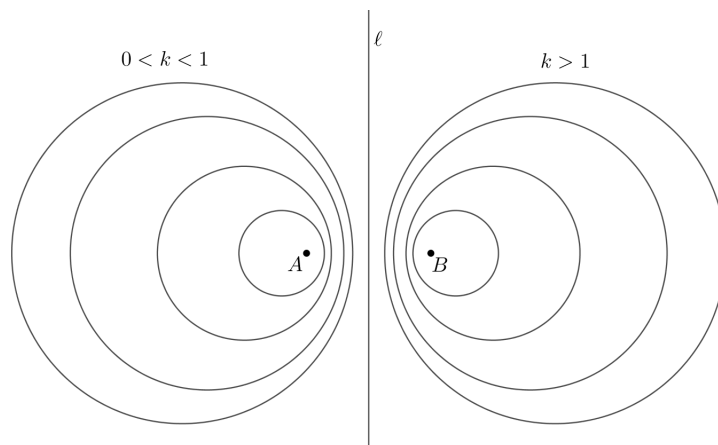


Figura 2.10: Família de circumferències d'Apolloni.

# Capítol 3

## Aplicacions

Ingressant en l'últim capítol del treball, ara ens centrarem a aplicar el que hem après prèviament a teoremes o problemes que poden sorgir en diferents àmbits de la ciència.

### 3.1 Teorema de Ptolemeu

El teorema de Ptolemeu relaciona la suma del producte de dos costats més els restants d'un quadrilàter cíclic amb el producte del les seves diagonals. Però abans de demostrar aquest, noteu com el següent teorema entre angles—demostrat en 1.3.4, però no formalitzat matemàticament—es compleix.

#### **Teorema 3.1.1** (Inversió i Angles)

Si  $A'$  i  $B'$  són les inversions d' $A$  i  $B$ , respectivament sota la inversió centrada en  $O$ , aleshores,  $\angle OAB = -\angle OB'A'$ .

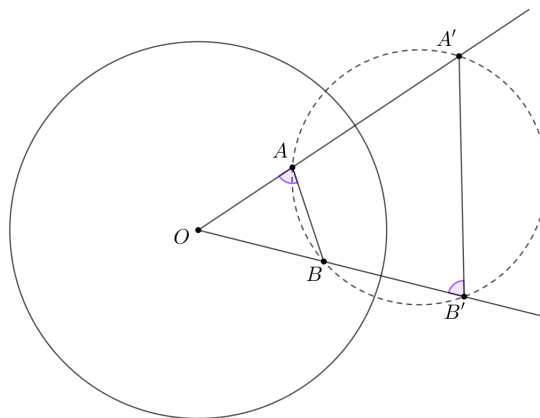


Figura 3.1: Inversió d' $A$  i  $B$

Visualment, deduïm que  $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$ , que per potència en un punt fix, ens implica que  $AA'BB'$  és un quadrilàter cíclic.

Per tant, ara estem preparats per a demostrar el Teorema de Ptolemeu.

**Teorema 3.1.2 (Teorema de Ptolemeu o Ptolemy)**

Sigui  $A, B, C$  i  $D$  els vèrtexs d'un quadrilàter cíclic  $ABCD$  en  $\zeta$ , llavors es compleix que

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

*Demostració.* Comencem suposant que existeix una circumferència  $\mathcal{C}$  de radi unitari amb centre  $A$ . Aleshores, si s'aplica la inversió en  $B, C$  i  $D$ , respecte de  $\mathcal{C}$ , els punts inversos  $B', C'$  i  $D'$  es trobaran sobre una mateixa circumferència generalitzada—que en aquest cas és una recta estesa que anomenarem  $\ell$ —ja que ja ho eren en  $\zeta$ . A més a més, pel Teorema del Angle, deduïm que  $\angle ABC = -\angle AC'B'$  i que  $\angle ADC = -\angle AC'D'$ . Per tant, una visualització geomètrica del concepte que hem creat és aquesta:

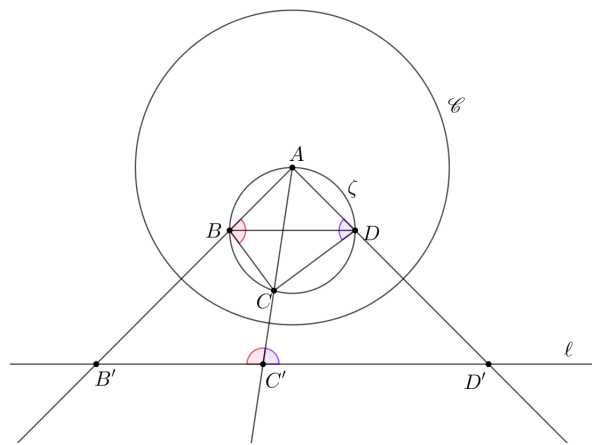


Figura 3.2: Representació de la demostració del cas general del Teorema de Ptolemeu.

