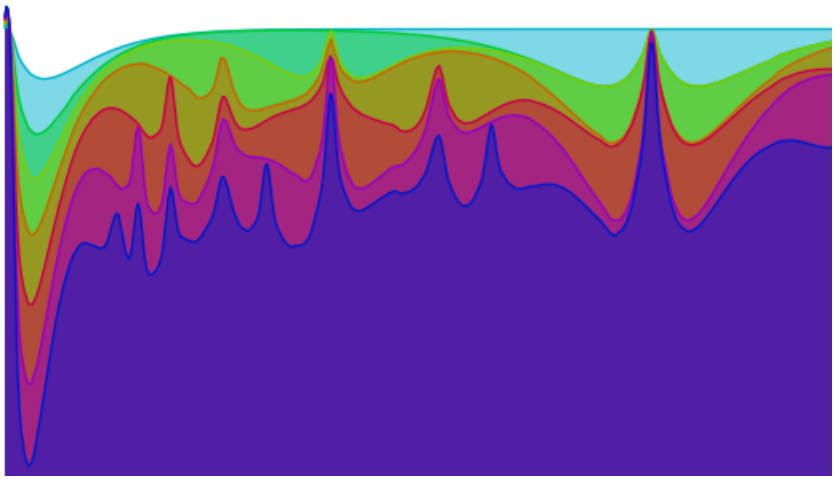
Universitat Autònoma de Barcelona

GRAU EN MATEMÀTIQUES

# La dissonància musical des del punt de vista matemàtic

**Abstract**

*En aquest treball presentem un model matemàtic per tal de representar gràficament la dissonància musical, seguint els estudis de R. Plomp i W.J.M. Levelt, H. Fletcher i W.A. Munson. Mitjançant l'anàlisi de Fourier, estudiem la descomposició en harmònics de les ones sonores per a diversos instruments i, posteriorment, posem a prova el model a partir d'un algorisme en* SageMath *en el qual s'implementa la sonoritat d'una forma perceptiva amb els fons com a unitat de mesura.*



*Tutor:*
Roberto Rubio Núñez

*Alumna:*
Núria Sauló Fernández 1420862

*Curs:*
2019-2020

# Agraïments

Aquest projecte no hagués estat possible sense l'ajuda de moltes persones. És per això que m'agradaria mostrar el meu agraïment a cada una d'elles. En primer lloc, al meu tutor, Roberto Rubio Núñez, pel seu interès, esforç i dedicació al llarg de tot aquest temps. Sense el seu acompanyament no hagués estat possible la realització d'aquest treball. En segon lloc, a la meva família, la meva parella i els meus amics, que s'han interessat pel projecte i m'han donat suport i idees per tirar-lo endavant. Finalment, als professors i professores de música que m'han obert les portes vers els coneixements musicals.

# Índex

**1 Introducció** **4**
1.1 Motivació personal . . . . . 4
1.2 Resultats principals . . . . . 5
1.3 Nocions bàsiques de les ones sonores . . . . . 6

**2 Harmònics de les ones sonores** **8**
2.1 Manipulació d'ones de so . . . . . 16

**3 Consonància i dissonància** **21**
3.1 Conceptes previs . . . . . 21
3.2 Introducció històrica . . . . . 23
3.2.1 Estudi de Plomp i Levelt . . . . . 24
3.3 Corbes de dissonància . . . . . 26
3.3.1 Representació de les corbes de dissonància . . . . . 26
3.3.2 Intensitat i sonoritat de les ones sonores . . . . . 28
3.3.3 Propietats de les corbes de dissonància . . . . . 30
3.4 Superfícies de dissonància . . . . . 32
3.5 Possibles millores futures . . . . . 33

**A Gràfics de l'estudi de Plomp i Levelt** **35**

**B Codi en SageMath** **36**

# Capítol 1

# Introducció

*"La música és el plaer que experimenta la ment humana al comptar sense adonar-se de que està comptant."*

— Gottfried Wilhelm von Leibniz

*"Saber música sense saber matemàtiques és com escoltar una melodia sense el seu acompanyament."*

— Gareth Loy

.

## 1.1 Motivació personal

Al llarg de la meva trajectòria acadèmica he estat conscient que el món de les matemàtiques em suposa estímul i repte. Des de molt petita, incentivada pels meus pares, em vaig acostar al món de la música, font de satisfacció personal. Penso que no hi ha millor forma d'acabar el grau de matemàtiques que mirar de trobar ponts entre les meves dues grans passions: la música i les matemàtiques.

Una gran quantitat de científics i, concretament, matemàtics com ara Pitàgores s'han plantejat la simbiosi entre els dos camps, cercant respostes en els interrogants generats per les seves interseccions per tal de traçar ponts entre aquests dos grans mons. Si hi ha quelcom de les matemàtiques que em fascina és la capacitat que té aquesta ciència per tal de donar respostes a qualssevol pregunta que ens puguem fer. És per això, que m'agradaria, mitjançant totes les eines que he anat assolint durant els darrers anys al grau, respondre preguntes com quin és el fenomen que succeeix per tal que distingim els instruments només escoltar-los, quin patró segueixen els intervals que sonen més agradables, o inclús, com és que certs intervals es perceben de forma més agradable en uns instruments que en altres.

## 1.2 Resultats principals

Els continguts que es presenten en aquest treball es poden emmarcar en dos grans blocs. El primer d'ells estudiarà la descomposició de les ones sonores mentre que l'altre el fenomen de la dissonància musical. Durant el desenvolupament d'aquests blocs, s'utilitzaran tres tipus de conceptes: musicals, propietats físiques de les ones i eines matemàtiques. Els musicals, parlaran de notes, intervals i acords, les propietats físiques de les ones tractaran alguns conceptes com ara la freqüència, l'amplitud i la sonoritat, i, finalment, les eines matemàtiques tractaran temes com ara els coeficients de Fourier, la transformada de Fourier i l'anàlisi de la consonància i dissonància dels sons mitjançant models matemàtics.

Pel que fa al primer bloc, l'eina matemàtica associada a la descomposició de les components de les ones com a suma d'enters múltiples de la freqüència donada particular és la sèrie de Fourier per a funcions periòdiques. Els coeficients de Fourier descriuen la intensitat amb la que sona cada un dels harmònics. S'ha fet l'estudi explícit dels coeficients de Fourier de quatre formes elementals d'ona: sinusoïdal, triangular, quadrada i de serra. Tot i així, les ones que generen els instruments musicals mai tenen una forma fàcilment descriptible per una funció. S'ha realitzat experimentalment, mitjançant el manipulador de so *Audacity*, que facilita l'anàlisi espectral, amb la peculiaritat que computacionalment s'empra la transformada de Fourier discreta. Finalment s'han establert relacions entre l'estudi teòric i l'experimental de l'espectre harmònic.

Pel que fa a la dissonància, el seu origen està a les limitacions del sistema auditiu. L'orella actua com un sintetitzador harmònic, en què un so es presenta com una suma de les ones sinusoïdals que el composen. Posteriorment els corresponents punts de la membrana basilar vibren i la informació es trasllada com un estímul al cervell. La consonància i la dissonància no són qualitats inherents dels intervals, sinó que depenen en gran part de l'espectre harmònic i la sonoritat dels tons que generen els intervals. Les corbes de dissonància proporcionen un mitjà per representar el nivell de consonància dels intervals en funció de la ràtio de freqüències, i el conjunt dels intervals més consonants defineixen la gran majoria dels tons de l'escala musical occidental. La representació gràfica del model matemàtic que descriu la dissonància del intervals s'ha fet mitjançant un programa en SageMath. Es va iniciar amb un codi disponible a [1] en MATLAB, el qual s'ha modificat a SageMath ja que treballa amb llenguatge Python, un dels llenguatges de codi obert més utilitzats dins de la comunitat científica. Per tal de tenir un model més acurat, s'ha complementat el codi amb el model de H. Fletcher i W.A. Munson que tracta la sonoritat mitjançant les corbes isofòniques. Per determinar la sonoritat s'empra la unitat de mesura dels fons, la qual depèn de la intensitat i la freqüència. A més, aquest nou model contempla la possibilitat de considerar espectres diferents pels diversos tons, tant pel que fa a diferents quantitats de parcials, com per modificar-ne la forma d'ona.

