

Seminari de Teoria de Nombres 2007

Formes modulars de Siegel

L'objectiu global del seminari és presentar les nocions bàsiques sobre les formes modulars de Siegel, seguint un camí paral·lel a la teoria clàssica de formes modulars en una variable, remarcant-ne tant les semblances com les disparitats. Les referències principals per a tots els temes seran els llibres de Klingen [Kl 90], Maass [Ma 71] i Freitag [Fr 83].

1. El grup modular. Domini fonamental.

Cal presentar tots els conceptes necessaris *a priori* per introduir les formes modulars (que es presentaran en el tema següent). Essencialment, es tracta d'explicar amb detall l'acció del grup simplèctic sobre el semiplà superior de Siegel, però convindria acompanyar-la de la teoria de la reducció de Minkowski, que permetrà introduir el domini fonamental de Siegel. Seria interessant mostrar l'algorisme explícit de reducció de matrius en dimensió 2 ([Go 59], [Ga 00],[Do 79]). Així mateix, cal presentar el grup modular, amb els seus subgrups més coneguts, donant en tots els casos possibles famílies de generadors.

Referències: [Kl 90],[Fr 83], [Ma 71], [Do 79],[Ga 00], [Go 59], [Ig 64a], [Ig 66], [Ig 72a],[Ru 93].

2. Aspectes bàsics de les formes modulars de Siegel

Es definiran les formes modulars de Siegel (pot presentar-se la definició més general que es dona en [vdG 07], però no és imprescindible), remarcant el principi de Koecher i les seves conseqüències. S'introduiran els desenvolupaments de Fourier (es pot fer un resum molt ràpid de l'anàlisi de Fourier multidimensional necessari), i el canvi de variables de Siegel ([Si 55],[Ga 00]). Es definiran les formes parabòliques a partir de l'operador de Siegel (del que es veuran les seves propietats bàsiques), i es generalitzarà el producte escalar de Petersson. S'introduiran les formes singulars.

Convé il·lustrar el capítol amb exemples explícits: els Thetanullwerte i les formes que generen - especial atenció al discriminant-, els Thetanullwerte jacobians, les sèries d'Eisenstein i les sèries de Poincaré.

Referències: [Kl 90],[Fr 83], [Ma 71], [vdG 07], [Ru 95], [Ig 81b], [Ig 82].

3. Sèries de Dirichlet

Es definiran les sèries de Dirichlet associades a formes modulars de Siegel i es presentarà la seva equació funcional. S'introduiran les funcions zeta associades a formes quadràtiques i les funcions zeta de Selberg. Es presentarà la conjectura de Yoshida així com la seva connexió amb les conjectures de Salvati-Manni i Top.

Referències: [Fr 83], [Kl 90], [Ma 71], [Ok 06], [SM T 93], [Yo 80].

4. Teoria de Hecke. Coeficients de les sèries de Fourier

Es definirà l'àlgebra de Hecke associada a grups lineals, i a grups simplèctics, respectivament. Es donarà la relació entre els operadors de Hecke i l'operador de Siegel. Convé donar exemples: coeficients de Fourier de les sèries d'Eisenstein i estudi del creixement dels coeficients de Fourier de les formes de Siegel.

Referències: [Kl 90],[Fr 83], [Ma 71], ([Ko 92], [Ko 93], [Ko 97a], [Ko 97b], [Ko 04a], [Ko 04b], [Bo 84], [B K 93], [R S 74].

5. Càlculs explícits en dimensions 2 i 3

S'explicaran els treballs de Igusa sobre l'estructura de l'anell graduat de formes modulars de Siegel en dimensió 2, proveint exemples explícits de formes, amb els seus desenvolupaments de Fourier. Es presentaran les eines de càlcul introduïdes per Skoruppa. Finalment, es comentaran també els treballs de Runge i Tsuyumine per a dimensió 3.

Referències: [Kl 90], [Ig 62], [Ig 64b], [Ru 95], [Sk 92], [Ts 86a], [Ts 86b], [Ts 87].