Per tal de demostrar aquest teorema, utilitzarem la igualtat on  $B'C' + C'D' = B'D'$ . Per tant, aplicant el teorema de Tales en  $AB'C'$ ,  $AC'D'$  i en  $AB'D'$  vegem que es compleix el següent

$$\frac{B'C'}{AB'} = \frac{BC}{AC}, \quad \frac{C'D'}{AD'} = \frac{CD}{AC} \quad \text{i} \quad \frac{B'D'}{AD'} = \frac{BD}{AB}.$$

A més, sabem que  $AB \cdot AB' = AD \cdot AD' = 1$ , o millor dit, que  $AB' = \frac{1}{AB}$  i  $AD' = \frac{1}{AD}$ . Llavors, si substituïm aquestes correspondències en les equivalències trobades pel Teorema

de Tales i aïllem  $B'C'$ ,  $C'D'$  i  $B'D'$ , obtenim que

$$B'C' = \frac{BC}{AB \cdot AC}, \quad C'D' = \frac{CD}{AD \cdot AC} \quad \text{i} \quad B'D' = \frac{BD}{AD \cdot AB}.$$

Ara traslladarem aquests valors a la igualtat  $B'C' + C'D' = B'D'$ ,

$$\therefore \frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AD \cdot AC} = \frac{BD}{AD \cdot AB};$$

que, aleshores, en aplicar l'*mcm* i ordenar l'expressió concloem amb el teorema,

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

□

## 3.2 Aplicació de la inversió a la física

Dins del camp de la física, es presenta un problema relatiu al càlcul del potencial i del camp elèctric d'una esfera conductora. Aquest es resol mitjançant gradients i equacions diferencials, no obstant això, amb l'exposició i demostració de les eines de la geometria inversiva, abordarem la solució sense recórrer al càlcul diferencial. El problema és el següent:

### 3.2.1 Problema a l'esfera conductora

Disposem d'una esfera conductora enllaçada a terra. A causa de la seva conductivitat, els electrons poden moure's lliurement dins d'ella. Quan l'esfera es troba en equilibri, els electrons es disposen equidistantment i, per tant, romanen en repòs. Amb els electrons sense moviment, el camp elèctric dins de l'esfera val 0. De la mateixa manera, la diferència de potencial entre dos punts qualssevol de l'esfera també és 0 i llavors, el potencial és constant. A més a més, com l'esfera està connectada a terra i tenim que per conveni aquesta està a potencial 0, el potencial de l'esfera també serà 0.

Ara introduïm una càrrega puntual en un punt extern a l'esfera. Segons la llei de Coulomb, això dona lloc a la creació d'un camp elèctric a tot l'espai—inclouent l'interior de l'esfera conductora. Amb aquest camp no nul, els electrons es redistribueixen, podent recollir o cedir alguns a terra si és necessari. Això ens condueix a un estat d'equilibri on el camp retorna a ser 0, i el potencial, a més de mantenir-se constant, també és 0, ja que l'esfera continua connectada a terra.

Considerem resoldre el següent problema:

**Problema 3.2.1.** Trobar el camp elèctric i el potencial elèctric en cada punt de l'espai.

**Solució 3.2.2.** En el cas de tenir només la càrrega puntual, aquest problema és resolt, i la solució ve donada utilitzant les fórmules del camp i potencial elèctric de Coulomb. No obstant això, com els electrons de l'esfera es redistribueixen per anular el camp interior, es genera un camp elèctric fora de l'esfera que no es coneix.

En principi, si trobem el potencial elèctric en tot punt extern a l'esfera, ja és suficient per a resoldre el problema, ja que el camp es pot obtenir mitjançant el gradient del potencial. No obstant això, com hem destacat anteriorment, seguir la via del gradient ens obligaria a utilitzar equacions diferencials, les quals contravenen la nostra intenció de fer ús de la inversió. Per tant, procedirem de la següent manera:

Existeix un teorema conegut com el *Teorema d'Unicitat*, que estableix que si volem determinar el potencial en una regió i coneixem el seu valor a la frontera, juntament amb les càrregues presents a l'interior d'aquesta regió, llavors només hi pot haver com a molt una solució. Considerarem com a regió tot l'espai excepte l'interior de l'esfera conductora. A l'interior, sabem que només hi ha la càrrega puntual, i el potencial a la frontera d'aquesta regió és el potencial de l'esfera, que és conegut (0). Aleshores, pel *Teorema d'Unicitat*, trobarem la solució desitjada.

Volem trobar una configuració de càrregues puntuals, sense esferes, que compleixi:

- a) El potencial a la superfície on hi havia l'esfera és 0.
- b) No té càrregues puntuals fora d'aquesta superfície, tret de la càrrega puntual de l'enunciat original.

Ara és quan aplicarem la inversió per a resoldre el problema. Si considerem un punt  $P$  i el seu invers  $P'$  respecte d'una circumferència, llavors es compleix que per a qualsevol punt  $A$  de la circumferència d'inversió,  $\frac{AP}{AP'} = m$  constant—és una circumferència d'Apol·loni.