## 1.3 Nocions bàsiques de les ones sonores

Quan es pertorba un sistema i aquest perd la seva posició estable, es produeixen oscil·lacions tot generant diverses formes d'ona. Hi ha molts exemples que ens poden ser familiars. Un d'ells pot ser el fenomen que succeeix quan una corda d'un instrument de corda tensa fregada, es pinça o es frega amb l'arc. La pertorbació provocada es propaga al llarg de la mateixa corda, en forma de moviment ondulatori, que consisteix en la variació de la forma de la corda a partir del seu estat d'equilibri. Aquest és un dels molts exemples en què aquest fenomen es mostra en el món de la música. Prèviament, cal introduir científicament alguns conceptes bàsics musicals, per tal de fer més comprensible alguns dels resultats que es presentaran durant el desenvolupament d'aquest treball.

Les ones transporten energia i quantitat de moviment a través de l'espai, però no matèria. La propagació de les ones, sorgeix de la interacció de cada segment amb els seus adjacents, que es mouen en direcció perpendicular a la direcció del moviment ondulatori. Les **ones longitudinals** són aquelles en què la direcció de pertorbació és paral·lela a la direcció de propagació. Les ones sonores són exemples d'ones longitudinals.

Les ones venen caracteritzades per la forma d'ona, la freqüència, el període i l'amplitud. En primer lloc, el recorregut que segueix una ona s'anomena **forma d'ona**. El temps que tarda l'ona en fer una oscil·lació completa al voltant de la seva posició d'equilibri s'anomena **període**, i el seu recíproc, és a dir, el número d'oscil·lacions que fa per segon, s'anomena **freqüència**. Algunes d'aquestes freqüències particulars es denominen **notes**, cadascuna de les quals ha rebut un nom característic. Per exemple, a un so de 440 $Hz$ se l'anomena LA4. Conforme més grans són les freqüències, més aguda és la nota corresponent. A més, el concepte d'**amplitud** representa la magnitud del canvi d'un sistema oscil·lant. La intensitat amb què es percep el so depèn de l'amplitud de l'ona, ja que com més gran sigui, major és la intensitat del so. A més, la intensitat del so que es percep de forma perceptiva és el que es denomina **sonoritat**.

Quan dues o més ones es troben a l'espai, les seves pertorbacions individuals es superposen i es sumen algebraicament creant una nova ona, segons diu el **principi de superposició**. Un cas en què aquest fenomen succeeix és quan dues ones estan confinades a l'espai. Durant aquest procés es produeixen reflexions a ambdós extrems i, conseqüentment, existeixen ones que es mouen en els dos sentits, i que es combinen d'acord al principi de superposició. Les ones generades per instruments com el piano o l'òrgan es basen en aquest principi.

Per altra banda, cal entendre com el sistema auditiu humà capta les diferents freqüències musicals i el procés d'interpretació d'aquestes. Primer, un cop el so és rebut per l'aparell auditiu es produeixen un conjunt d'impulsos nerviosos. Aquests senyals són transportats a través del sistema nerviós perifèric fins a ser processats a l'encèfal, lloc on s'efectua una resposta, de vegades de forma conscient i d'altres de forma inconscient o instintiva.

Així doncs, primer de tot cal plantejar-se què és el so i quines són les particularitats de l'oïda humana. Es defineix **so** o **to** com una successió de canvis de pressió creats per compressions i dilatacions a un medi i provocats per una vibració que es transmet en forma d'ones sonores.

Una vegada l'ona sonora surt de l'instrument, s'endinsa en el que es coneix com orella externa, de manera que arriba al pavelló auricular i es dirigeix cap al conducte auditiu extern. Aquest connecta l'orella externa amb la mitjana, tot fent arribar l'ona a la membrana timpànica. Aquesta es desplaça al uníson amb la pressió que entra pel canal auditiu. El timpà està connectat amb l'orella interna a través dels ossicles, tres ossets molt petits. Aquests són encarregats de portar les vibracions generades per l'ona fins la còclea, un tub ossi enrotllat, molt important per a la determinació de les freqüències que s'escolten. La còclea conté la membrana basilar, en la que es troben les cèl·lules sensibles anomenades cilis. En funció de la freqüència de l'ona, vibraran uns o altres cilis. En el cas de les freqüències altes vibraran els de l'inici, i conforme la freqüència és més baixa, vibren els cilis més interns. Aquests cilis van morint al llarg dels anys, tot creant la pèrdua d'audició de les freqüències agudes ja que són les que estan a l'entrada del canal auditiu i per tant, són les més exposades. Finalment, aquesta vibració crea una sensació física que té lloc al nostre cervell i l'interpreta com a so quan el nervi auditiu, situat al final del l'orella interna, és estimulat.

En general es considera que els humans podem percebre un so, si la freqüència està compresa entre els 20 $Hz$ i els 20.000 $Hz$, aproximadament. Una de les diferències dels sons més aguts i els més greus és en relació amb com avancen per la membrana basilar. Els aguts avancen poc, mentre que els greus avancen més. Posteriorment, la membrana s'ocupa de descomposar l'ona rebuda a l'oïda en harmònics, tal i com s'explica a la següent secció, de forma que el cervell s'encarrega d'identificar aquests harmònics i així reconèixer de quin instrument es tracta.

L'encèfal efectua una resposta a l'estímul que rep. Part d'aquesta resposta ve generada a partir dels coneixements culturals. Algunes d'aquestes respostes podrien ser: determinar si un so és greu o agut, si es tracta d'un instrument de vent, de corda o de percussió o bé si la superposició de més d'un so ens sona agradable o no, entre d'altres.

La percepció que es genera durant la superposició de varis sons ens pot generar una sensació agradable o contràriament desagradable. Es defineix com a **dissonància**, la sensació poc agradable que es produeix en la simultaneïtat de determinats sons que es troben a una determinada distància. Contràriament, si la sensació es percep de forma agradable, s'anomena **consonància**. És per això que la consonància i la dissonància no són conceptuals sinó perceptius.

La idea general d'aquest treball és comprendre el comportament de les ones sonores. Consisteix bàsicament dos grans blocs. En el primer es tracta de descomposar-les en harmònics mitjançant l'anàlisi de Fourier. Posteriorment, ens caldrà parlar sobre la consonància i la dissonància en els acords, que serà el segon bloc d'aquest treball.

# Capítol 2

# Harmònics de les ones sonores

En aquesta secció es tracta la teoria de Fourier en l'anàlisi harmònica. Per tant, primerament se'n donaran alguns conceptes previs.

L'anàlisi harmònica consisteix en la descomposició d'ones periòdiques en una suma, normalment infinita, de sinus i cosinus. Així doncs, les formes d'ona es poden analitzar descomposant-les en els harmònics que les constitueixen. Es considera **ona harmònica** a aquella que produeix una forma sinusoïdal. Aquests esquemes d'ona tenen certs punts on torna a la seva posició d'equilibri. Aquests punts s'anomenen **nodes**. Entre cada parell de nodes, existeix un punt d'amplitud de vibració màxima denominat **ventre**. A més, els harmònics venen caracteritzats per la quantitat de nodes i ventres.

Les freqüències implicades en la descomposició d'una ona de pressió acústica periòdica d'un instrument musical són els enters múltiples de la freqüència més baixa, o altrament anomenada, freqüència fonamental. Aquesta produeix el primer harmònic, que tal i com s'ha explicat anteriorment, serà una ona amb un sol ventre. La segona més baixa produeix una forma d'ona denominada segon harmònic i així successivament. Així doncs, la seqüència de freqüències naturals que són múltiples enters de la freqüència fonamental s'anomena **sèrie harmònica**.

