Uniformització p-àdica

de corbes de Shimura

K cos complet respecte a una valoració discreta.

$C = \widehat{\overline{K}}$ la completació de la clausura algebraica de K.

R anell d'enters de K.

k el cos residual de R que suposarem **finit**.

π un uniformitzant de R.

$|\ \ |$ el valor absolut de K i la seva extensió a C.

Una corba $\mathcal{X}$ sobre R amb fibra genèrica llisa i projectiva s'anomena **estable** si

(i) és pròpia i plana sobre R

(ii) la seva fibra sobre k és geomètricament reduïda, connexa, amb singularitats que siguin punts dobles ordinaris

(iii) cada component racional interseca les altres en com a mínim tres punts.

Una corba estable $\mathcal{X}$ sobre R té **reducció totalment degenerada split** si

(i) totes les components irreductibles la reducció són isomorfes a $\mathbb{P}^1$

(ii) tots els punts dobles són k-racionals.

Una corba irreductible, llisa i projectiva sobre K, és una **corba de Mumford** si té un model estable $\mathcal{X}$ sobre R amb reducció totalment degenerada *split*.

Si X és una corba de Mumford, aleshores

1. La jacobiana $Jac(X)$ té reducció isomorfa a ${\mathbb{G}_m}^g$.

2. $Jac(X) \cong {\mathbb{G}_m}^g/M$ com a varietats rígides analítiques.

3. Si ℓ és un nombre primer diferent de la característica de k, aleshores

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^1(X_{et}, \mathbb{Q}_\ell)(1)^{G_K} = g.$$

A més a més, totes les condicions anteriors són equivalents.

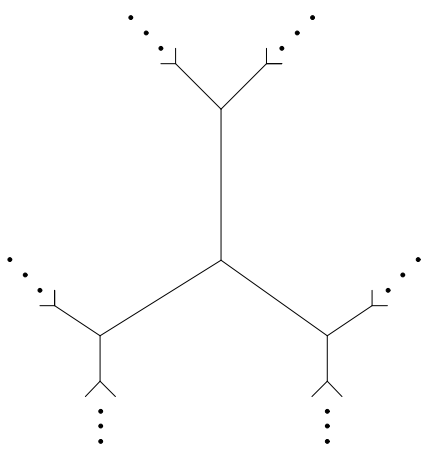
El graf $\mathcal{T}$ de $\mathrm{PGL}(2, K)$ bé definit aleshores per les dades següents:

(i) Els vèrtexs de $\mathcal{T}$ són les classes mòdul homotècia de xarxes de K^2.

(ii) Dos vèrtexs s i s' estan units per una aresta si i només si existeixen $M_1 \in s$ i $M_2 \in s'$ tals que $\pi M_2 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2$, o, equivalentment, $M_1/M_2 \cong k$.

El graf $\mathcal{T}$ és un arbre. Fixat un vèrtex s, tenim una correspondència entre el conjunt d'arestes amb origen s i els punts de $\mathbb{P}^1_k(k)$.

Arbre $\mathcal{T}$ per a $\mathbb{Q}_2$.



El grup $\mathrm{PGL}(2,K)$ actua de manera natural en $\mathcal{T}$ de la manera següent: si A és una matriu de $\mathrm{GL}(2,K)$, aleshores

(i) Per a tot vèrtex $[M]$ de $\mathcal{T}$, $A[M] := [AM]$.

(ii) Si tenim dos vèrtexs s i s' units per una aresta $[s,s']$, aleshores $A[s,s'] := [As, As']$.

Definim semilínea de $\mathcal{T}$ les successions infinites de vèrtexs $\{s_n\}$ sense repetició tal que s_i està connectada a a s_{i-1} per a tot i.

El conjunt de semilínees de $\mathcal{T}$ (amb la relació d'equivalència natural) és correspon de manera natural als punts de $\mathbb{P}^1_K(K)$.

En efecte, només hem de prendre un representant M_i de s_i per a cada i i considerar el subespai $\bigcap_i M_i \otimes_R K \subset K^2$; aquest subespai ens determina el punt buscat.

Donar una xarxa M de K^2 mòdul homotècia és equivalent a donar

$$\mathbb{P}(M) := \textbf{Proj}(\text{Sym}(\text{Hom}_R(M, R)))$$

sobre R isomorf a la recta projectiva $\mathbb{P}^1_R$ amb fibra genèrica $\mathbb{P}^1_K$.