Per tant, suposem que el punt  $P$ , on hi ha la càrrega puntual, posem que val  $q$ . Si introduïm una càrrega  $q'$  a  $P'$ , el potencial generat per aquestes dues càrregues a qualsevol punt  $A$

de la superfície de l'esfera es determina segons la llei de Coulomb:

$$V(A) = K \cdot \frac{q}{AP} + K \cdot \frac{q'}{AP'}.$$

Substituint  $AP = m \cdot AP'$ , i fent el denominador comú tenim

$$V(A) = K \cdot \left( \frac{q + q' \cdot m}{m \cdot AP'} \right);$$

que sempre serà constant i 0 quan escollim  $q' = -q/m$ .

D'aquesta manera, el potencial generat per dues càrregues puntuals, una a  $P$  que val  $q$  i una a  $P'$  que val  $q' = -q/m$ , compleix les condicions i és l'única solució.

Ara per a calcular el potencial en un punt exterior de l'esfera conductora, farem el següent procediment. Calculem el potencial en aquest punt generat per la càrrega puntual, i li sumem el potencial creat per una càrrega fictícia col·locada a l'invers de la primera, valent  $-q/m$ . A més a més, imposam que  $A$  estigui alineat amb  $P$  i  $P'$ . Per ajudar a entendre tot aquest procediment i l'anterior, mostrem aquesta imatge:

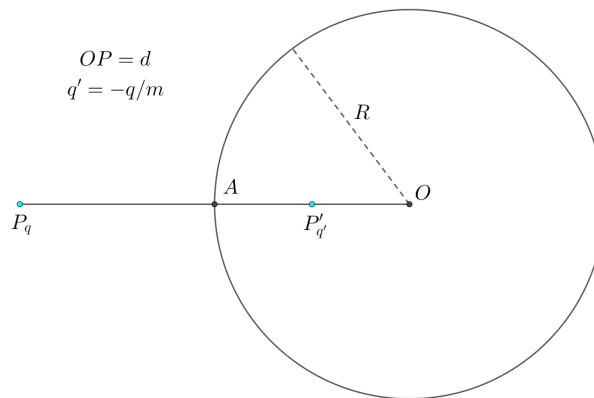


Figura 3.3: Secció de l'esfera conductora amb les càrregues  $q$  i  $q'$  en  $P$  i  $P'$ , respectivament.

Així, vegem que  $AP = d - R$  i  $AP' = R - OP'$ , però  $OP' = \frac{R^2}{d}$ ; per tant,  $AP' = R - \frac{R^2}{d}$ .

D'aquesta manera,

$$m = \frac{AP}{AP'} = \frac{d - R}{R - \frac{R^2}{d}} = \frac{d \cdot (d - R)}{R \cdot (d - R)} \implies m = \frac{d}{R}.$$



Per tant, el potencial elèctric serà

$$V(A) = K \cdot \frac{q}{AP} + K \cdot \frac{q'}{AP'} = K \cdot \left( \frac{q}{d-R} - \frac{\frac{q}{d}}{R - \frac{R^2}{d}} \right) = K \cdot \left( \frac{q}{d-R} - \frac{q \cdot R \cdot d}{R \cdot d \cdot (d-R)} \right) = 0.$$

Aleshores, com el potencial en qualsevol punt A de l'esfera és 0, els dos models coincidiran i hem acabat amb el problema.

**OBSERVACIÓ 3.2.3.** Cal destacar que el camp elèctric equival a menys el gradient del potencial, i.e.  $-\nabla V_q = \vec{E}$ , llavors si el potencial elèctric és el generat per dues càrregues puntuals, el camp elèctric serà igual a aquell generat per dues càrregues puntuals. Per tant, la fórmula del camp elèctric funciona també.

### 3.3 Problema de Shoemaker's Knife

El problema del Shoemaker's Knife o del Ganivet del Sabater és el següent:

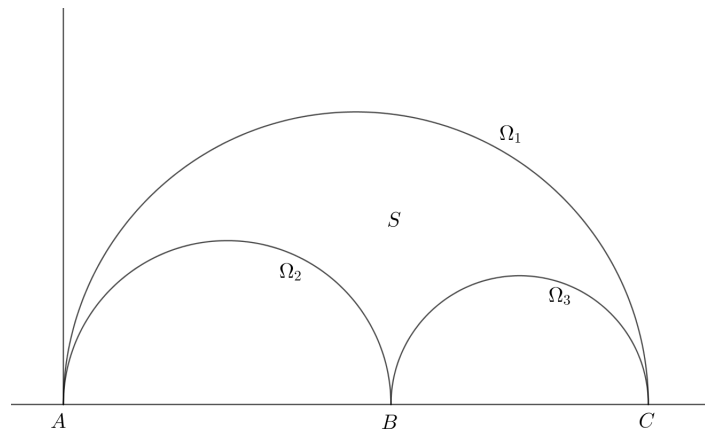


Figura 3.4: Shoemaker's Knife.

