

SEPARADORES DE PUNTOS Y DIMENSION

Joan Tarres i Freixenet

ABSTRACT

We define the K-dimension $K(X)$ of a topological space X by means of separating-points. The zero K-dimensional spaces are those that their quasicomponents are the point sets. We establish the theorem of topological invariance, the subspace theorem, the sum theorem in a restricted case and the cartesian product theorem. The relation with the classical dimension functions are also studied.

INTRODUCCION

En [3] se define una función de dimensión $t(X)$ determinada por las componentes del espacio; se obtiene así que $t(X) = 0$ si y sólo si las componentes conexas de X se reducen a puntos. En [1] se analizan distintos tipos de desconexión de un espacio X ; entre los espacios tales que $\text{ind}(X) = 0$ y aquellos que $t(X) = 0$ se sitúan los que tienen sus cuasicomponentes formadas por conjuntos unitarios. Las tres clases de espacios son en general distintas, lo que permite considerar una nueva función de dimensión, $K(X)$, que vendrá determinada por las cuasicomponentes del espacio y de manera que, ahora, los espacios cuya K-dimensión es cero serán aquellos que tienen sus cuasicomponentes formadas por conjuntos de un solo punto.

En este trabajo definimos la K-dimensión de un espacio X y se estudian diversas propiedades elementales de la misma, así como los teoremas de invariancia topológica y del subespacio en el §1. En el §2 se estudian las relaciones de la K-dimensión de un espacio topológico y las funciones clásicas de dimensión ind , Ind y dim ; así-

mismo, se establecen relaciones con la dimensión $t(X)$ definida en [3]. El teorema de la suma se enuncia en 2.10 para un caso particular. El §3 está dedicado al estudio del comportamiento de la K -dimensión respecto de aplicaciones continuas, obteniendo como consecuencia de ello el teorema del producto (3.7).

§ 1. DEFINICIONES Y RESULTADOS PRELIMINARES

=====

Recordemos que dado un espacio topológico X y dos elementos $x \neq y$ del mismo, una separación en X entre x e y es un conjunto $L \subset X$ tal que:

- a) $X - L = A \cup B$
- b) $x \in A$; $y \in B$
- c) $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \emptyset$

1.1 DEFINICION.- Sea X un espacio topológico arbitrario; se define la K -dimensión de X como un número entero $K(X) \geq -1$ tal que:

- a) $K(X) = -1$ si y sólo si $X = \emptyset$
- b) Si $X = \{x\}$ es $K(X) = 0$
- c) Si X tiene más de un punto, $K(X) \leq n$ ($n \geq 0$) - si par $x, y \in X$ arbitrarios y distintos existe una separación L entre x e y en X tal que $K(L) \leq n-1$.
- d) $K(X) = n$ si $K(X) \leq n$ y $K(X) > n-1$
- e) $K(X) = \infty$ si para todo $n = 1, 2, \dots$ es $K(X) > n$.

1.2 LEMA.- Si C es una cuasicomponente del espacio X , $K(C) = 0$ si y sólo si C es un conjunto unitario.

Demostración.- Evidentemente, si $C = \{x\}$ entonces $K(C) = 0$. Recíprocamente, supongamos que C consta de al menos dos puntos $x \neq y$. Si el conjunto \emptyset fuese una separación en C entre x e y existiría un conjunto abierto y cerrado U en C tal que $x \in U$, $y \in C - U$. Ahora, $U = C \cap V$ con V un conjunto abierto y cerrado en X , por lo que $C \subset V$ y por lo tanto $U = C$, lo que es imposible.

Luego, si C tiene más de un punto, $K(C) > 0$. \square

1.3. PROPOSICION.- $K(X) = 0$ si y sólo si $X \neq \emptyset$ y las cuasicomponentes de X son los conjuntos de un solo punto.

Demostración.- Si $K(X) = 0$ es $X \neq \emptyset$ y además, dados $x \neq y$ en X existe U abierto y cerrado tal que $x \in U$, $y \notin U$; es decir, la cuasicomponente C_x de x coincide con $\{x\}$ para todo $x \in X$.