Els punts R-racionals de $\mathbb{P}(M)$ és corresponen aleshores als morfismes com a R-mòduls $M \to R$.

Dues xarxes M i M' són equivalents mòdul homotècia si i només si l'isomorfisme entre les fibres genèriques de $\mathbb{P}(M)$ i $\mathbb{P}(M')$ puja a un isomorfisme.

Donada una aresta $[s, s']$ de $\mathcal{T}$, escollim $M \in s$ i $M' \in s'$ tal que $\pi M \subsetneq M' \subsetneq M$.

Els morfismes exhaustius $M \to M/M' \cong k$ i $M' \to M'/\pi M \cong k$ ens determinen punts $p \in \mathbb{P}(M)$ i $p' \in \mathbb{P}(M')$.

L'esclatament $B_p(\mathbb{P}(M))$ de $\mathbb{P}(M)$ en el punt p i $B_{p'}(\mathbb{P}(M'))$ són canònicament isomorfs i els designarem $\mathbb{P}(M, M')$.

Donat un vèrtex s de $\mathcal{T}$, sigui Ω_s l'esquema $\mathbb{P}(M) \setminus \mathbb{P}(M)(k)$ i $\widehat{\Omega_s}$ la completació de Ω_s al llarg de la fibra tancada.

Donada una aresta $[s, s']$ sigui $\Omega_{[s,s']}$ l'esquema $\mathbb{P}(M, M')$ menys els seus punts k-racionals i sigui $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$ la seva completació al llarg de la fibra tancada.

Els esquemes formals $\widehat{\Omega_s}$ i $\widehat{\Omega_{s'}}$ són subesquemes formals oberts de $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$.

Això ens permet d'anar enganxant els diferents esquemes formals $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$ per a totes les arestes de $\mathcal{T}$ fins a obtenir l'esquema formal $\widehat{\Omega}$.

La fibra especial de $\widehat{\Omega}$ és l'arbre de rectes projectives sobre k intersecant-se en el punts k-racionals. El seu graf associat és $\mathcal{T}$ (o sigui que $\mathcal{T}$ és el graf dual de la fibra especial de $\widehat{\Omega}$).

La fibra genèrica de $\widehat{\Omega_s}$ és isomorfa al subconjunt de C

$$\{\xi \in C \,|\, |\xi| \leq 1\} \setminus \bigcup_{\substack{a \in R \\ \text{mod } \pi R}} \{\xi \in C \,|\, |\xi - a| \leq 1\}$$

la fibra genèrica de $\widehat{\Omega_{s'}}$ s'identifica amb

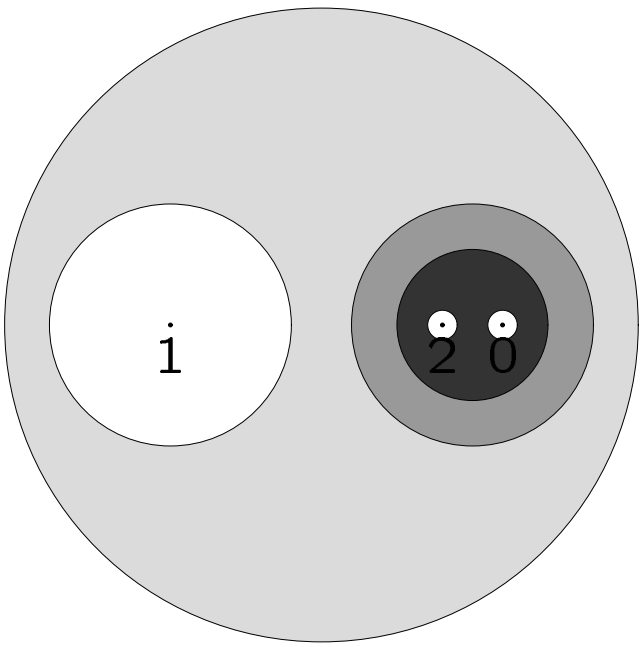
$$\{\xi \in C \,|\, |\xi| \leq |\pi|\} \setminus \bigcup_{\substack{b \in \pi R \\ \text{mod } \pi^2 R}} \{\xi \in C \,|\, |\xi - a| < |\pi|\}.$$

La fibra genèrica de $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$ és isomorfa al subconjunt de C

$$\{\xi \in C \,|\, |\xi| \leq 1\} \setminus \bigcup_{\substack{a \in R \\ \text{mod } \pi R}} \{\xi \in C \,|\, |\xi - a| < 1\}$$

$$\setminus \bigcup_{\substack{b \in \pi R \\ \text{mod } \pi^2 R}} \{\xi \in C \,|\, |\xi - a| < |\pi|\}$$

Fibra genèrica de $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$ per a $\mathbb{Q}_2$.