**Problema 3.3.1.** En el cas que es presenti una configuració amb tres semicircumferències,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  i  $\Omega_3$ , que es troben als punts A, B i C a l'eix-x. És possible disposar una successió de circumferències S entre  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ , amb la primera circumferència tangent a  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  i  $\Omega_3$ . A més, cada circumferència successiva en la cadena ha de ser tangent a  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ , així com a la circumferència anterior i a les següents circumferències en la cadena.

**Solució 3.3.2.** Aquest problema es resol de manera enginyosa mitjançant l'ús d'inversions. Considerem una circumferència  $\mathcal{C}$ , de radi unitari i centrada en  $A(0,0)$ . Apliquem la inversió a les tres semicircumferències, obtenint dues porcions de circumferències generalitzades en el semi-pla superior  $\mathcal{H} : \ell_1 = t(\Omega_1)$  i  $\ell_2 = t(\Omega_2)$ , amb la semicircumferència  $t(\Omega_3)$  situada entre elles, i.e.

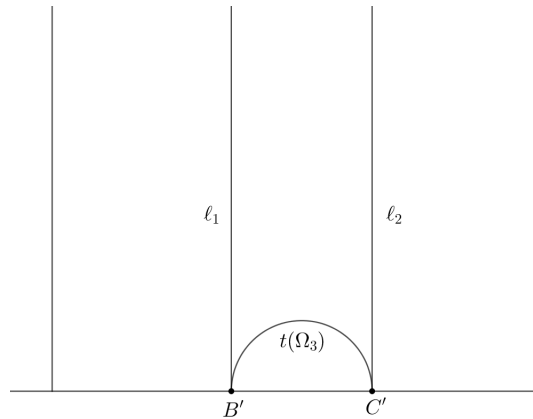


Figura 3.5: Inversió de  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  i  $\Omega_3$  respecte de  $\mathcal{C}$ .

El punt  $A$  s'inverteix a  $\infty$ , i els punts  $B'$  i  $C'$ , imatges de  $B$  i  $C$  respectivament, són els extrems de la semicircumferència  $t(\Omega_3)$ . Les rectes  $\ell_1$  i  $\ell_2$ , que són les imatges de  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ , són perpendiculars a l'eix- $x$  i paral·leles entre si. Així doncs, si anem col·locant una sèrie de circumferències tangent a  $\ell_1$  i  $\ell_2$ , la primera tangencial a totes dues i a  $t(\Omega_3)$ , dins de l'espai deixat per aquestes dues rectes; en aplicar la inversió, aquestes circumferències també seran tangents a  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ , amb el cas especial de la circumferència tangent també a  $\Omega_3$ .

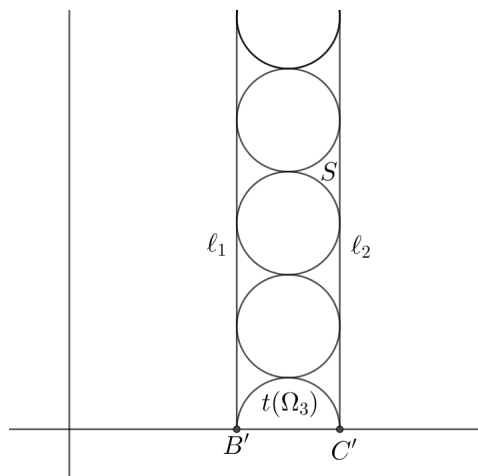


Figura 3.6: Successió de circumferències entre  $\ell_1$  i  $\ell_2$

Per tant, apliquem de nou la inversió a aquesta nova configuració per a tornar a la disposició original. Com que la inversió preserva les circumferències i les seves tangències, hem acabat amb el problema:

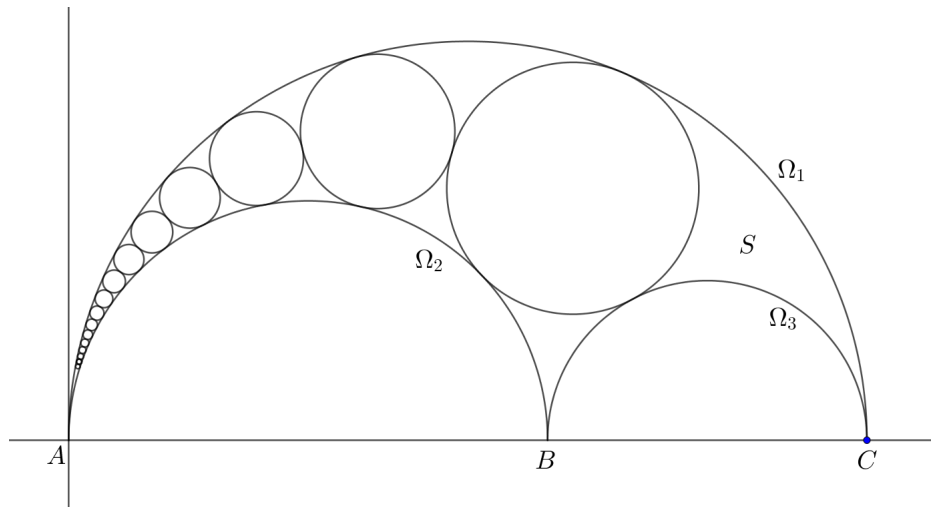


Figura 3.7: Serie de circumferències buscada del problema del Shoemaker's Knife.