Fourier va introduir la idea que una funció periòdica podia ser analitzada mitjançant sèries trigonomètriques. La **sèrie de Fourier** descompon una funció periòdica en una suma de funcions oscil·latòries simples d'acord al principi de superposició. De forma genèrica es pot considerar que tota funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ amb període $2\pi$ es pot escriure com:

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{in\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta} \tag{2.1}$$

on $\widehat{f}(n) = \langle f(\theta), e^{in\theta}\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$ es defineixen com els **coeficients de Fourier**.

**Comentari**
**1.** *Cal recordar que el conjunt de números complexos es pot identificar amb el pla complex, on a cada $z = a + ib$ se'l fa correspondre amb el punt $(a, b)$ de $\mathbb{R}^2$. Així es pot fer correspondre la funció $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, amb $\tilde{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida per $\tilde{f}(x) = (Ref(x), Imf(x))$. Aquest és el motiu pel qual els espais d'arribada es poden tractar tant a $\mathbb{R}$ com a $\mathbb{C}$.*

Una altra forma d'escriure la sèrie de Fourier és en comptes d'utilitzar l'exponencial com a base ortogonal, fer servir les funcions trigònometriques, ja que per algunes funcions simplifica molt els calculs. En primer lloc es prova que el conjunt de funcions $\{1, \sin(m\theta), \cos(n\theta) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ formen una base ortogonal amb el producte escalar a

$$L^2([0,2\pi]) = \{f : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \ \text{ amb } \ ||f||_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty\}.$$

El producte escalar a $L^2([0,2\pi])$ de dues funcions $2\pi$-periòdiques es defineix com

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)} \, \mathrm{d}\theta.$$

A continuació es prova l'ortogonalitat de la base dos a dos. Siguin $m, n \in \mathbb{Z}$:

$\boxed{1 \text{ i } \sin(m\theta)}$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \, \mathrm{d}\theta = 0$ $\boxed{1 \text{ i } \cos(n\theta)}$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(m\theta) \, \mathrm{d}\theta = 0$

$\boxed{\cos(n\theta) \text{ i } \sin(m\theta)}$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\sin(m\theta) \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m\theta + n\theta) + \sin(m\theta - n\theta) \, \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos(\theta(m+n)) - \cos(\theta(m-n))}{m^2 - n^2}\right)\Bigg]_0^{2\pi} = 0 \ si \ m \neq n$$

En cas que $m = n$ es té:

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\sin(n\theta) \, \mathrm{d}\theta = -\cos(n\theta)\frac{\cos(n\theta)}{n}\Bigg]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\sin(n\theta) \, \mathrm{d}\theta$$

I per tant $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\sin(n\theta) \, \mathrm{d}\theta = 0$.

$\boxed{\cos(n\theta) \text{ i } \cos(m\theta)}$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta) \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m\theta + n\theta) + \cos(m\theta - n\theta) \, \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta(m+n)) + \sin(\theta(m-n))}{m^2 - n^2}\Bigg]_0^{2\pi} = 0 \ si \ m \neq n$$

En cas que $m = n$ es té:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2n\theta)}{2} \, \mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2n\theta)}{4n}\Bigg]_0^{2\pi} = \pi \ si \ m = n \neq 0$$

Finalment si $n, m = 0$ tenim $\cos(n\theta) = \cos(m\theta) = 1$ i per tant el producte escalar dóna $2\pi$.

$\boxed{\sin(n\theta) \text{ i } \sin(m\theta)}$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\theta)\sin(m\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m\theta - n\theta) - \cos(m\theta + n\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta(m-n)) - \sin(\theta(m+n))}{m^2 - n^2}\Bigg]_0^{2\pi} = 0 \; si \; m \neq n$$

En cas que $m = n$ es té:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2n\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2n\theta)}{4n}\Bigg]_0^{2\pi} = \pi \; si \; m = n \neq 0$$

Finalment si $n, m = 0$ tenim $\sin(n\theta) = \sin(m\theta) = 0$ i per tant el producte escalar dóna 0.

Provada l'ortogonalitat de la base, es pot reescriure l'equació (2.1):

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{in\theta} + c_{-n}e^{-in\theta}\right) \tag{2.2}$$

Siguin $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ i $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$. En primer lloc s'obté $c_0 = \dfrac{a_0 + ib_0}{2} = \dfrac{a_0 - ib_0}{2}$ i per tant, $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$. Substituint-ho a (2.2) s'obté la **sèrie de Fourier**:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{in\theta} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-in\theta}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n(e^{in\theta} + e^{-in\theta})}{2} + \frac{ib_n(e^{-in\theta} - e^{in\theta})}{2}\right) = \boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)\right)} \tag{2.3}$$

on $\dfrac{a_0}{2}$, $a_n$ i $b_n$ són constants i més especificament, els coeficients $a_n$ i $b_n$ corresponen a els **coeficients de Fourier**. Mitjançant aquesta sèrie s'obtenen els harmònics en els que es desenvolupa cada ona. El terme $n$-èssim representarà l'$n$-èssim harmònic.

Abans de continuar parlant sobre aquestes constants provem el fet que la sèrie de Fourier és uniformement convergent:

**Teorema 1.** *Sigui $f$ contínua i $2\pi$-periòdica. Suposem que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$. Aleshores $S(f(\theta)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{in\theta} \longrightarrow f(\theta)$ uniformement a $\mathbb{R}$.*

*Demostració.* Pel criteri M de Weierstrass $g(\theta) := S(f(\theta)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{in\theta}$ convergeix uniformement a $\mathbb{R}$ ja que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)e^{in\theta}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$, per hipòtesi.

En particular, $g(\theta)$ és contínua i a més, a conseqüència de la convergència uniforme de la sèrie, es pot intercanviar la suma infinita per una integral d'on els coeficients de Fourier de $g(\theta)$ són $\widehat{f}(n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. Per tant, $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n) \iff \widehat{(f-g)}(n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. Es conclou que $(f-g)(\theta) \equiv 0$, $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{in\theta}$ i $S(f(\theta))$ convergeix uniformement a $f(\theta)$. □

**Corol·lari 1.** *Sigui $f \in C^2(\mathbb{R})$ i $2\pi$- periòdica. Aleshores $f(\theta) = S(f(\theta)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{in\theta}$ per tot $\theta \in \mathbb{R}$ i a més $S(f(\theta)) \longrightarrow f(\theta)$ uniformement a $\mathbb{R}$.*

*Demostració.* Sigui $f \in C^2(\mathbb{R})$, provem que $|\widehat{f}(n)| \leq \dfrac{\max|f''(\theta)|}{n^2}$.

$$\widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\frac{f(\theta)e^{-in\theta}}{-in}\Big]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(\theta)\frac{e^{-in\theta}}{-in}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi in}\int_0^{2\pi} f'(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi n^2}\int_0^{2\pi} f''(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Aleshores $|\widehat{f}(n)| \leq \left|\dfrac{1}{2\pi n^2}\displaystyle\int_0^{2\pi} f''(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \leq \dfrac{1}{2\pi n^2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|f''(\theta)e^{-in\theta}\right|\mathrm{d}\theta \leq \dfrac{\max|f''(\theta)|}{n^2}$.

Com compleix les hipòtesis del Teorema 1 es pot concloure que $f(\theta) = S(f(\theta))$ i a més convergeix uniformement a $f(\theta)$ a $\mathbb{R}$.

□

Els resultats anteriors i la convergència uniforme de la sèrie per funcions de classe $C^2$ faciliten el càlcul de les constants $a_n$ i $b_n$ de l'equació (2.3).

