El teorema de Chen

Xavier Xarles

Conjectura de Goldbach (1742)

Binària: Tot nombre parell (> 2) és suma de dos nombres primers.

Ternària: Tot nombre senar (> 5) és suma de tres nombres primers.

Primers bessons: Hi ha infinits primers p tals que $p+2$ és primer.

Què sabem?

- Chen (1966): Tot nombre parell prou gran és suma de un primer i un quasiprimer (i.e. de $\mathbb{P}_2$).

- Vinogradov (1937): Tot nombre senar prou gran és suma de tres primers. Prou gran: $> 10^{43000}$

- Ramaré (1999): Tot nombre és suma de com molt 7 primers.

- Deshouillers, Effinger, Te Riele and Zinoviev (1997): GRH implica que tot nombre senar és suma de tres primers.

Teorema: (Chen 1966, 1973) Tot nombre parell suficientment gran és suma d'un nombre primer i un nombre que té com a molt dos factors primers.

$$|\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq N \ , \ N - p \in \mathbb{P}_2\}| \geq C \cdot \mathcal{S}(N) \frac{N}{\log^2(N)},$$

on

$$\mathcal{S}(N) := 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{2<p|N} \frac{p-1}{p-2}$$

i

$$C = 0.0848$$

(Chen diu $C = 0.33$).

Constant dels nombres primers bessons:

$$B_2 := 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = 2 \prod_{p>2} \left(\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\right) \sim 1.32045665$$

Teorema: (Chen) Hi ha infinits primers p tals que $p + 2 \in \mathbb{P}_2$.

$$|\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq N \, , \, p + 2 \in \mathbb{P}_2\}| \geq C \cdot B_2 \frac{N}{\log^2(N)},$$

on $C = 1/31 \sim 0.0323$.

Conjectura: (Goldbach, Hardy-Littlewood) Tot nombre parell suficientment gran (> 2) és suma de dos nombres primers.

$$|\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq N \ , \ N - p \in \mathbb{P}\}| \sim B_2 \prod_{2<p|N} \frac{p-1}{p-2} \frac{N}{\log^2(N)}.$$

Igualment,

$$|\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq N \ , \ p + 2 \in \mathbb{P}\}| \sim B_2 \frac{N}{\log^2(N)},$$

Fita superior: garbell de Selberg

Teorema: Si N es un nombre parell (prou gran) i

$$|\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq N \ , \ N - p \in \mathbb{P}\}| \leq 8 \cdot \mathcal{S}(N) \frac{N}{\log^2(N)},$$

on

$$\mathcal{S}(N) := 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{2<p|N} \frac{p-1}{p-2}.$$

Inici del garbell

Sigui N un nombre parell.

$$A := \{N - p \mid 1 \leq p < N, (p, N) = 1\},$$

Notació:

$$P_N := \{p \in \mathbb{P} \mid (p, N) = 1\}.$$

Tenim

$$|A| = \pi(N) - \omega(N) = \frac{N}{\log(N)}\left(1 + O(\frac{1}{\log(N)})\right),$$

ja que

$$\pi(N) = \frac{N}{\log(N)}\left(1 + O(\frac{1}{\log(N)})\right).$$

$$\omega(N) = O(\log(N))$$

(Exercici: Penseu en els nombres N de la forma $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_n$ producte dels n-primers primers).

Fixem un $z < N$ (de fet $z \leq \sqrt{N}$).

Objectiu: Garbellar de A tots els nombres que són divisibles per primers menors que z.

Considerem

$$P(z) := \prod_{p<z, p\in\mathbb{P}} p$$

i

$$S(A, P(z)) := |\{a \in A \mid (a, P(z)) = 1\}| .$$

Observació important:

Si posem $z = N^{1/k}$ i calculem $S(A, P(z))$:

ens queden nombres de $\mathbb{P}_{k-1}$.

O sigui que són producte de com a molt $k-1$ nombres primers (pseudo-primes d'ordre $k-1$).