## 3.4 Inversió amb imatges

En aquest últim apartat he elaborat un codi amb el programa Python<sup>1</sup> que em permet fer la inversió de qualsevol imatge respecte a una circumferència—tots els punts del cercle se'n van cap a fora i viceversa.

```

1  from PIL import Image
2
3  centre_i_radi = open("centre_i_radi.txt", "r")
4  coord = centre_i_radi.read().split("\n")
5  centre_i_radi.close()
6  xcentre = int(coord[0].split(",")[0])
7  ycentre = int(coord[0].split(",")[1])
8  xpunt = int(coord[1].split(",")[0])
9  ypunt = int(coord[1].split(",")[1])
10 radiquadrat = ((xcentre - xpunt)**2 + (ycentre - ypunt)**2)
11
12 original = Image.open("foto-input.png")
13 amplada_orig, altura_orig = original.size
14 color_fons = (0,0,0)
15 img = Image.new("RGB", (2*amplada_orig, 2*altura_orig), color_fons)
16 pixels = img.load()
17
18 color_cercle = (255,127,0)
19 def funció(i,j):
20     x = i - amplada_orig/2 - xcentre
21     y = j - altura_orig/2 - ycentre
22     if x**2 + y**2 < 30:
23         return color_cercle
24     xfinal = round(xcentre + radiquadrat*x/(x**2+y**2))
25     yfinal = round(ycentre + radiquadrat*y/(x**2+y**2))
26     if (xfinal-xcentre-x)**2 + (yfinal-ycentre-y)**2 < 30:
27         return color_cercle
28     if xfinal < 0 or xfinal >= amplada_orig:
29         return color_fons
30     if yfinal < 0 or yfinal >= altura_orig:
31         return color_fons
32     return original.getpixel((xfinal, yfinal))
33 for i in range(2*amplada_orig):
34     for j in range(2*altura_orig):
35         pixels[i,j] = funció(i,j)
36 img.save("foto-output.png")

```

Figura 3.8: Codi de Python per fer la inversió geomètrica.

El codi funciona a partir d'una imatge, *foto-input*, que es troba arxivada en una carpeta de l'ordinador, i unes variables  $(x, y)_{\text{punt}}$  i  $(x, y)_{\text{centre}}$ . Aquestes determinen el centre de la circumferència i el mòdul del radi al quadrat a partir dels píxels que es vulguin anotar. Aleshores, per a realitzar la inversió de la imatge *foto-input* respecte a una circumferència, he pensat en enquadrar-la sobre un rectangle que té el doble del valor de l'amplada i l'altura original. L'espai que es troba entre els costats del requadre i la imatge original, l'he pintat de color negre—o bé en RGB: (0, 0, 0)—per tal de no confondre colors.

Seguidament, he formalitzat de color taronja la nostra circumferència d'inversió per

<sup>1</sup>Python: Llenguatge de Programació.

utilitzar-la en les casuístiques que trobarem. Aleshores, a partir de la línia 19 cap a la línia 35 he començat a definir la funció  $(i, j)$  perquè el programa realitzi la transformació inversiva. En aquest interval he determinat la funció de la circumferència d'inversió com a  $x^2 + y^2$  i la transformació com a  $x_{final}$  i  $y_{final}$ .

**OBSERVACIÓ 3.4.1.** Notem que en aquesta part del codi, he definit la transformació inversiva amb l'expressió que vam comprovar en la secció 1.2.

Després, perquè el programa operi com ho faria la inversió, he definit diferents casuístiques perquè actuï d'aquesta manera:

- i) Si  $x^2 + y^2 < 30$ , pinta els píxels de color taronja—aquest és el simple cas on es pinta el centre d'inversió i es determina el seu gruix.
- ii) Si  $(x_{final} - x_{centre} - x)^2 + (y_{final} - y_{centre} - y)^2 < 30$ , pinta els píxels de color taronja—aquest és el cas quan els punts són cíclics i corresponen un altre cop la mateixa circumferència.
- iii) Si  $x_{final} \geq \text{amplada}_{orig}$ , pinta els píxels de color negre—és a dir, si els píxels són fora de la imatge i, per tant, en la part de color negre del requadre; aplica la inversió i pinta aquests píxels de color negre. Anàlogament, ho he imposat per a la  $y_{final}$

Finalment, imposant aquests casos perquè el programa realitzi correctament la inversió, he indicat que em retorni la imatge original amb la inversió implementada com a *foto-output* en el mateix arxiu on ha trobat la *foto-input*. D'aquesta manera, ara començarem a implementar el nostre codi en figures que resulten ser de gran interès o bé bastant conegudes.