Recíprocamente, si X es un espacio no vacío cuyas cuasicomponentes son los puntos, dados $x \neq y$ en X , como C_x y C_y son distintas existe un conjunto abierto y cerrado U en X tal que $x \in U$, $y \notin U$, por lo que $K(X) = 0$. \square

1.4. TEOREMA.- (Invariancia por homeomorfismos) . Si X e Y son dos espacios topológicos no vacíos y existe un homeomorfismo de X sobre Y , $K(X) = K(Y)$.

Demostración.- Sea $f: X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Si $K(X) = 0$, obviamente es $K(Y) = 0$ en virtud de 1.3.

Supongamos el teorema demostrado para espacios de K -dimensión menor que n ($n \geq 1$) y sea $K(X) = n$. Si x', y' son elementos distintos de Y con $x' = f(x)$, $y' = f(y)$, será $x \neq y$ y en consecuencia existe una separación L en X entre x e y con $K(L) \leq n-1$. Ahora, $L' = f(L)$ es una separación en Y entre x' e y' y por la hipótesis de inducción es $K(L') \leq n-1$. Por lo tanto, $K(Y) \leq n$.

Como existen $a, b \in X$ distintos y una separación L_1 entre ellos con $K(L_1) = n-1$, $L'_1 = f(L_1)$ es una separación entre $f(a)$ y $f(b)$ en Y de manera que $K(L'_1) = n-1$. Luego, $K(Y) = n$. \square

1.5. TEOREMA.- (Teorema del subespacio). Dado el espacio topológico X y el subespacio $A \subset X$ se tiene $K(A) \leq K(X)$.

Demostración.- Si $A \subset X$ y $K(X) = 0$, o bien es $A = \emptyset$ o bien las cuasicomponentes de A son los puntos. Así, es $K(A) < 0 = K(X)$.

Supuesto el teorema cierto para espacios de K -dimensión menor que n ($n \geq 1$) sea X tal que $K(X) = n$. Para

$x, y \in A$ ($x \neq y$) existe una separación L en X entre ellos tal que $K(L) \leq n - 1$. El conjunto $L \cap A$ es una separación en A entre los puntos x e y , y como $L \cap A \subset L$, por la hipótesis de inducción se tiene que $K(L \cap A) \leq K(L) \leq n-1$. En consecuencia, $K(A) \leq n = K(X)$. \square

1.6. PROPOSICION. - Sea X un espacio topológico no vacío. Si $\{C_i\}_{i \in I}$ es la familia de las cuasicomponentes de X ,

$$K(X) = \sup_{i \in I} [K(C_i)]$$

Demostración. - Por (1.5), $\sup_{i \in I} [K(C_i)] \leq K(X)$. Para demostrar la desigualdad contraria:

$$(1) \quad K(X) \leq \sup_{i \in I} [K(C_i)]$$

lo haremos por inducción respecto a $n = \sup_{i \in I} [K(C_i)]$.

Si $n = 0$, por (1.2) las cuasicomponentes C_i se reducen a un punto para todo $i \in I$, y por (1.3) es $K(X) = 0$ y la desigualdad (1) se cumple en este caso.

Supongamos probada la desigualdad (1) para $n \leq k$ con $k \geq 1$, y sea X un espacio tal que $n = k$. Sin restricción de la generalidad podemos suponer que cada cuasicomponente C_i tiene más de un punto. Si $x, y \in X$ con $x \neq y$ de tal forma que ambos pertenecen a cuasicomponentes distintas, el conjunto vacío es una separación entre ellos; si x e y pertenecen a la misma cuasicomponente C_{i_0} y si para cada $i \in I$ es $K(C_i) = n_i$, existe una separación L_{i_0} en C_{i_0} entre x e y con $K(L_{i_0}) \leq n_{i_0} - 1$. Elegimos ahora, para cada $i \in I - \{i_0\}$ un par de puntos distintos $x_i, y_i \in C_i$ y consideramos la separación L_i entre ellos tal que $K(L_i) \leq n_i - 1$.