Conjunt a estudiar:

$A_d := \{a \in A \mid a \equiv 0 \mod d\} = \{N - p \mid p \in P_N\ ,\ p \equiv N \mod d\}.$

Tenim

$$|A_d| = \pi(N; d, N) + O(\omega(N)) = \frac{\pi(N)}{\phi(d)} + r(d)$$

on

$$\phi(d) = \ \phi \text{ d'Euler} \qquad r(d) = \ \text{terme d'error}$$

$$\pi(N) = |A| + O(\log(N))$$

$$\pi(x; d, a) := \{p \in \mathbb{P} \mid p \equiv a \mod d\} = \frac{\pi(x)}{\phi(d)} + \delta(x; a, d)$$

sempre que $(a, d) = 1$.

$\delta(x; a, d) =$ terme d'error (Bombieri-Vinogradov).

Utilitzant així l'estratègia dels garbells ja estudiada, tindrem que

$$S(A, P(z)) \simeq X\, V(z) + \text{ Error}$$

on

$$X = \frac{N}{\log(N)} \sim |A|$$

i

$$V(z) = \sum_{d|P(z)} \frac{\mu(d)}{\phi(d)} = \prod_{p|P(z)} \left(1 - \frac{1}{\phi(p)}\right) = \prod_{p|P(z)} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$$

La serie singular

Anem primer a veure d'on surt el terme

$$\mathcal{S}(N) := 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{2<p|N} \frac{p-1}{p-2}.$$

Terme principal d'abans: $X\, V(z) \sim V(z) N / \log(N)$

Així esperem que:

$$V(z) \simeq K \mathcal{S}(N) / \log(z)$$

per una certa constant K

Lema: Per a tot $z < N$ tenim que

$$V(z) = \prod_{p<z,(p,N)=1} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) = \mathcal{S}(N)\frac{e^{-\gamma}}{\log z}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log N}\right)\right).$$

$$\mathcal{S}(N) := 2\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{2<p|N}\frac{p-1}{p-2}$$

Demostració: Sigui

$$W(z) := \prod_{2<p<z}\left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$$

Veurem que

$$\frac{V(z)}{W(z)} = \prod_{2<p,p|N}\frac{p-1}{p-2}\left(1 + O(\frac{1}{\log N})\right)$$

$$W(z) = 2\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{e^{-\gamma}}{\log z}\left(1 + O(\frac{1}{\log z})\right).$$

Tenim que

$$\frac{V(z)}{W(z)} = \prod_{2<p<z,p|N} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)^{-1} = \prod_{2<p,p|N} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)^{-1} \prod_{p\geq z,p|N} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$$

Ara be,

$$\prod_{2<p,p|N} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)^{-1} = \prod_{2<p,p|N} \frac{p-1}{p-2}$$

i

$$\prod_{p\geq z,p|N} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) = 1 + O(\frac{1}{\log N})$$

$$\left(> 1 - \frac{8\log(N)}{N^{1/8}}\right)$$

D'altre banda

$$W(z) = 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \geq z} \left(1 - \frac{1}{p(p-2)}\right) \prod_{p<z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

i tenim que (Mertens)

$$\prod_{p<z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log z} \left(1 + O(\frac{1}{\log z})\right)$$

i que

$$\prod_{p \geq z} \left(1 - \frac{1}{p(p-2)}\right) = 1 + O(\frac{1}{z}).$$

$$\left(< 1 + \frac{2}{z}\right)$$

El teorema de Bombieri-Vinogradov

Volem fitar el terme d'error:

$$S(A, P(z)) \simeq X\ V(z) + \text{ Error}$$

on

$$X = \frac{N}{\log(N)} \quad \text{i } V(z) = \prod_{p|P(z)} \left(1 - \frac{1}{\phi(p)}\right).$$

Volem fitar així el terme

$$\delta(x; a, d) = \frac{\pi(x)}{\phi(d)} - \pi(x; d, a)$$

en valor absolut.

Que podem fer? Fitar l'error al sumar $\delta(x; a, d)$ per d prou petit respecte x.

Teorema: (Bombieri-Vinogradov) Per a tot $A > 0$ existeix una constant $B = B(A)$ tal que, si denotem per

$$D(A) := \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\log x)^{B(A)}}$$

aleshores

$$\sum_{d<D(A)} \max_{(d,a)=1} |\delta(x; d, a)| \ll \frac{x}{(\log x)^A}.$$

Bombieri demostra que $B(A) = 3A + 22$.