References

- [Bo 82] Böcherer, Siegfried, *Über gewisse Siegelsche Modulformen zweiten Grades*, Math. Ann. 261 (1982), no. 1, 23–41. MR0675203 (84j:10031)
- [Bo 84] Böcherer, Siegfried, *Über die Fourierkoeffizienten der Siegelschen Eisensteinreihen*, Manuscripta Math. 45 (1984), no. 3, 273–288. MR0734842 (86b:11037)
- [B K 93] Böcherer, Siegfried; Kohlen, Winfried, *Estimates for Fourier coefficients of Siegel cusp forms*, Math. Ann. 297 (1993), no. 3, 499–517. MR1245401 (95a:11038)
- [B R 88] Böcherer, Siegfried; Raghavan, S. *On Fourier coefficients of Siegel modular forms* J. Reine Angew. Math. 384 (1988), 80–101. MR0929979 (89c:11068)
- [Do 79] Donaldson, John L. *Minkowski reduction of integral matrices*. Math. Comp. 33 (1979), no. 145, 201–216. MR0514819 (80b:10044)
- [Fr 83] Freitag, Eberhard. *Siegelsche Modulfunktionen*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 254. Springer-Verlag, Berlin, 1983. x+341 pp. ISBN: 3-540-11661-3 MR0871067 (88b:11027)
- [Ga 00] Gaudry, Pierrick, *Algorithmique des courbes hyperelliptiques et applications a la cryptologie*, tesi doctoral (2000). <http://http://www.loria.fr/~gaudry/papers.html>
- [Go 59] Gottschling, Erhard. *Explizite Bestimmung der Randflächen des Fundamentalbereiches der Modulgruppe zweiten Grades*. Math. Ann. 138 (1959) 103–124. MR0107020 (21 #5748)
- [Ig 60] Igusa, Jun-ichi, *Arithmetic variety of moduli for genus two*. Ann. of Math. (2) 72 (1960) 612–649. MR0114819 (22 #5637)
- [Ig 62] Igusa, Jun-ichi, *On Siegel modular forms of genus two*. Amer. J. Math. 84 (1962) 175–200. MR0141643 (25 #5040)
- [Ig 64a] Igusa, Jun-ichi, *On the graded ring of theta-constants*. Amer. J. Math. 86 (1964) 219–246. MR0164967 (29 #2258)

- [Ig 64b] Igusa, Jun-ichi, *On Siegel modular forms genus two. II*. Amer. J. Math. 86 (1964) 392–412. MR0168805 (29 #6061)
- [Ig 66] Igusa, Jun-ichi, *On the graded ring of theta-constants. II*. Amer. J. Math. 88 (1966) 221–236. MR0200482 (34 #375)
- [Ig 67] Igusa, Jun-ichi, *Modular forms and projective invariants*. Amer. J. Math. 89 (1967) 817–855. MR0229643 (37 #5217)
- [Ig 72a] Igusa, Jun-ichi, *Theta functions*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 194. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. x+232 pp. MR0325625 (48 #3972)
- [Ig 79] Igusa, Jun-ichi, *On the ring of modular forms of degree two over \mathbb{Z}* . Amer. J. Math. 101 (1979), no. 1, 149–183. MR0527830 (80d:10039)
- [Ig 81a] Igusa, Jun-ichi, *On the variety associated with the ring of thetanullwerte*. Amer. J. Math. 103 (1981), no. 2, 377–398. MR0610482 (84b:14023)
- [Ig 81b] Igusa, Jun-ichi, *On the nullwerte of Jacobians of odd theta functions*. Symposia Mathematica, Vol. XXIV (Sympos., INDAM, Rome, 1979), pp. 83–95, Academic Press, London-New York, 1981. MR0619242 (83e:14030)
- [Kl 90] Klingen, Helmut, *Introductory lectures on Siegel modular forms*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 20. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. ISBN: 0-521-35052-2 MR1046630 (91a:11021)
- [Ko 92] Kohnen, Winfried, *Estimates for Fourier coefficients of Siegel cusp forms of degree two. II*, Nagoya Math. J. 128 (1992), 171–176. MR1197036 (94f:11032b)
- [Ko 93] Kohnen, Winfried, *Estimates for Fourier coefficients of Siegel cusp forms of degree two*, Compositio Math. 87 (1993), no. 2, 231–240. MR1219635 (94f:11032a)
- [Ko 97a] Kohnen, Winfried, *On the average growth of Fourier coefficients of Siegel cusp forms of genus 2*, Pacific J. Math. 179 (1997), no. 1, 119–121. MR1452528 (98c:11039)
- [Ko 97b] Kohnen, Winfried, *On conjecture of Resnikoff and Saldaña*, Bull. Austral. Math. Soc. 56 (1997), no. 2, 235–237. MR1470075 (98h:11054)