El conjunto:

$$L = \bigcup_{i \in I} L_i$$

es una separación en X entre x e y . Por la hipótesis de inducción, $K(L) \leq k-1$ y por tanto, $K(X) \leq k$ y la proposición queda demostrada \square

§ 2. RELACION CON OTRAS FUNCIONES DE DIMENSION
 =====

Estudiamos a continuación la relación entre la K -dimensión y las funciones clásicas de dimensión ind , Ind , dim , así como la función $t(X)$ definida en [3].

2.1 PROPOSICION.- Si X es un espacio T_3 , $K(X) \leq \text{ind}(X)$.

Demostración.- Supondremos $\text{ind}(X) < \infty$ y probamos la proposición por inducción respecto a $\text{ind}(X)$:

Si $\text{ind}(X) = -1$ entonces $X = \emptyset$ y también $K(X) = -1$ por lo que en este caso la proposición es cierta.

Consideremos probado el enunciado para espacios T_n tales que su dimensión débilmente inductiva es $\leq n-1$ ($n \geq 1$) y supongamos que $\text{ind}(X) = n$. Si $x, y \in X$ con $x \neq y$, como $\{y\}$ es cerrado en X con $x \notin \{y\}$, por (1.1.4) de [1] existe una separación L entre x e $\{y\}$ tal que $\text{ind}(L) \leq n-1$. Por la hipótesis de inducción, tenemos $K(L) \leq \text{ind}(L) \leq n-1$ por lo que es $K(X) \leq n$ y se cumple la desigualdad buscada. \square

Si X es un espacio T_4 entonces $\text{ind}(X) \leq \text{Ind}(X)$ por (1.6.3) de [1] por lo que:

2.2 COROLARIO.- Si X es un espacio T_4 , $K(X) \leq \text{ind}(X) \leq \text{Ind}(X)$.

La desigualdad de la proposición 2.1 no es, en general, una igualdad, como lo muestra el siguiente ejemplo:

2.3. EJEMPLO.- Sea $H_0 = \{(x_i)_{i=1}^\infty \mid x_i \in \mathbb{Q}, \sum_{i=1}^\infty x_i^2 < \infty\}$ el subespacio del espacio de Hilbert H formado por los puntos de componentes racionales del mismo.

Si $(x_i)_{i=1}^\infty \neq (y_i)_{i=1}^\infty$ en H_0 , existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Supongamos que es $x_{i_0} < y_{i_0}$ y sea $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que $x_{i_0} < \alpha < y_{i_0}$; si es $U_{i_0} = (-, \alpha) \cap \mathbb{Q}$, el conjunto:

$$U = \left(\prod_{i=1}^\infty U_i \right) \cap H_0$$

con $U_i = \mathbb{R}$ para $i \neq i_0$ es un abierto y cerrado en H_0 tal que

$(x_i)_{i=1}^{\infty} \in U$ y $(y_i)_{i=1}^{\infty} \notin U$. Es decir, $K(H_0) = 0$, mientras que $\text{ind}(H_0) = 1$ (ver [1]).

2.4. PROPOSICION.- Para todo espacio topológico X es $t(X) \leq K(X)$.

La proposición (2.4) es consecuencia inmediata del hecho de que las componentes conexas de cualquier espacio es tán contenidas en las cuasicomponentes del mismo y de (1.5) y (1.6) así como de [3] (proposición 1.2). No obstante, la desigualdad no es en general una igualdad, como queda puesto de manifiesto en [1] (ejemplo 1.4.7) donde se describe un es pacio Y tal que $t(Y) = 0$ mientras que $K(Y) > 0$.