Vaughau demostra que $B(A) = A + 5/2$.

Hipòtesis de Riemann Generalitzada implica $B = A + 1$.

Resultat ideal

$$D(A) := x^{\delta}$$

per algun $1 > \delta > 1/2$.

Observació: Per aplicar el teorema voldrem sumar només d's petits. (e.g. $d < D$ per un D donat pel teorema).

Esperem que el terme principal sigui de la forma

$$N/(\log N)^2,$$

per tant volem el terme d'error més petit e.g.

$$N/(\log N)^3,$$

i.e. $A = 3$ en el teorema, i per tant $B = 6$ ens anirà bé.

Densitat del garbell

Anem a veure que efectivament estem en un cas de garbell lineal. Cal veure així el següent lema.

Lema: Sigui N un nombre parell fixat. Aleshores, per a tot $w \geq 2$ i per a tot $z > w$ tenim que

$$\prod_{w \leq p < z, p \in P_N} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)^{-1} < \frac{\log(z)}{\log(w)} \left(1 + O(\frac{1}{\log w})\right)$$

Demostració: Observem primer que

$$\prod_{w\le p<z}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)^{-1} = \prod_{w\le p<z}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\prod_{w\le p<z}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$$

Mertens: si $2<w<z$

$$\prod_{w\le p<z}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} < \frac{\log(z)}{\log(w)}\left(1+O(\frac{1}{\log w})\right)$$

D'altre banda,

$$\prod_{w\le p}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)} = \prod_{w\le p}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right) < \prod_{w\le n}\left(1+\frac{1}{n(n-2)}\right) = \frac{w-1}{w-2} < 2$$

Fitació inferior de $S(A, P(z))$

Proposició: (Jurkart-Richert) Sigui $D \geq z^2$ i

$$s = \frac{\log(D)}{\log(z)}.$$

Aleshores

$$(F(s) + \epsilon)V(z)X + R > S(A, P(z)) > (f(s) + \epsilon)V(z)X - R$$

on

$$R = \sum_{d<D, d|P(z)} |r(d)|$$

i $\epsilon \longrightarrow 0$ quan $D \longrightarrow \infty$.

Recordem que

$$r(d) = \pi(N; d, N) - \frac{\pi(N)}{\phi(d)} + O(\log N) = \delta(N; d, N) + O(\log N)$$

$$R = \sum_{d<D, d|P(z)} |r(d)| \sim \sum_{d<D} |\delta(N; d, N)| \ll \frac{N}{\log(N)^3}$$

per a

$$D = D(3) := \frac{N^{1/2}}{(\log N)^{B(3)}}$$

per una certa constant $B(3)$ (e.g. $B(3) = 6$).

Així, si posem $z = N^{1/k}$, i $D = D(3)$

$$s := \frac{\log D}{\log z} = \frac{k}{2} - kB(3)\frac{\log\log N}{\log N},$$

Observem que només obtindrem alguna fita inferior positiva si $s > 2$ (ja que $f(2) = 0$), i per tant si $k > 4$.

Posant $k = 5$ i utilitzant que si $2 \leq s \leq 4$ aleshores

$$f(s) = \frac{2e^{\gamma}\log(s-1)}{s}$$

Corol·lari: N parell prou gran, aleshores

$$N = \mathbb{P} + \mathbb{P}_4.$$

Concretament tenim que

$$|\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq N \ , \ N - p \in \mathbb{P}_4\}| > S(A, P(N^{1/5})) >$$

$$\left(5e^{\gamma} f(\frac{5}{2}) + \epsilon\right) \mathcal{S}(N) \frac{N}{\log(N)^2} > .5778\, \mathcal{S}(N) \frac{N}{\log(N)^2}$$

Més endavant utilitzarem el cas $k = 8$ i per tant, utilitzant que

$$f(4) = \frac{e^{\gamma} \log(3)}{2}.$$

Corol·lari: Si $z = N^{1/8}$, aleshores per a N prou gran tenim que

$$S(A, P(z)) > \left(\frac{e^{\gamma} \log(3)}{2} + \epsilon\right) \frac{N}{\log(N)} V(z)$$

L'estratègia de Chen

Problema: si ho apliquem a $z = N^{1/k}$ amb k massa petit ($k = 3$ o $k = 2$), la fita inferior és negativa.