$\boxed{a_n}$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\big(a_m\cos(m\theta) + b_m\sin(m\theta)\big)\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\sum_{m=1}^{\infty}\big(a_m\cos(m\theta) + b_m\sin(m\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta + b_m\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\sin(m\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} a_m\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta = a_n\pi \implies \boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)f(\theta)\,\mathrm{d}\theta} \tag{2.4}$$

$\boxed{b_n}$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\theta) f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sin(n\theta)\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos(m\theta) + b_m \sin(m\theta)\right)\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_0^{2\pi} \sin(n\theta)\sin(m\theta)\,\mathrm{d}\theta = b_n\pi \implies \boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(n\theta) f(\theta)\,\mathrm{d}\theta} \tag{2.5}$$

Prenent com a referència l'Exemple de la pàgina 34 de [2], fem de manera independent l'estudi harmònic de les quatre formes elementals d'ona, representades a les Figures 2.1, 2.2, 2.3 i 2.4, tenint en compte les equacions (2.3), (2.4) i (2.5). Primerament, les ones de tonalitat verdosa o blavosa representen els primers harmònics que es calculen a continuació mitjançant l'anàlisi de Fourier. Addicionalment, es pot apreciar a cada figura una ona fúcsia la qual representa el sumatori d'harmònics per a valors de $n$ prou elevats.

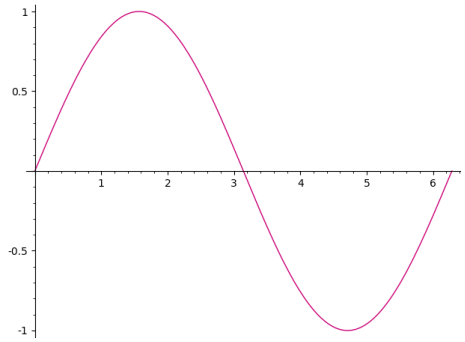



Figura 2.1: Ona sinusoïdal i la seva descomposició en harmònics

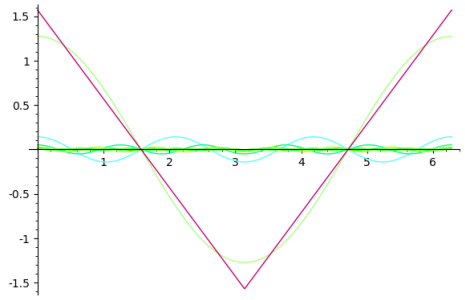



Figura 2.2: Ona triangular i la seva descomposició en harmònics

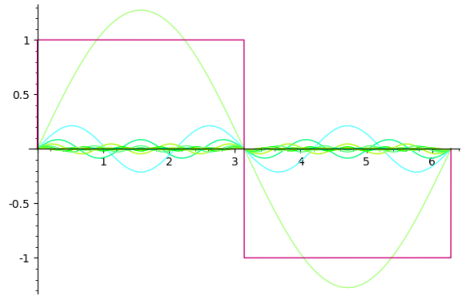



Figura 2.3: Ona quadrada i la seva descomposició en harmònics

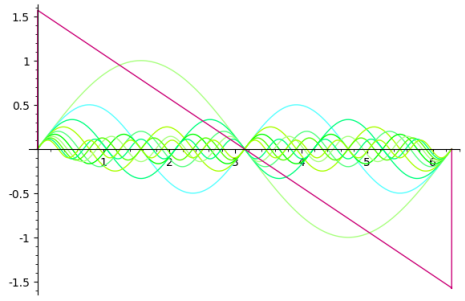



Figura 2.4: Ona de serra i la seva descomposició en harmònics

**Exemple 1.** *Càlcul de la sèrie de Fourier de l'ona sinusoïdal* $f(\theta) = \sin(\theta)$ *a* $\theta \in [0, 2\pi]$

*Aquest exemple és trivial per l'ortogonalitat de la base. De totes formes es comprova que el resultat sigui l'esperat. Càlcul dels coeficients de Fourier:*

$\boxed{a_n}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta) f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta) sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$$

$\boxed{b_n}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(n\theta) f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(n\theta)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\cdot\pi, & si\ \ n = 1 \\ 0, & si\ \ n \neq 1 \end{cases}$$

*Un cop realitzat el càlcul dels coeficients de Fourier, existeix la possibilitat de reescriure la funció* $f(\theta)$ *com* $f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta)$*, però es pot apreciar que* $b_n = 0$ *excepte pel cas* $n = 1$*. Aleshores* $f(\theta) = \sin(\theta)$ *i per tant se'n pot deduir que la funció sinusoïdal no té harmònics múltiples del fonamental.*

**Exemple 2.** *Càlcul de la sèrie de Fourier de l'ona triangular*

$$g(\theta) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \theta, & si\ \ \theta \in [0, \pi) \\ \theta - \frac{3\pi}{2}, & si\ \ \theta \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

*Càlcul dels coeficients de Fourier:*

$\boxed{a_n}$

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\big(\frac{\pi}{2} - \theta\big)\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \cos(n\theta)\big(\theta - \frac{3\pi}{2}\big)\,\mathrm{d}\theta\right) \\ =& \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{\pi} \theta\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \theta\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta - \frac{3\pi}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta\right) \\ =& \frac{1}{\pi}\left(-\left(\theta\frac{\sin(n\theta)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{n}\,\mathrm{d}\theta\right) + \left(\theta\frac{\sin(n\theta)}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(n\theta)}{n}\,\mathrm{d}\theta\Big)\Big) \\ =& \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos(n\pi)}{n^2} + \frac{2}{n^2} - \frac{\cos(n\pi)}{n^2}\right) = \frac{2}{\pi n^2}\big(1 - \cos(n\pi)\big) = \begin{cases} 0, & si\ \ n = 2k \\ \frac{4}{\pi n^2}, & si\ \ n = 2k-1 \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\boxed{b_n}$

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{\pi}\theta\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi}^{2\pi}\theta\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta - \frac{3\pi}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\\
=& \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\frac{\cos(n\theta)}{n}\Big]_0^{\pi} - \left(-\theta\frac{\cos(n\theta)}{n}\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(n\theta)}{n}\,\mathrm{d}\theta\right) - \theta\frac{\cos(n\theta)}{n}\Big]_{\pi}^{2\pi}\right.\\
&\left. + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{-\cos(n\theta)}{n}\,\mathrm{d}\theta - \frac{3\pi}{2}\left(\frac{-\cos(n\theta)}{n}\right)\Big]_{\pi}^{2\pi}\right)\\
=& \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos(n\pi)}{2n} + \frac{\pi\cos(n\pi)}{n} + \frac{\pi\cos(n\pi)}{n} - \frac{3\pi\cos(n\pi)}{2n} + \frac{\pi}{2n} - \frac{2\pi}{n} + \frac{3\pi}{2n}\right) = 0
\end{aligned}$$

*Com $a_0 = 0$, s'obté la sèrie de Fourier $g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos((2n-1)\theta)}{\pi(2n-1)^2}$. En aquest cas només es manifesten els harmònics imparells, i a més, el denominador augmenta molt ràpidament. Conseqüentment, hi haurà una presència dels primers harmònics, però conforme s'allunya de la freqüència fonamental, les respectives intensitats decauran bastant ràpid.*

**Exemple 3.** *Càlcul de la sèrie de Fourier de l'ona quadrada*

$$h(\theta) = \begin{cases} 1, & si\ \ \theta \in [0,\pi) \\ -1, & si\ \ \theta \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

*Càlcul dels coeficients de Fourier:*

$\boxed{a_n}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta - \int_{\pi}^{2\pi}\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(n\theta)}{n}\Big]_0^{\pi} - \frac{\sin(n\theta)}{n}\Big]_{\pi}^{2\pi}\right) = 0$$

$\boxed{b_n}$

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta - \int_{\pi}^{2\pi}\theta\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{n}\right)\\
=& \begin{cases} 0, & si\ \ n = 2k \\ \dfrac{4}{\pi n}, & si\ \ n = 2k-1 \end{cases}, \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