Como en un espacio compacto y T_2 las componentes conexas y las cuasicomponentes coinciden, podemos asegurar:

2.5. PROPOSICION.- Si X es un espacio compacto y T_2 entonces $t(X) = K(X)$.

Como consecuencia de los resultados dados en [3] (4.6) y (4.7) así como de las proposiciones (2.1), (2.2), (2.4) y (2.5) del presente trabajo, se obtiene:

2.6. PROPOSICION.- Si X es un espacio compacto y T_2 :
 $\dim(X) \leq t(X) = K(X) \leq \text{ind}(X) \leq \text{Ind}(X)$

2.7. PROPOSICION.- Si X es un espacio localmente compacto y metrizable:

$$\dim(X) = t(X) = K(X) = \text{ind}(X) = \text{Ind}(X)$$

Teniendo en cuenta que \mathbb{R}^n es un espacio localmente compacto y metrizable, tenemos:

2.8. COROLARIO.- (Teorema fundamental de la dimensión).

$$K(\mathbb{R}^n) = n \quad (n \geq 1)$$

2.9. PROPOSICION.- si X es un espacio localmente compacto, T_2 y localmente metrizable, $K(X) = \text{ind}(X)$.

En virtud de los resultados anteriores podemos enunciar:

2.10. TEOREMA DE LA SUMA.- Sea X un espacio localmente compacto y T_2 tal que:

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

donde F_i es cerrado en X , localmente metrizable con $K(F_i) \leq n$ para $n = 1, 2, \dots$. Entonces, $K(X) \leq n$.

Demostración.- Por (2.9), $\text{ind}(F_i) \leq n$ ($i = 1, 2, \dots$) y ahora (ver [1]) $\text{ind}(X) \leq n$. Luego, por (2.1), $K(X) \leq \text{ind}(X) \leq n$. \square

§ 3. K-DIMENSION Y APLICACIONES CONTINUAS

=====

Sean $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación continua entre los espacios topológicos no vacíos X e Y , y $\{C_j\}_{j \in J}$ la familia de las cuasicomponentes de Y . Llamamos:

$$K(f) = \sup_{j \in J} [K(f^{-1}(C_j))]$$

3.1. PROPOSICION.- Dada la aplicación continua f entre los espacios topológicos X e Y se tiene: $K(X) = K(f)$.

Demostración.- Para cada $j \in J$, $f^{-1}(C_j)$ es intersección de abiertos y cerrados de X . Si C es una cuasicomponente de X tal que $C \cap f^{-1}(C_j) \neq \emptyset$ entonces $C \subset f^{-1}(C_j)$ y así:

$$(2) \quad K(C) \leq K[f^{-1}(C_j)] \leq K(X)$$

Por (1.6), si $\{C_i\}_{i \in I}$ son las cuasicomponentes de X , y como consecuencia de (2) obtenemos:

$$K(X) = \sup_{i \in I} [K(C_i)] \leq \sup_{j \in J} [K(f^{-1}(C_j))] \leq K(X)$$

y la proposición queda demostrada. \square

3.2. COROLARIO.- Si $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicación biyectiva y continua y $K(Y) = 0$ entonces $K(X) = 0$.

Podemos dar un enunciado más general del corolario (3.2) para aplicaciones biyectivas y continuas:

3.3. PROPOSICION.- Si $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicación biyectiva y continua, $K(X) \leq K(Y)$.

Demostración.- Vamos a probar la proposición por inducción respecto de $K(Y)$:

Si $K(Y) = 0$, por el corolario (3.2) es $K(X) = 0$ y la proposición es cierta en este caso.

Supongamos probado el resultado para espacios cuya dimensión es $\leq n-1$ y sea Y un espacio tal que $K(Y) = n$. Si $x_1 \neq x_2$ en X , por ser f biyectiva es $f(x_1) \neq f(x_2)$ y en consecuencia, existe una separación L' en Y entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ con $K(L') \leq n-1$. Ahora, $L = f^{-1}(L')$ es una separación entre x_1 y x_2 en el espacio X y por la hipótesis de inducción es $K(L) \leq K(L') \leq n-1$; luego, $K(X) \leq n = K(Y)$. \square

3.4. COROLARIO.- Dado el conjunto no vacío X , si T y T' son dos topologías de X tales que $T \subset T'$ tenemos:

$$K(X, T') \leq K(X, T)$$

La desigualdad de (3.3) y (3.4) no es en general una igualdad, como queda de manifiesto en el siguiente ejemplo:

3.5. EJEMPLO.- Consideremos en el conjunto \mathbb{R} de los números reales la topología usual T_u y la topología T cuya base es la familia:

$$\mathcal{B} = \{ [a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} ; a < b \}$$

Es obvio que $T_u \subset T$ siendo $K(\mathbb{R}, T) = 0$ y $K(\mathbb{R}, T_u) = 1$ en virtud de (2.8).