- Obert associat a s'
- Obert associat a]s,s'[
- Obert associat a s

Escollim $M \in s$ i $M' \in s'$ tal que $\pi M \subsetneq M' \subsetneq M$ i prenem e_1, e_2 una base de M tal que $e_1, \pi e_2$ sigui una base de M'.

Aleshores $e_1 = (e_1^1, e_1^2) \in K^2$ i $e_2 = (e_2^1, e_2^2) \in K^2$, i podem identificar Ω amb $C \backslash K$ mitjançant l'aplicació que a cada $[a : b] \in \Omega = \mathbb{P}^1_C \setminus \mathbb{P}^1_K$ li associa

$$\begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & C \setminus K \\ [a : b] & \longmapsto & \frac{ae_1^1 + be_1^2}{ae_2^1 + be_2^2} \end{array}$$

Utilitzem aquest morfisme per identificar la fibra genèrica de $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$ amb un subconjunt de

$$\Omega := \mathbb{P}^1_C \setminus \mathbb{P}^1_K,$$

el **semiplà superior no arquimedià**.

Un subgrup Γ de $\mathrm{PGL}(2,K)$ diem que es un subgrup de Schottky si és discret, lliure de torsió i lliure amb dos o més generadors.

Donat un subgrup de Schottky Γ, sigui Σ_Γ és conjunt de punts de $\mathbb{P}^1_K$ que són fixes per algun element de Γ diferent de l'identitat.

Tenim que $\Sigma_\Gamma \subset \mathbb{P}^1(K)$ i que és infinit (ja que Γ té dos o més generadors).

Donat un subconjunt infinit $\Sigma \subset \mathbb{P}^1(K)$, definim el subgraf $\mathcal{T}_\Sigma$ de $\mathcal{T}$ que té com a vèrtexs

$$Ver(\mathcal{T}_\Sigma) := \{[s(x_0,x_1,x_2)] \mid (x_0,x_1,x_2) \in \Sigma^3\},$$

on $[s((x_0,x_1,x_2))]$ és l'únic vèrtex de $\mathcal{T}$ intersecció de les tres semilinees associades a cada un dels x_i, i com a arestes totes les arestes entre els vèrtexs donats.

Finalment, denotem per Ω_Γ el subespai rígid analític de Ω associat a l'arbre $\mathcal{T}_\Sigma$ per a $\Sigma = \Sigma_\Gamma$, i per $\widehat{\Omega_\Gamma}$ el subesquema formal de $\widehat{\Omega}$ associat.

Teorema[Mumford]

Sigui K una extensió finita de $\mathbb{Q}_p$ amb anell d'enters R. Aleshores,

(i) Donat Γ un grup de Schottky de $\mathrm{PGL}(2,K)$ existeix una corba estable $\mathcal{X}_\Gamma$ sobre R amb reducció totalment degenerada split tal que la seva completació formal respecte a la fibra especial és isomorfa a $\Gamma\backslash\widehat{\Omega_\Gamma}$.

(ii) Donada una corba estable $\mathcal{X}$ sobre R amb reducció totalment degenerada split existeix un subgrup de Schottky Γ de $\mathrm{PGL}(2,K)$ i un isomorfisme entre $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}_\Gamma$.

Teorema[Mumford]

Sigui K una extensió finita de $\mathbb{Q}_p$. Aleshores

(i) Donat Γ un grup de Schottky de $\mathrm{PGL}(2,K)$ existeix una corba de Mumford X_Γ sobre K que és isomorfa a $\Gamma\backslash\Omega_\Gamma$ com a varietat rígida analítica.

(ii) Donada una corba de Mumford X sobre K existeix un subgrup de Schottky Γ de $\mathrm{PGL}(2,K)$ i un isomorfisme entre X i X_Γ.