*Com $a_0 = 0$, s'obté la sèrie de Fourier $h(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sin((2n-1)\theta)}{\pi(2n-1)}$. La paritat d'harmònics de l'ona quadrada és la mateixa que la de l'ona triangular, és a dir, només es manifesten els harmònics imparells. Es diferencien en el fet que la potència n-èssima de l'ona quadrada és menor que la de l'ona triangular. Conseqüentment, genera una amplitud més elevada dels harmònics.*

**Exemple 4.** *Càlcul de la sèrie de Fourier de l'ona de serra*

$$i(\theta) = \begin{cases} 0, & si \;\; \theta \in \{0, 2\pi\} \\ \dfrac{\pi - \theta}{2}, & si \;\; \theta \notin \{0, 2\pi\} \end{cases}$$

*Càlcul dels coeficients de Fourier:*

$\boxed{a_n}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{\theta\cos n\theta}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta = \left(-\frac{\sin(2\pi n)}{n} - \frac{\cos n\theta}{2\pi n}\Big]_0^{2\pi}\right) = 0$$

$\boxed{b_n}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(n\theta)\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos(2\pi n)}{n} + \frac{\sin n\theta}{n^2}\Big]_0^{2\pi}\right) = \frac{\cos(2\pi n)}{n} = \frac{1}{n}$$

*S'obté la sèrie de Fourier* $i(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$*, mitjançant la qual s'aprecia la presència d'ambdós tipus d'harmònics, és a dir, parells i imparells. Finalment, es percep la intensitat elevada d'una quantitat significativament alta d'harmònics, com en el cas de l'ona quadrada.*

Tal i com s'observa a l'Exercici 1, l'ona sinusoïdal és l'ona pura per excel·lència. No obstant, un instrument mai produeix una freqüència pura, sinó que juntament a la freqüència principal, sonen una sèrie de freqüències, que corresponen als seus harmònics. De fet, mitjançant l'anàlisi de Fourier, es pot afirmar que tota ona periòdica es pot descomposar com a composició d'ones harmòniques. Cada nota de cada instrument està formada per varis harmònics, i per tant, dit d'altra forma, per la suma de vàries ones sinusoïdals. A més, en funció de l'instrument, són més intensos uns harmònics o bé uns altres. Aquest fet respon a la pregunta de com es pot distingir una mateixa nota, si es toca amb diferents instruments. De fet, pot ser que dos instruments iguals tinguin un timbre diferent, per com han estat construïts o bé com han estat afinats, entre d'altres efectes.

Els quatre exemples vists anteriorment són les ones més fonamentals. Però no totes les ones generades per instruments tenen una forma fàcilment descriptible mitjançant una funció. A la següent secció es realitza l'estudi d'ones generades per a diversos instruments. Malgrat la complexitat de certes funcions d'ona, s'observarà que en general tenen certa semblança als exemples anteriors. És per això que és necessària l'ajuda de diversos programes de manipulació de so per tal de poder-ne fer un estudi més exhaustiu.

## 2.1 Manipulació d'ones de so

Mitjançant el programa d'edició de so *Audacity*, s'han introduït diversos àudios de so de diversos instruments musicals. Aquest programa permet en primer lloc convertir l'àudio en una ona. S'observa que les ones que es retornen no són funcions tant trivials com les dels exemples de la secció anterior. Esbrinar la seva descomposició en harmònics es converteix en una feina molt més costosa. No obstant, les formes d'ona tendeixen a tenir certa semblança a algun dels exemples estudiats anteriorment.

En funcions molt més complexes, s'empra la transformada de Fourier per a descomposar-ne la funció en les freqüències que la constitueixen i quantificar les diverses intensitats de cada una d'elles. La **transformada de Fourier** es defineix com:

$$\widehat{f}(n) = \langle f(\theta), e^{2\pi i n\theta} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) e^{-2\pi i n\theta} \, \mathrm{d}\theta$$

Per a fer una anàlisi d'aquestes intensitats s'empra una eina que s'anomena **anàlisi espectral** i es porta a terme mitjançant intervals de temps. Computacionalment no és possible realitzar la transformada de forma contínua, sinó que s'utilitza un algorisme matemàtic conegut com a Transformada Ràpida de Fourier que calcula la transformada de Fourier discreta per a una quantitat molt elevada de freqüències. Així doncs, quan s'introdueix una ona a *l'Audacity* i se'n demana l'anàlisi espectral, s'interpolen els resultats generats i es retorna un gràfic anomenat espectre harmònic, on es mostren les intensitats mesurades en $dB$ enfront de la freqüència d'una ona particular. Per a saber més sobre la unitat de mesura dels decibels consultar 3.3.2.

Estudi de diverses ones sonores de diferents instruments:

Anàlisi espectral d'una nota de 897 $Hz$ de la flauta travessera

A les Figures 2.5 i 2.6 s'aprecia l'ona i l'espectre que es genera al tocar una nota de 897 $Hz$ amb una flauta travessera. En primer lloc, la forma d'ona té certa similitud a una ona triangular, i inclús, en certa manera, a una ona de serra. Fent un estudi del seu espectre, els pics corresponen a 897 $Hz$, 1790 $Hz$, 2689 $Hz$, i a altres freqüències múltiples de la fonamental. A més, s'observa que el pic de 897 $Hz$, corresponent a la freqüència fonamental té una amplitud de $-12,1$ $dB$, el pic corresponent al segon harmònic té una amplitud de $-19$ $dB$ i el tercer $-36,4$ $dB$. Amb aquestes dades i analitzant la Figura 2.6 es percep que el segon harmònic té una intensitat bastant propera a la de la freqüència fonamental, mentre que la resta d'harmònics sonen amb molta menys intensitat. Es conclou, que és cert que té certa similitud amb l'ona de serra i amb la triangular. Pel que fa a la de serra, es manifesten tant els harmònics parells com els senars, i pel que fa a la triangular, la intensitat d'aquests decau molt ràpidament.

Figura 2.5: Ona de 897 $Hz$ de la flauta travessera

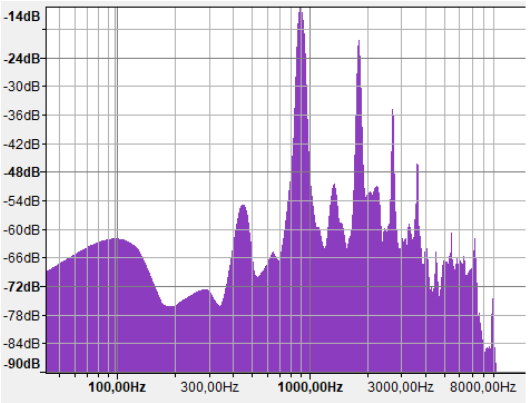



Figura 2.6: Anàlisi espectre ona de la flauta travessera

## Anàlisi espectral d'una nota de 444 $Hz$ del clarinet

Les Figures 2.7 i 2.8, mostren que malgrat tots els harmònics estan presents, els corresponents a un nombre imparell sonen amb més intensitat. De fet, s'observa que en el cas del tercer, sona pràcticament amb la mateixa intensitat que l'harmònic fonamental. L'ona té certa similitud a les ones quadrades i les triangulars. Com bé s'ha vist als Exemples 2 i 3, les ones triangulars tenen la propietat que només intervenen els harmònics imparells i les intensitats respectives decauen força ràpidament. Pel que fa a les quadrades, la paritat d'harmònics es dóna com en el cas de les ones triangulars, però amb la diferència que hi ha la presència de més harmònics significatius. Així doncs, la forma d'ona que s'obté correspon als càlculs que s'han fet anteriorment als Exemples 2 i 3, ja que els harmònics imparells sonen amb més intensitat que els parells, i a més, passat el quart harmònic, les seves intensitats disminueixen molt significativament. Malgrat això, la presència d'harmònics perdura fins a nombres elevats.