Dados los espacios no vacíos X e Y y la aplicación continua $f: X \longrightarrow Y$ llamaremos:

$$h(f) = \sup_{y \in Y} [K(f^{-1}(y))]$$

3.6. PROPOSICION.- Si $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicaci3n continua, $K(X) \leq K(Y) + h(f)$.

Demostraci3n.- Probaremos la proposici3n por inducci3n respecto de $K(Y)$:

Si $K(Y) = 0$, las cuasicomponentes de Y son los puntos, por lo que $\{f^{-1}(y)\}_{y \in Y}$ es la familia de las im3genes rec3procas de las cuasicomponentes de Y ; es decir, $K(f) = h(f)$, y por (3.1) es $K(X) = h(f)$ y la proposici3n es cierta en este caso.

Si suponemos cierto el resultado en el caso en que la K -dimensi3n del segundo espacio es $\leq n-1$, sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicaci3n continua con $K(Y) = n$ ($n \geq 1$):

Dados $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, de manera que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $y_1 \neq y_2$, existe una separaci3n L' entre y_1 e y_2 en Y tal que $K(L') \leq n-1$. Ahora, $L = f^{-1}(L')$ es una separaci3n entre x_1 y x_2 en X , y por la hip3tesis de inducci3n tenemos:

$$(3) \quad K(L) \leq K(L') + h(f|_L) \leq K(L') + h(f) \leq h(f) + n - 1$$

Sean ahora $x_1 \neq x'_1$ en el espacio X con $f(x_1) = f(x'_1) = y_1$. Si x_1 y x'_1 pertenecen a una misma cuasicomponente C de X , existe una separaci3n L_C en C entre x_1 y x'_1 con $K(L_C) \leq K(C)-1$ y adem3s:

$$K[L_C \cap f^{-1}(y_1)] \leq K[f^{-1}(y_1)] - 1$$

Procediendo de manera semejante a la demostraci3n de la proposici3n (1.6) obtenemos una separaci3n L entre x_1 y x'_1 tal que:

$$(4) \quad K(L) \leq \sup_{y \in Y} [K(f^{-1}(y))] - 1 \leq h(f) + n - 1$$

Luego, a la vista de (3) y (4) es $K(X) \leq h(f) + n = K(Y) + h(f)$. \square

Este 3ltimo resultado permite demostrar el siguiente teorema:

3.7. TEOREMA DEL PRODUCTO.- Si X e Y son dos espacios topológicos no vacíos, $K(X \times Y) \leq K(X) + K(Y)$.

Demostración.- Consideremos la aplicación continua:

$$\text{pr}_1 : X \times Y \longrightarrow X$$

Aplicando (3.6) se obtiene:

$$K(X \times Y) \leq K(X) + h(\text{pr}_1)$$

y como para todo $x \in X$, $\text{pr}_1^{-1}(x)$ es homeomorfo a Y , se tiene $h(\text{pr}_1) = K(Y)$ de donde $K(X \times Y) \leq K(X) + K(Y)$. \square

BIBLIOGRAFIA

=====

- [1]. R. ENGELKING. Dimension Theory. North. Holland Publ. Co. 1978.
- [2]. K. KURATOWSKI. Topology. Vol. II. New York. 1968.
- [3]. G. STEINKE. A new dimension by means of separating sets. Arch. Math. 40(1983)273-282.

Rebut el 27 de juny del 1984

Universidad Complutense
Facultad de Ciencias Matemáticas
Dpto. de Geometría y Topología
Ciudad Universitaria
Madrid
ESPAÑA