Observació: tot nombre no divisible per a cap primer menor que la seva arrel k-èssima és de $\mathbb{P}_{k-1}$. Però no tot nombre de $\mathbb{P}_{k-1}$ compleix això.

Idea: considerar els nombres que no són divisibles per cap nombre menor que $N^{1/k}$, $k = 8$, o bé $k = 10$ (Chen), i treure els nombres que no són producte de dos nombres primers.

Estrategia: contar els nombres primers $p \leq N$, amb $(p, N) = 1$, tals que $N - p$:

1. no és divisible per a cap nombre menor que $N^{1/3}$ (i per tant és com a molt producte de dos nombres primers), o
2. és divisible per un únic nombre primer p_1, amb $N^{1/8} \leq p_1 < N^{1/3}$, i per tant $N - p = p_1 m$, amb m no divisible per a cap nombre primer menor que $N^{1/3}$, i a més m és primer.

Primer pas: Considerem , si $z = N^{1/8}$,

$$S(A, P(z)) - \frac{1}{2} \sum_{N^{1/8} \le p_1 < N^{1/3}, p_1 \in P_N} S(A_{p_1}, P(z)))$$

Estem sumant

$\mathbf{1}$ si $N - p$ no és divisible per a **cap** nombre primer $< N^{1/3}$.

$\mathbf{1/2}$ si $N - p$ és divisible per exactament **un** $N^{1/3} < p_1 < N^{1/8}$.

$\mathbf{0}$ si $N - p$ és divisible per exactament **dos** $N^{1/3} < p_1 < N^{1/8}$.

$\mathbf{-1/2}$ si $N - p$ és divisible per exactament **tres** $N^{1/3} < p_1 < N^{1/8}$.

$\mathbf{(2-r)/2}$ si $N - p$ és divisible per exactament $\underline{\mathbf{r}}$ $N^{1/3} < p_1 < N^{1/8}$ $(r \le 7)$.

Si és aquesta suma és > 0 aleshores :

- $N = p + \mathbb{P}_2$ amb pes 1, o bé

- $N = p + p_1 m$ amb pes $1/2$, on
  - $N^{1/8} \leq p_1 < N^{1/3}$
  - m no divisible per a cap primer $< N^{1/3}$ (per tant $m \in P_2\mathbb{P}_2$).

Només falta: Treure els m's no primers (amb pes $1/2$).

Segon pas: Considerem

$$B := \left\{ N - p_1p_2p_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} N^{1/8} \leq p_1 < N^{1/3} \leq p_2 \leq p_3 \,, \\ p_1p_2p_3 < N \,, (p_1p_2p_3, N) = 1 \end{array} \right\}$$

Intentem fitar el nombre de primers de B.

I.e. Si $y = N^{1/3}$,

$$Primers(B) < S(B, P(y)) + y = S(B, P(y)) + N^{1/3}$$

Remarca: Hem intercanviat els papers de p i de $p_1p_2p_3$.

Fet important:

$$B \sim Const.|A|$$

Veurem

$$Const = 0.3631$$

Si denotem per

$$z = N^{1/8} \text{ i per } y = N^{1/3},$$

aleshores

$$|\{p \in \mathbb{P} \mid p \le N \ , \ N - p \in \mathbb{P}_2\}| >$$

$$S(A, P(z)) - \frac{1}{2} \sum_{z \le p_1 < y \ , p_1 \in P_N} S(A_{p_1}, z)) - \frac{1}{2} S(B, P(y)) - y$$

Part més difícil: fitació superior de $S(B, P(y))$.