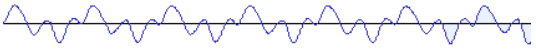


Figura 2.7: Ona de 444 $Hz$ del clarinet

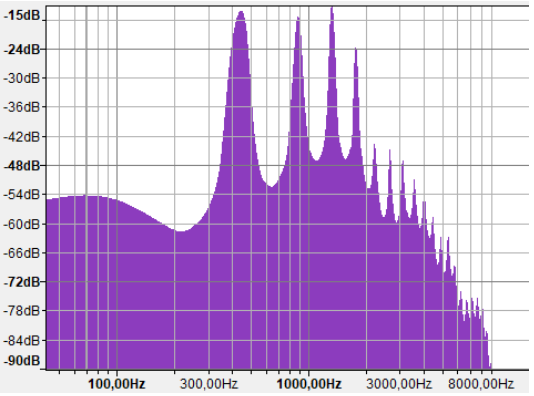



Figura 2.8: Anàlisi espectre ona del clarinet

A continuació hom es pregunta què és el que fa que l'ona de la flauta travessera i la del clarinet, és a dir, dos instruments de vent, difereixin tant. La resposta resta en el fet que la flauta travessera es considera un instrument de tub obert. El que ve a dir, és que tant el forat per on es bufa com el del final del tub, són considerablement grans. Per altra banda el clarinet és considerat un instrument de tub tancat; té el forat del final del tub com el de la flauta travessera, però contràriament, es bufa mitjançant una canyeta. Aleshores quan l'ona assoleix un forat tancat, es dóna una reflexió brusca. En canvi, quan aquest fet ocorre en un forat obert, la reflexió que es dóna no és tan abrupte. Conseqüentment, en funció de l'instrument de vent que es tracti, la seva ona tendirà a assemblar-se més a una ona triangular (tub obert) o bé a una quadrada (tub tancat).

**Anàlisi espectral d'una nota de 440 $Hz$ del violí**

Les Figures 2.9 i 2.10 mostren que l'ona que es genera al tocar un violí té una certa semblança a una ona de serra. Mitjançant l'espectre queda clar que la freqüència més important és la fonamental, que correspon a 440 $Hz$. Els pics es troben a freqüències múltiples de la principal. Tal i com s'aprecia a l'Exemple 4, les ones que tenen forma de serra presenten tots els harmònics i a més, la seva intensitat va reduint-se lentament. Es confirma doncs, que té certa semblança a aquest estil d'ona. Una de les petites diferències és el fet que els harmònics parells predominen un pèl més que els imparells. Finalment, comentar que aquest fet es repeteix pels instruments de corda fregada, ja que l'ona ve generada pel moviment de l'arc. De forma intuïtiva, l'arc fa pressió a la corda generant una intensitat que es va reduint conforme l'arc avança. Finalment, en canviar el sentit, l'arc s'allibera sobtadament per tornar a iniciar el procés. Aquest esquema es reprodueix com a forma de serra.

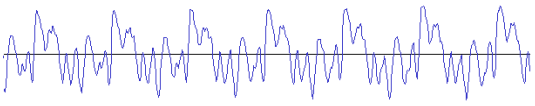


Figura 2.9: Ona de 440 $Hz$ del violí

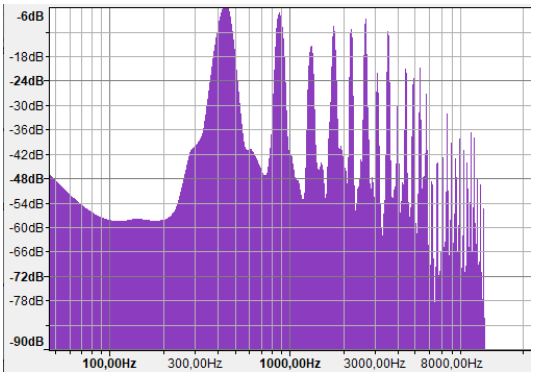



Figura 2.10: Anàlisi espectre ona del violí

**Anàlisi espectral d'una nota de 440 $Hz$ del piano**

El piano és un instrument de corda percudida. Mitjançant la Figura 2.11 es veu que l'ona té certa semblança a la de serra, que és el mateix que passava en el cas del violí. En aquest cas es veu que hi ha presència de tots els harmònics, i la seva intensitat no en depèn de la paritat.

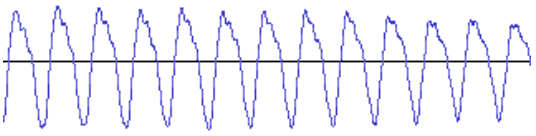


Figura 2.11: Ona de 440 $Hz$ del piano

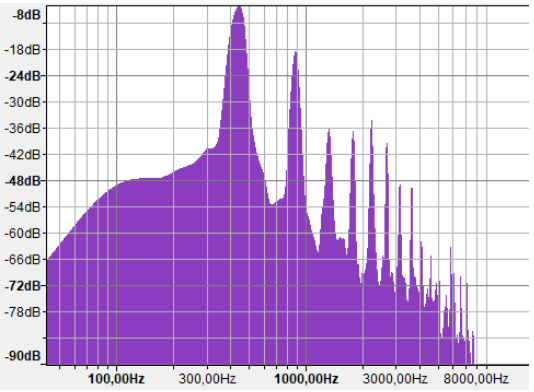



Figura 2.12: Anàlisi espectre ona del piano

**Anàlisi espectral d'una freqüència pura**

Mitjançant el programa *FL Studio* s'ha generat una ona amb una freqüència pura de 108 $Hz$, tal i com es pot veure a la Figura 2.13. Mitjançant l'anàlisi d'espectre d'harmònics de la Figura 2.14 es confirma el que es veia a l'Exemple 1. S'observa que hi ha un sol pic, que és el que correspon a la freqüència pura, és a dir 108 $Hz$ amb una intensitat de $-4.4$ $dB$ i per tant, es confirma que en aquest cas no tenim pics a cap harmònic múltiple de la freqüència fonamental. Tot i així, és interessant comentar que el pic no és tant estret com podríem esperar degut a la interpolació que fa l'algorisme.

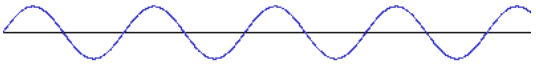


Figura 2.13: Ona amb freqüència de 108 $Hz$

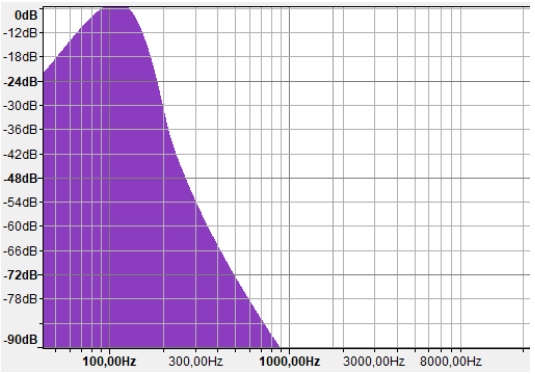



Figura 2.14: Anàlisi espectre d'ona amb freqüència de 108 $Hz$

Cal tenir present que tal i com s'ha comentat anteriorment, en els instruments mai es dóna el cas en que una nota correspongui a una ona amb forma sinusoïdal, ja que sempre intervenen altres tipus de vibracions que generen uns harmònics determinats.

En conclusió, hi ha instruments que generen molts harmònics i altres que en generen pocs. Alguns d'aquests tenen intensitats molt elevades, altres no tant. Totes aquestes diferències queden plasmades a l'espectre harmònic, mitjançant el qual es pot veure molt fàcilment les diferències en el timbre dels instruments. De fet, tant les cordes dels instruments de corda, com l'aire en els instruments de vent, no vibren de forma senzilla. A més, els instruments musicals són objectes complexes, formats per altres parts que també vibren. Així que totes les parts de l'instrument, amb la seva vibració, contribueixen als harmònics i donen a l'instrument el seu timbre característic.