### 3.4.1 Fractal de Mandelbrot

El fractal de Mandelbrot és un conjunt d'iteracions infinites de la funció  $\{z_{n+1} = z_n^2 + c \mid z_0 = 0 \in \mathbb{C}\}$ . Per un costat, he intentat recrear aquest fractal en **Desmos**<sup>2</sup> amb iteracions finites, i per l'altre, he agafat un imatge amb una representació del que serien infinites iteracions. Comencem amb la primera.

<sup>2</sup>Desmos: Software matemàtic per il·lustrar llocs geomètrics

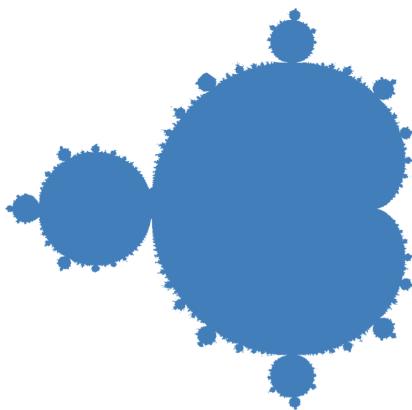


Figura 3.9: Funció del Fractal de Mandelbrot a Desmos.

En desar-la amb el nom de *foto-input* i definint una circumferència amb centre  $(93, 395)_{centre}$ —és a dir, l'extrem esquerre de la imatge on s'aprecia una última circumferència—i el punt  $(395, 425)_{punt}$ , procedirem a executar el codi i obtindrem el resultat següent:

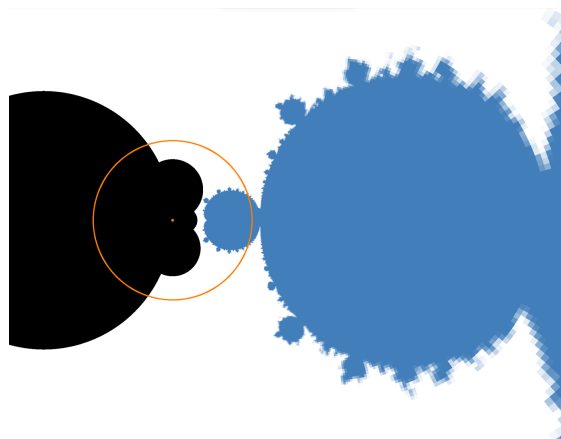


Figura 3.10: Inversió implementada al Fractal de Mandelbrot.

Podem observar com el lloc geomètric inicial es degenera amb una deformació peculiar, semblant a una xarxa de corbes. Per a aprofundir en la comprensió d'aquest fenomen, es pot comparar amb una xarxa de cercles d'Apolloni.

Tot i així, per a apreciar adequadament la inversió sobre el Fractal de Mandelbrot, farem servir una imatge amb iteracions infinites:

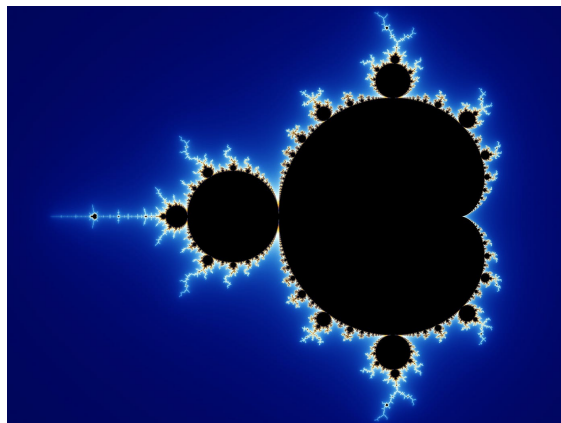


Figura 3.11: Fractal de Mandelbrot amb infinites iteracions, extret de: <https://matesmates.wordpress.com/2010/10/21/mandelbrot-y-los-fractales/>

Aplicant la metodologia anterior on el punt es trobava a l'extrem esquerre de l'última circumferència, executarem el codi i obtindrem la següent imatge:

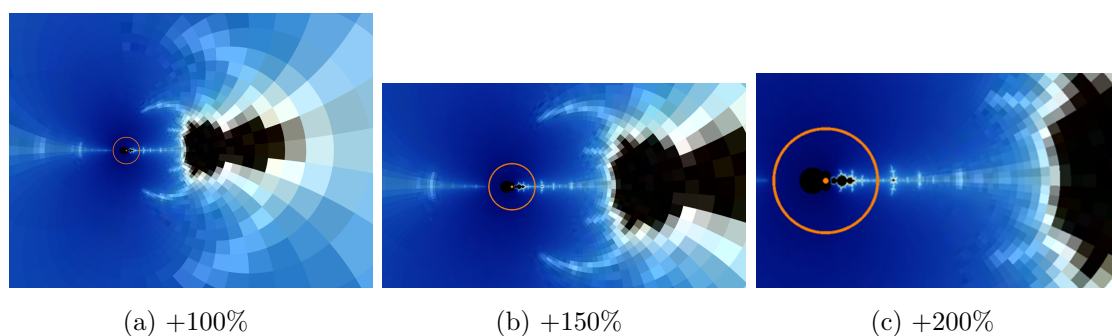


Figura 3.12: Inversió implementada al Fractal de Mandelbrot amb infinites iteracions.