Fitació superior de $\sum_{z\leq q<y\,,q\in P_N} S(A_q,P(z))$

Teorema: Si $z=N^{1/8}$ i $y=N^{1/3}$, aleshores

$$\sum_{z\leq q<y\,,q\in P_N} S(A_q,P(z)) < \left(\frac{e^{\gamma}\log 6}{2}+\epsilon\right)\frac{N}{\log N}V(z).$$

Corol·lari: N parell prou gran, aleshores

$$N = \mathbb{P} + \mathbb{P}_3.$$

Concretament tenim que

$$|\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq N \ , \ N - p \in \mathbb{P}_3\}| >$$

$$> S(A, P(N^{1/8})) - \frac{1}{2} \sum_{N^{1/8} \leq q < N^{1/3} \ , q \in P_N} S(A_q, P(N^{1/8})) >$$

$$\left(\frac{e^\gamma \log 3}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^\gamma \log 6}{2} + \epsilon \right) \frac{N V(N^{1/8})}{\log(N)} >$$

$$> 8 \left(\frac{\log 3}{2} - \frac{\log 6}{4} + \epsilon \right) \mathcal{S}(N) \frac{N}{\log(N)^2} >$$

$$> 0.811 \mathcal{S}(N) \frac{N}{\log(N)^2}$$

La mida de B

Lema:

$$|B| = b\frac{N}{\log(N)} + O\left(\frac{N}{(\log(N))^2}\right)$$

on

$$b := \iint\limits_{\substack{\frac{1}{8} < \alpha < \frac{1}{3} < \beta \\ \alpha + 2\beta < 1}} (\alpha\beta)^{-1}(1-\alpha-\beta)^{-1}\,d\alpha\, d\beta =$$

$$= \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{3}} \frac{\log(2-3\alpha)}{\alpha(1-\alpha)}\,d\alpha = 0.3631$$

Demostració:

Recordem que

$$B := \left\{ N - p_1p_2p_3 \mid \begin{array}{l} N^{1/8} \le p_1 < N^{1/3} \le p_2 \le p_3 \,, \\ p_1p_2p_3 < N \,, (p_1p_2p_3, N) = 1 \end{array} \right\}$$

Denotem $z = N^{1/8}$ i $y = N^{1/3}$.

Així tenim que

$$|B| \le \sum_{\substack{z \le p_1 < y \le p_2 \le p_3 \\ p_1p_2p_3 < N}} 1 \le \sum_{\substack{z \le p_1 < y \le p_2 \\ p_1p_2^2 < N}} \pi\left(\frac{N}{p_1p_2}\right)$$

$$< \sum_{\substack{z \le p_1 < y \le p_2 \\ p_1 p_2^2 < N}} \frac{N}{p_1 p_2} \log \left(\frac{N}{p_1 p_2} \right)^{-1}$$

$$= N \sum_{z \le p_1 < y} \frac{1}{p_1} \sum_{y \le p_2 < (N/p_1)^{1/2}} \frac{1}{p_2 \log(\frac{N}{p_1 p_2})}.$$

Usem que:

$$\sum_{p<t} \frac{1}{p} = \log\log t + B + O(\frac{1}{t}).$$

per una certa constant B.

Tenim:

$$\sum_{y \le p_2 < (N/p_1)^{1/2}} \frac{1}{p_2 \log(\frac{N}{p_1 p_2})} \sim \int_y^{(N/p_1)^{1/2}} \frac{1}{\log(\frac{N}{p_1 t})} d \log \log t$$

Igualment:

$$N \sum_{z \le p_1 < y} \frac{1}{p_1} \sum_{y \le p_2 < (N/p_1)^{1/2}} \frac{1}{p_2 \log(\frac{N}{p_1 p_2})} \sim$$

$$\sim N \int_{N^1/8}^{N^{1/3}} \int_y^{(N/u)^{1/2}} \frac{1}{\log(\frac{N}{ut})} d \log \log t d \log \log u$$

Canvi $t = N^\alpha$ i $u = N^\beta$:

$$= \frac{N}{\log N} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{3}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1-\beta}{2}} \frac{d\alpha d\beta}{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}.$$

Fitació superior de $S(B, P(y))$

Teorema:

$$S(B, P(y)) < \left(\frac{be^{\gamma}}{2} + \epsilon\right) \frac{NV(z)}{\log N} + O\left(\frac{N}{(\log N)^3}\right)$$

on $b = 0.3631$.