Sigui B una àlgebra de quaternions indefinida de discriminant $D > 1$, i sigui $N \geq 1$ un nombre enter coprimer amb D.

Fixem $\mathcal{O}(D, N)$ un ordre d'Eichler de conductor N a B, i $\mathcal{O}(D)$ un ordre maximal.

Sigui $X(D, N)$ la corba de Shimura associada a $\mathcal{O}(D, N)$ (vegeu l'exposició 2).

$X(D, N)$ té un model projectiu i de tipus finit a $\mathbb{Z}[1/N]$.

Sigui p un nombre primer dividint D.

L'àlgebra de quaternions $B^{(p)}$ obtinguda a partir de B intercanviant els invariants locals p i ∞ és l'àlgebra de quaternions definida amb discriminant D/p.

Sigui $\mathcal{O}(D,N)^{(p)}$ un ordre d'Eichler de conductor N a $B^{(p)}$.

Sigui

$$\tilde{\Gamma} := \mathcal{O}(D,N)^{(p)}[1/p]^* \subset (B^{(p)} \otimes \mathbb{Q}_p)^* \cong \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)$$

i

$$\tilde{\Gamma}_+ = \{\gamma \in \tilde{\Gamma} \mid v_p(\det(\gamma)) \cong 0 \mod 2\}$$

Aleshores, la imatge Γ_+ de $\tilde{\Gamma}_+$ dins de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Q}_{p^2})$ és un subgrup de Schottky.

Sigui $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ l'anell de Witt de la clausura algebraica de $\mathbb{F}_p$.

Considerem l'acció de Γ a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ donada a través del Frobenius:

$$\gamma(\lambda) = \mathrm{Frob}^{n(\gamma)}(\lambda)$$

$\forall \lambda \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ i $\forall \gamma \in \Gamma$, on $n(\gamma) := v_p(\det(\gamma))$ i Frob és el Frobenius de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Podem fer operar així Γ a $\widehat{\Omega}\widehat{\otimes}\mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Teorema [Čerednik-Drinfeld]

$$\widehat{X(D,N)} \otimes \mathbb{Z}_p \cong \Gamma \backslash \left(\widehat{\Omega} \hat{\otimes} \mathbb{Z}_{p^\infty} \right)$$

Corol·lari

$$X(D,N) \otimes \mathbb{Q}_{p^2} \cong \Gamma_+ \backslash \Omega_{\mathbb{Q}_{p^2}}$$

com a varietats rígides analítiques sobre $\mathbb{Q}_{p^2}$.

Corol·lari

Si designem $W := \Gamma/\Gamma_+$, aleshores W és un grup d'ordre 2, generat per w operant a $\Omega_{\mathbb{Q}_{p^2}}$ via el Frobenius, i tenim

$$X(D,N) \otimes \mathbb{Q}_p \cong W \backslash \left(\Gamma_+ \backslash \Omega_{\mathbb{Q}_{p^2}} \right).$$

Proposició

Hi ha una única classe mòdul isogènia de parelles (A, i), on A és una superfície abeliana sobre $k := \overline{\mathbb{F}_p}$ i

$$i : \mathcal{O}(D) \hookrightarrow \mathrm{End}_k(A)$$

és una acció de $\mathcal{O}(D)$ a A.

A és isògena al producte de dues corbes el·líptiques supersingulars.

Tenim un isomorfisme natural

$$B^{(p)} \cong \mathrm{End}_{\mathcal{O}(D)}((A, i)) \otimes \mathbb{Q}.$$

Teorema [Drinfeld]

Sigui A una superfície abeliana sobre $\overline{\mathbb{F}_p}$ amb acció de $\mathcal{O}(D)$. Sigui Φ el grup formal associat a A.

Donada una $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-àlgebra B on p és nilpotent, designem per $F(B)$ el conjunt de classes d'isomorfisme de parelles (X, ρ) on X és un esquema formal sobre B de dimensió dos i alçada 4 amb acció de $\mathcal{O}(D)$ i ρ és una quasi-isogènia d'alçada 0

$$\rho : \Phi_{B/pB} \to X_{B/pB}.$$

Aleshores el functor F és representat per l'esquema formal sobre $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ donat per $\widehat{\Omega}\hat{\otimes}\mathbb{Z}_{p^\infty}$.