- [Ko 04a] Kohlen, Winfried, *On Fourier coefficients of modular forms of different weights*, Acta Arith. 113 (2004), no. 1, 57–67. MR2046968 (2005b:11054)
- [Ko 04b] Kohlen, Winfried, *On the growth of Fourier coefficients of certain special Siegel cusp forms*, Math. Z. 248 (2004), no. 2, 345–350. MR2088932 (2005f:11077)
- [K SM 99] Kohlen, Winfried; Salvati Manni, Riccardo, *A remark on the growth of Fourier coefficients of Siegel cusp forms*, Math. Z. 231 (1999), no. 2, 249–252. MR1703348 (2000e:11059)
- [K S 89] Kohlen, Winfried ; Skoruppa, Nils-Peter. *A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree two*. Invent. Math. 95 (1989), no. 3, 541–558. MR0979364 (90b:11050)
- [Ma 71] Maass, Hans, *Siegel's modular forms and Dirichlet series*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 216. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. MR0344198 (49 #8938)
- [Ma 72] Maass, Hans, *Über die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades*, Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 38, no. 14, 13 pp. (1972). MR0325543 (48 #3890)
- [Ma 78] Maass, Hans, *Lineare Relationen für die Fourierkoeffizienten einiger Modulformen zweiten Grades*, Math. Ann. 232 (1978), no. 2, 163–175. MR0498401 (58 #16529)
- [Ok 06] Okazaki, Takeo, *Proof of R. Salvati Manni and J. Top's conjectures on Siegel modular forms and abelian surfaces*, Amer. J. Math. 128, (2006), no. 1, 139–165. MR2197070 (2007a:11062)
- [R S 74] Resnikoff, Howard L. ; Saldaña, R. L. *Some properties of Fourier coefficients of Eisenstein series of degree two*, J. Reine Angew. Math. 265 (1974), 90–109. MR0352009 (50 #4497)
- [Ru 93] Runge, Bernhard, *On Siegel modular forms. I*, J. Reine Angew. Math. 436 (1993), 57–85. MR1207281 (94c:11041)
- [Ru 95] Runge, Bernhard, *On Siegel modular forms. II*, Nagoya Math. J. 138 (1995), 179–197. MR1339948 (97b:11066)

- [Ru 96] Runge, Bernhard, *Codes and Siegel modular forms*, Discrete Math. 148 (1996), no. 1-3, 175–204. MR1368288 (97h:11051)
- [SM T 93] Salvati Manni, Riccardo ; Top, Jaap. *Cuspforms of weight 2 for the group $\Gamma(4, 8)$* , Amer. J. Math. 115, (1993), no. 2, 455–486. MR1216438 (94e:11050)
- [Si 43] Siegel, Carl Ludwig, *Symplectic geometry*, Amer. J. Math. 65, (1943). 1–86. MR0008094 (4,242b)
- [Si 55] Siegel, Carl Ludwig, *Zur Theorie der Modulfunktionen n -ten Grades*, (German) Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955), 677–681. MR0074534 (17,602d)
- [Si 66] Siegel, Carl Ludwig . *Gesammelte Abhandlungen* Bände I, II, III. (Herausgegeben von K. Chandrasekharan und H. Maass. Springer-Verlag, Berlin-New York 1966. MR0197270 (33 #5441)
- [Si 79] Siegel, Carl Ludwig . *Gesammelte Abhandlungen*, Band IV, Edited by K. Chandrasekharan and H. Maass. With corrections to the first three volumes. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979. MR0543842 (80k:01066)
- [Sk 92] Skoruppa, Nils-Peter. *Computations of Siegel modular forms of genus two*. Math. Comp. 58 (1992), no. 197, 381–398. MR1106982 (92e:11041)
- [Ts 86a] Tsuyumine, Shigeaki, *On Siegel modular forms of degree three*, Amer. J. Math. 108 (1986), no. 4, 755–862. MR0853217 (88a:11047a)
- [Ts 86b] Tsuyumine, Shigeaki, *Addendum to: "On Siegel modular forms of degree three"*, Amer. J. Math. 108 (1986), no. 4, 1001–1003. MR0853222 (88a:11047b)
- [Ts 87] Tsuyumine, Shigeaki, *On the Siegel modular function field of degree three*, Compositio Math. 63 (1987), no. 1, 83–98. MR0906380 (89a:11055).
- [vdG 07] van der Geer, Gerard, *Siegel modular forms*, preprint, 2007. <http://xxx.lanl.gov/abs/math.AG/0605346>
- [Yo 80] Yoshida, Hiroyuki, *Siegel's modular forms and the arithmetics of quadratic forms*, Invent. Math. 60 (1980), 193–248. MR0586427 (81m:10051).