Finalment, recalcar que si es consulten [3] i [4], es veu que la forma d'ona que s'obté mitjançant l'*Audacity* no és exactament igual. Això és degut a que el so ambient distorsiona un pèl la grabació de la nota. Malgrat aquest fet, s'observa que els harmònics mantenen amb força fidelitat les propietats vistes als Exemples 1, 2, 3 i 4 en funció de la forma d'ona.

# Capítol 3

# Consonància i dissonància

En les seccions anteriors s'ha estudiat el comportament del so produït per un instrument. En particular, cada nota és consonant per sí sola per varis motius. En primer lloc, perquè el to fonamental és el més intens mentre que els harmònics sonen amb un volum menor. Per altra banda, els harmònics tenen una freqüència múltiple de la fonamental, de forma que es fonen amb el to fonamental i simplement en canvien la forma de l'ona generada per la freqüència fonamental.

Però hom es pregunta què passaria si se sobreposen els tons de més d'una nota, o és més, què succeeix quan diversos instruments generen notes diferents simultàniament. A continuació, s'estudia el comportament de la superposició d'ones de diversos tons generats simultàniament, tot donant una explicació mitjançant fonaments matemàtics.

## 3.1 Conceptes previs

Per explicar com s'ha arribat al concepte de dissonància tal i com s'entén avui en dia, és necessari definir uns quants conceptes previs, els quals estan directament relacionats amb la consonància i dissonància musical.

En primer lloc, s'anomena **interval** a l'execució de dos tons. Es poden donar dos tipus d'intervals, segons si es fa referència a tons simultanis o a tons successius. En aquest treball sempre que es parli d'intervals es referenciarà als simultanis, o altrament anomenats, intervals harmònics. Al llarg d'aquest apartat es farà referència a la **freqüència base**, que és la que queda fixa per un conjunt d'intervals. A més, l'**amplada de l'interval** representa la distància que hi ha entre les dues freqüències fonamentals que el composen. Per altra banda s'anomena **ràtio de freqüències** d'un interval "$(b : a)=\frac{a}{b}$" a la relació de les freqüències fonamentals, on $b$ és la freqüència base i $a$ la freqüència del to que no es correspon amb la freqüència base.

Un altre aspecte imprescindible és el de **parcials**. Aquestes són les freqüències múltiples de la freqüència fonamental d'un to, presents en el seu espectre harmònic. La freqüència fonamental es considera el primer harmònic i la primera parcial. Generalment, la numeració de les parcials i dels harmònics és la mateixa, és a dir, la $m$-èssima parcial correspon al $m$-èssim harmònic. Però en cas de no manifestar-se alguns harmònics, la numeració d'harmònics i parcials no coincideix. Per exemple, l'ona quadrada només genera harmònics imparells, així que l'enumeració en termes de parcials serà: la primera parcial és la fonamental, la segona el tercer harmònic, i així successivament. En definitiva, podem pensar les parcials com una enumeració dels harmònics.

Tal i com s'ha vist en seccions anteriors, un so d'un instrument mai és un **to simple**, és a dir, generat per una sola parcial, sinó que és compost per vàries parcials. Un to compost per vàries parcials s'anomena **to complex**.

Per altra banda, l'efecte produït en la percepció sonora de dos tons simultanis, en què un d'ells queda tapat per l'altre s'anomena **emmascarament freqüencial**. El més dèbil s'anomena emmascarat i el dominant emmascarador. Generalment el to més greu tendeix a emmascarar el més agut. El sistema auditiu té una limitació auditiva causada per la còclea, que, com s'ha descrit a la Secció 1.3, conté uns cilis que vibren en funció de la freqüència i creen l'emmascarament en cas que els cilis del seu voltant vibrin simultàniament. El rang de freqüència centrat a un to, en el qual un segon to interfereix en la seva percepció mitjançant l'emmascarament s'anomena **amplada de banda crítica**. Aquest emmascarament pot ser parcial, tot generant una sensació de rugositat sonora o bé total, tot creant la percepció d'un sol to. A la Figura 3.1 s'observa el patró que segueix l'amplada de banda crítica en funció de la freqüència. Per a més informació respecte la banda crítica es pot consultar [5], [6] o [7].

Per que fa a l'emmascarament parcial, la rugositat genera una sensació de percepció de pulsacions. Siguin dues ones sinusoïdals coincidents, la superposició d'elles s'alinea de forma perfecta. Per altra banda, quan difereixen lleugerament, la seva interferència genera una sensació desagradable. La Figura 3.2 mostra la superposició de dues ones que inicialment són idèntiques, però conforme avancen en el temps, difereixen de forma molt subtil. Es pot observar que quan es sumen les dues ones en instants en què estan perfectament alineades, l'amplitud de la resultant està en el seu màxim. Per altra banda, quan no estan sincronitzades, l'amplitud en aquell instant esdevé molt petita. A aquest fenomen se l'anomena **pulsacions**.

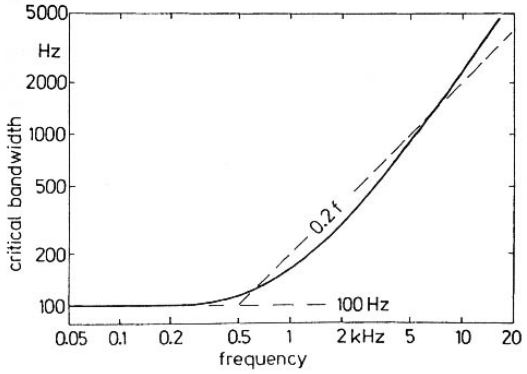



Figura 3.1: Distribució de l'amplada de banda crítica en funció de la freqüència

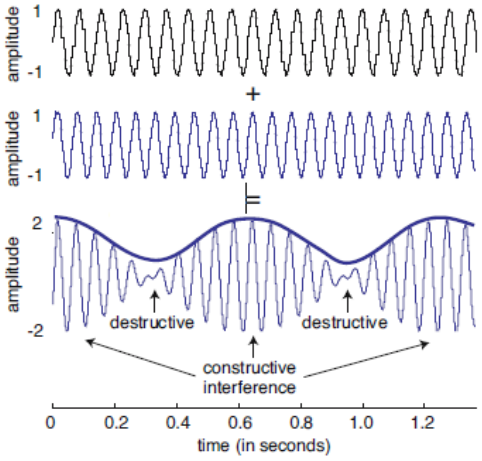



Figura 3.2: Pulsacions generades per dues ones amb freqüències lleugerament diferents ([8])

**Exemple 5.** *Per tenir una idea intuïtiva d'alguns d'aquests conceptes, es pot pensar en una octava amb sons complexos. Una octava és un interval tal que les freqüències fonamentals de dues notes tenen una ràtio de* $(1:2)$*, on s'identifica la segona parcial de la nota greu amb la primera de l'aguda. Siguin dos tons de* $2000$ *i* $4000\ Hz$*, s'observa que l'única parcial que no coincideix amb cap altra és la freqüència fonamental de la nota greu, tot i que n'és múltiple de totes les altres. En aquest cas, l'interval sonarà molt consonant. Per altra banda, seguint l'esquema de la Figura 3.1, el to de* $2000\ Hz$ *tindrà una banda crítica entre* $1800$ *i* $2200\ Hz$*, mentre que la banda del to de* $4000\ Hz$ *estarà entre* $3600$ *i* $4400\ Hz$*. Es conclou que la intersecció de les dues bandes crítiques és buida, i conseqüentment els tons cooperen generant una clara percepció d'ambdós.*

La **dissonància** esdevé quan les parcials no coincideixen. La petita diferència entre les ones generades a cada parcial, crea una sensació de pulsacions, o altrament dita, de rugositat, que per l'orella és interpretada com a dissonància.