En aquest moment, amb la imatge *foto-output*, observem la notable presència d'aquesta xarxa que esmentàvem abans. Indubtablement, presenta una gran similitud amb la forma dels cercles d'Apol·loni.

**OBSERVACIÓ 3.4.2.** Si és d'interès, deixo la meua [applet](#) feta a Desmos sobre el Fractal de Mandelbrot. En aquesta, a més a més, es pot apreciar a partir d'un punt, el *conjunt de Júlia*.

### 3.4.2 Satèl·lits naturals

Per a terminar amb el treball he pensat en aplicar el programa a tres satèl·lits naturals: la Terra, la Lluna i un exoplaneta molt interessant el qual anomenen *J1407b*—o bé el

Super-Saturn... Per tant, comencem amb els dos primers.

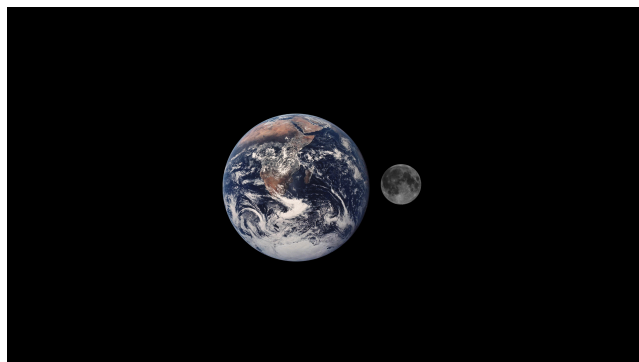


Figura 3.13: Terra-Lluna, extret de [https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema\\_Tierra-Luna](https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_Tierra-Luna)

Indicant en el codi que el centre d'inversió ha d'estar entre les dues 'esferes' i assegurant que el radi sigui prou ampli per a incloure una secció de la Terra i la Lluna, arribem al següent resultat:

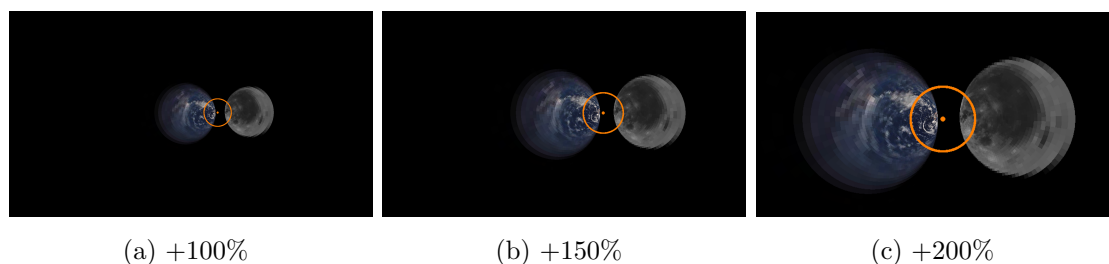


Figura 3.14: Inversió implementada en la Terra i la Lluna.

De manera similar al fractal de Mandelbrot, aconseguim una trama de corbes que recorda als cercles d'Apol·loni. Aquesta semblança és particularment destacada en la imatge (c). Cal notar que en aquest i en els casos anteriors, el codi està operant adequadament, complint amb les condicions que he establert per a les transformacions inversives. Passem ara amb l'exoplaneta *J1407b*.





Figura 3.15: *J1407b* o Super-Saturn, extret de [https://www.reddit.com/r/Damnthatinteresting/comments/15sko39/j1407b\\_planet\\_has\\_rings\\_640\\_times\\_the\\_extent\\_of/](https://www.reddit.com/r/Damnthatinteresting/comments/15sko39/j1407b_planet_has_rings_640_times_the_extent_of/)

Per a visualitzar les regions externa i interna de l'exoplaneta mitjançant la inversió, he situat el centre d'inversió a l'esquerra de la imatge—alineat amb *J1407b*—amb un radi prou ampli per a garantir-ne aquesta condició. Per tant,

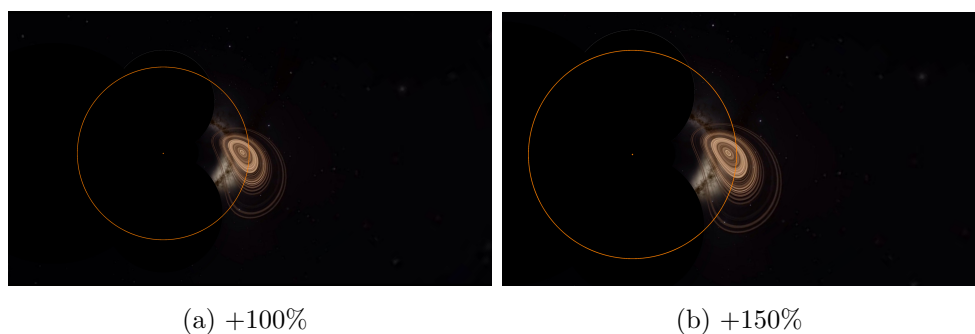


Figura 3.16: Inversió implementada en el Super-Saturn.