Només cal veure que:

$$S(B,P(y)) < \left(\frac{e^\gamma}{2} + \epsilon\right) |B|V(z) + O(\frac{N}{(\log N)^3}).$$

El terme principal: Prenem

$$D = \frac{N^{1/2}}{(\log N)^A}$$

i tenim

$$S(B,P(y)) < (F(s)+\epsilon)|B|V(y) + Error$$

on

$$s = \frac{\log D}{\log y} = \frac{3}{2} + O(\frac{\log\log N}{\log N}) \in [1,3]$$

ja que $y = N^{1/3}$.

Així

$$F(s) = \frac{4e^\gamma}{3} + O(\frac{\log\log N}{\log N})$$

i per tant

$$S(B,P(y)) < \left(\frac{4e^\gamma}{3}+\epsilon\right)|B|V(y)+Error =$$

$$= \left(\frac{e^\gamma}{2}+\epsilon\right)|B|V(z)+Error$$

utilitzant que

$$V(y)=V(z)\left(\frac{\log z}{\log y}+O(\frac{1}{\log N})\right)=V(z)\left(\frac{3}{8}+O(\frac{1}{\log N})\right)$$

(i.e.

$$\frac{4e^\gamma}{3}\frac{3}{8}=\frac{e^\gamma}{2}).$$

Problema:

FITACIÓ DEL ERROR!

El teorema de Bombieri-Vinogradov no el podem aplicar!

Però funciona!

Teoria del Gran Garbell + Estudi de Caràcters de Dirichlet +...

El pas final

Posem tot el que tenim junt:

$$|\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq N \ , \ N - p \in \mathbb{P}_2\}| >$$

$$S(A, P(z)) - \frac{1}{2} \sum_{z \leq p_1 < y \, , p_1 \in P_N} S(A_{p_1}, z)) - \frac{1}{2} S(B, P(y)) >$$

$$\left(\frac{e^\gamma \log(3)}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^\gamma \log 6}{2} - \frac{1}{2} \frac{b e^\gamma}{2} + \epsilon \right) \frac{N}{\log(N)} V(z) =$$

$$= 8 \left(\frac{\log(3)}{2} - \frac{\log 6}{4} - \frac{b}{4} + \epsilon \right) \mathcal{S}(N) \frac{N}{\log(N)^2}$$

$$> 0.0848 \mathcal{S}(N) \frac{N}{\log(N)^2}.$$

Apèndix: Fitació superior de $\sum_{z\le q<y\,,q\in P_N} S(A_q, P(z))$

Teorema: Si $z = N^{1/8}$ i $y = N^{1/3}$, aleshores

$$\sum_{z\le q<y\,,q\in P_N} S(A_q, P(z)) < \left(\frac{e^{\gamma}\log 6}{2} + \epsilon\right)\frac{N}{\log N}V(z).$$

Aplicarem el Teorema de Jurkat-Richert

Prenem

$$S(A_q, z) < Constant|A_q|V(z) + Error$$

on la constant i el terme d'error els hem de buscar de manera òptima.

El terme d'error: Suma de

$$r_q(d) = |(A_q)_d| - \frac{|A_q|}{\phi(d)} = |A_{qd}| - \frac{|A_q|}{\phi(d)} =$$

(hem utilitzat$(q, d) = 1$ ja que $z \leq q$)

$$= \left(|A_{qd}| - \frac{|A|}{\phi(qd)}\right) + \left(\frac{|A|}{\phi(qd)} - \frac{|A_q|}{\phi(d)}\right) =$$

i per definició de $r(d)$

$$= r(qd) - \frac{r(q)}{\phi(d)}.$$

Teorema de Bombieri-Vinogradov: prenen

$$D_q := \frac{D(4)}{q} := \frac{N^{1/2}}{(\log N)^{B(4)}}$$

per tenir error $\ll N/\log(N)^4$, (i.e. $B(4) = 4 + 3 = 7$).