En aquesta última imatge, podem analitzar perfectament com la part que es trobava externa a la circumferència d'inversió ha passat a dins d'aquesta i viceversa. És molt interessant apreciar com s'ha degenerat la imatge seguint les casuístiques de la geometria inversiva.

## Conclusió

A aquest punt, és evident que els meus objectius de recerca s'han assolit amb èxit.

S'ha proporcionat una detallada introducció a la geometria inversiva, explorant les interessants correspondències biuníviques i les diverses casuístiques que es presenten amb rectes i còniques. Més enllà de les imatges resultants, s'ha demostrat com aquest moviment conserva les magnituds dels angles mentre canvia la seva orientació. Amb la finalització del capítol 2, les propietats de la inversió en el pla estès s'han clarificat de manera efectiva.

El capítol 2 introdueix el nou pla de treball, el pla complex estès. Aquest pla demostra ser eficaç per a definir l'Esfera de Riemann, on el concepte del punt  $\infty$  adquireix una nova significació. Amb les transformacions de Möbius, s'ha establert la bijectivitat d'aquesta transformació i la seva connexió amb les matrius de dimensió  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ , entre altres propietats.

Destaco la importància de les circumferències generalitzades durant els capítols 1 i 2, on una recta es considera una circumferència de radi infinit.

En les aplicacions pràctiques, ha estat emocionant resoldre el teorema de Ptolemeu i el problema de Shoemaker's knife utilitzant inversions. La introducció del teorema de les circumferències d'Apol·loni ha estat crucial per a abordar el problema de l'esfera conductora, establint una relació clara entre les inversions i la física.

La creació del codi a Python per a realitzar inversions d'imatges ha estat un avenç significatiu, permetent-nos explorar inversions de satèl·lits naturals i verificar les correlacions estudiades durant tot el treball.

La inversió s'ha revelat com una eina potent per a resoldre problemes aparentment complexos, que se simplifiquen mitjançant aquesta operació.

Tot i això, he enfrontat desafiaments com la incapacitat de demostrar alguns teoremes del capítol 2 i la necessitat de mantenir la rigorositat per a una comprensió adequada. En resum, aquest treball ha estat un desafiament gratificant, i veig que el meu interès en la geometria inversiva només acaba de començar.



# Bibliografia

- [1] Beardon, Alan F.. (2005). *Algebra and Geometry* (1a ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- [2] Brannan, David A.; Esplen, Matthew F.; i Gray, Jeremy J.. (2012). *Geometry: Second Edition* (2a ed.). Cambridge: The Open University.
- [3] Chen, Evan. (2016). *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads* (1a ed.). Washintong, DC: The Mathematical Association of America.
- [4] Christersson, Malin. (2018). *Non-Euclidean Geometry*. Consultat 17 Agost 2023, des de <http://www.malinc.se/noneuclidean/en/index.php>
- [5] DIBUJOTECNI.COM. (2016). Consultat 10 Octubre 2023, des de <https://dibujotecni.com/geometria-plana/transformaciones-geometricas-inversion/>
- [6] Greenberg, Marvin Jay. (1993). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. (3a ed.). Santa Cruz: W. H. Freeman and Company.
- [7] Guisado, Eric. (2014). *Estudi de les transformacions de Möbius*
- [8] Hitchman, Michael P.. (2018). *Geometry with an Introduction to Cosmic Topology* (2018 ed.). McMinnville, Oregon: Linfield College.
- [9] Japan Wiki. (2018). *Geometría inversiva*. Consultat 5 Octubre 2023, des de [https://hmn.wiki/es/Inversive\\_geometry](https://hmn.wiki/es/Inversive_geometry)
- [10] Morilla Ortega, Francisco Jesús. (2022). *LA INVERSIÓN RESPECTO DE UNA CIRCUNFERENCIA*.
- [11] Reventós Tarrida, Agustí. (2003). *Geometría inversiva*. *La Gaceta de la RSME*: número 1, 6, 39-79.

- [12] Universitat Politècnica de Cartagena. *Funciones holomorfas*. Consultat 27 març 2024 des de [https://www.dmae.upct.es/~paredes/mat2elec/apuntes/Otros/tema2\\_funciones\\_holomorfas.pdf](https://www.dmae.upct.es/~paredes/mat2elec/apuntes/Otros/tema2_funciones_holomorfas.pdf)