El teorema de Jurkat-Richert:

$$S(A_q, z) < (F(s_q) + \epsilon)|A_q|V(z) + R_q$$

on

$$s_q := \frac{\log D_q}{\log z}$$

i

$$R_q = \sum_{d<D_q, d|P(z)} |r_q(d)| \leq \sum_{d<D_q, d|P(z)} |r(qd)| + |r(q)| \sum_{d<D_q, d|P(z)} \frac{1}{\phi(d)}.$$

Volem calcular:

$$\sum_{z\leq q<y\,,q\in P_N} S(A_q, P(z)) <$$

$$< \sum_{z\leq q<y\,,q\in P_N} (F(s_q)+\epsilon)|A_q|V(z) + \sum_{z\leq q<y\,,q\in P_N} R_q$$

Terme d'error:

$$\sum_{z\le q<y\,,q\in P_N} R_q \le$$

$$\le \sum_{z\le q<y\,,q\in P_N} \sum_{d<D/q,d|P(z)} r(qd) + \sum_{z\le q<y\,,q\in P_N} |r(q)| \sum_{d<D/q,d|P(z)} \frac{1}{\phi(d)} \le$$

$$\sum_{d'<D,d|P(z)} r(d') + \sum_{z\le q<y\,,q\in P_N} |r(q)| \sum_{d<N^{1/2}} \frac{1}{\phi(d)} \ll$$

$$\ll \frac{N}{(\log N)^4} + \frac{N}{(\log N)^4}\log N \ll \frac{N}{(\log N)^3}$$

(Bombieri-Vinogradov a les sumes).

Observem $y < N^{1/3} < D \ N$ és prou gran, ja que

$$D = \frac{N^{1/2}}{(\log N)^{B(4)}};$$

Hem utilitzat també

$$\sum_{d<N} \frac{1}{\phi(d)} \ll \log N$$

(exercici!).

Terme principal:

$$s_q := \frac{log(D/q)}{\log z} = 8\frac{N^{1/2}/q}{\log N} - 8(B)\frac{\log\log N}{\log N}$$

Com que

$$N^{1/8} = z \leq q < y = N^{1/3},$$

tenim que

$$\frac{4}{3} < 8\frac{N^{1/2}/q}{\log N} \leq 3$$

i així $1 \leq s_q \leq 3$. Per tant

$$F(s_q) = \frac{2e^\gamma}{s_q} = \frac{e^\gamma \log(N)}{4\log(N^{1/2}/q)} + O(\frac{\log\log N}{\log N}).$$

D'altre banda

$$|A_q| = \pi(N;q,N) + O(\log N) = \frac{N}{\phi(q)\log N}\left(1 + O(\frac{1}{\log N})\right) + \delta(N;q,N).$$

Així

$$\sum_{z\le q<y\,,q\in P_N} (F(s_q)+\epsilon))|A_q| = \frac{e^{\gamma}N}{4}\sum_{z\le q<y\,,q\in P_N}\frac{1}{\phi(q)\log(N^{1/2}/q)} + O(\frac{N}{\log N})$$

aplicant Bombieri-Vinagrodov de nou pels termes

$$\sum_{z\le q<y\,,q\in P_N}\delta(N;q,N) = O(\frac{N}{(\log N)^3})$$

(+ cert error).

Ara cal calcular

$$\sum_{z\leq q<y\,,q\in P_N} \frac{1}{\phi(q)\log(N^{1/2}/q)} < \sum_{z\leq q<y} \frac{1}{q\log(N^{1/2}/q)} + O(\frac{1}{z\log N})$$

De nou, utilitzem

$$\sum_{p<t} \frac{1}{p} = \log\log t + B + O(\frac{1}{t}).$$

per obtenir

$$\sum_{z\leq q<y} \frac{1}{q\log(N^{1/2}/q)} \sim \int_z^y \frac{d\log\log t}{log(N^{1/2}/t)} = \int_z^y \frac{dt}{t\log(t)\log(N^{1/2}/t)} =$$

i fent el canvi $t = N^{\alpha}$ és igual a

$$= \frac{1}{\log N} \int_{1/8}^{1/3} \frac{d\alpha}{\alpha(\frac{1}{2} - \alpha)} = \frac{2 \log 6}{\log N}.$$

En resum:

$$\sum_{z \leq q < y \,, q \in P_N} (F(s_q) + \epsilon)|A_q| V(z) + O(\frac{N}{(\log N)^3}) < \frac{e^\gamma \log 6}{2} \frac{N V(z)}{\log N}$$