## 3.2 Introducció històrica

El concepte de dissonància al llarg de la història s'ha anat modelitzant d'acord als coneixements musicals de cada època. Fins el segle IX aproximadament, no es concebia l'harmonia com a tons simultanis amb diferents intensitats. Posteriorment, es va començar a considerar el concepte d'interval, entenent-lo com el so produït per dues notes simultànies. En un inici només es consideraven consonants sis intervals: l'octava $(1:2)$, la cinquena $(2:3)$, la quarta $(3:4)$, l'octava augmentada $(1:3)$, l'octava més una quarta $(3:8)$ i la doble octava $(1:4)$. Entre els segles XIV i XVIII es va començar a estudiar la relació entre la freqüència i la intensitat de les notes. Posteriorment, Georg Andreas Sorge va ser el primer músic teòric en considerar la sensació de rugositat causada per les parcials properes com a possible explicació de la dissonància. Durant aquest període també es va ampliar el número d'intervals considerats consonants, incloent la tercera menor $(5:6)$, la tercera major $(4:5)$, la sisena menor $(5:8)$ i la sisena major $(3:5)$.

Més tard, al segle XIX, Helmholtz parla per primera vegada de la qualitat del so produït per dos tons simultanis en termes científics. Basa els seus estudis en l'estructura de l'oïda humana tot afirmant que està capacitada per analitzar tons complexos segons les seves components sinusoïdals. Helmholtz dóna una explicació de la consonància en termes de les pulsacions i la sensació de rugositat dels sons. La seva idea és que per a petites diferències de les freqüències, les pulsacions entre dos sons simples poden escoltar-se tot creant una sensació de rugositat. Afirma que el màxim de dissonància es dóna quan la diferència de freqüències està entre 30 i 40 $Hz$. Contràriament, per diferències més àmplies es genera un decreixement de la sensació de rugositat tot creant un so més consonant i agradable. Finalment afirma que com més petits són els nombres amb els quals es pot expressar una ràtio de freqüència, més consonant serà l'interval.

No va ser fins el segle XX que les explicacions de Helmholtz van ser justificades amb una anàlisi experimental mitjançant enquestes. Guthrie, Morrill i Kaestner van realitzar diversos experiments en els quals es donaven uns 30 intervals als participants, tot fent-los determinar per una banda, si eren consonants o dissonants, i per l'altra, si eren rebuts per l'oïda de forma agradable o desagradable. En el cas de Guthrie i Morrill intervals de tons simples,

mentre que en el de Kaestner intervals de tons complexos. Mitjançant aquests experiments es van obtenir unes corbes, anomenades corbes de dissonància, que representen el percentatge de participants que van votar consonància i sensació agradable per cada un dels intervals. Ambdós estudis mostraven que les corbes tenien un mínim molt marcat seguit d'un màxim molt marcat i compartien el fet que el mínim corresponia a una diferència de $30 - 40Hz$, concordant amb la teoria de Helmholtz.

Més tard, als anys 1962 i 1965, Plomp i Levelt publiquen els articles on presenten un estudi de la dissonància, tot tenint en compte els estudis comentats fins ara. A l'estudi que realitzen l'any 1962 a [9] conclouen que els experts en música recalquen una clara distinció entre els conceptes de plaer i consonància, mentre que els més inexperts associen la consonància i el plaer com a conceptes molt similars. Posteriorment, l'any 1965 a [10], presenten un concepte de consonància i dissonància molt d'acord amb el concepte actual. És per això, que en fem un estudi més exhaustiu durant les pròximes seccions.

### 3.2.1 Estudi de Plomp i Levelt

Plomp i Levelt van realitzar un estudi l'any 1965 amb dos objectius principals: esbrinar la relació de la consonància amb la ràtio de freqüències dels intervals i investigar al respecte de la percepció de la consonància i la dissonància des d'un punt de vista teòric, procurant que hi hagi la mínima influència cultural i de coneixements musicals.

Van participar un total de 88 persones, amb edats properes als 20 anys i amb estudis d'educació secundària. Durant l'estudi, els participants havien de jutjar en una escala perceptiva de l'1 al 7 el nivell de consonància dels intervals composats per tons simples, on 1 representava gens consonant i 7 molt consonant. A diferència dels estudis de Guthrie, Morrill i Kaestner, en comptes de fer-ho en funció del so greu de l'acord, van fer dependre cada experiment d'una mitjana geomètrica dels diferents acords. Aquest fet generava que per cada un dels experiments, no quedava cap nota fixa, sinó que conforme la distància de les dues freqüències incrementava, la nota aguda incrementava, però la greu decreixia. D'aquesta forma en dificultaven el reconeixement dels intervals. Així doncs, van crear 5 grups diferents en els que a cadascun d'ells se'ls assignava un conjunt entre 12 i 14 intervals, amb una mitjana geomètrica concreta generada per les freqüències fonamentals dels intervals. Aquestes eren 125, 250, 500, 1000 i 2000 $Hz$.

En primer lloc, per a cada un dels cinc grups, van generar una gràfica que representava la consonància d'uns quants intervals mitjançant l'escala perceptiva comentada anteriorment. Els cinc gràfics obtinguts generen unes funcions molt similars, en què per a una petita diferència de freqüències mostren un mínim molt abrupte i a mesura que la diferència creix es mostra un màxim global seguit d'altres màxims locals. Observen també que conforme creix la freqüència del to més greu, l'amplada de l'interval de màxima dissonància esdevé més ample. A més, per una mateixa ràtio, van veure que conforme més creixés el to baix, més consonant era l'interval. Aquestes gràfiques es poden veure a l'Apèndix A.

Donada la similitud de les gràfiques, van representar en un sol gràfic el que correspondria a la dissonància d'intervals de 6 parcials, amb el to greu fix de 250 $Hz$, d'acord a les dades obtingudes. Es pot veure a la Figura 3.3.

Plomp i Levelt conclouen que per a tons complexos la consonància varia en funció de l'amplada de l'interval i de les diferències de freqüències entre totes les parelles de parcials adjacents. A més, observen que conforme més parcials contingui l'espectre, més pics tindrà la corba. Mitjançant aquesta gràfica conclouen que les ràtios de freqüències juguen un paper important pel que fa a la consonància, ja que els intervals que són més consonants són aquells que tenen una ràtio corresponent a un interval musicalment conegut.

Per altra banda, consideren el concepte de banda crítica en relació amb la consonància. Mitjançant els gràfics obtinguts, van traçar la corba de la Figura 3.4 on es representa la consonància de dos tons simples en funció de la diferència de freqüències al llarg de la banda crítica. El gràfic els suggereix que la dissonància és proporcional a la banda crítica, com a explicació de la hipòtesi de Helmholtz en què la dissonància ve determinada per les pulsacions que generen les petites diferències de freqüències de les parcials. Més concretament, la màxima dissonància se situa al 25% de l'amplada de banda crítica, mentre que la consonància apareix ja fora de la banda crítica. Donat que l'amplitud d'aquesta banda correspon a la diferència de freqüències per la qual els tons cooperen, no és sorprenent que la rugositat aparegui només per tons amb distàncies de freqüència que no excedeixin l'amplada de banda crítica. Per tant, si la dissonància val 0 és degut a que les diferències de freqüències entre parcials excedeixen la banda crítica.

Finalment, observen que per a tons simples, la màxima dissonància s'assoleix al 25% de la banda crítica i el màxim de consonància al 100%. Una vegada el nivell de consonància assoleix el seu màxim, es queda estancat en aquell punt per tots els intervals. En canvi, pel que fa als tons complexos, la dissonància màxima també es dóna al 25%, però una vegada se surt de la banda crítica, el nivell de dissonància oscil·la, però en cap cas torna a arribar a la dissonància creada dins de la banda crítica, donat que la separació dels tons genera una intensitat menor de les seves parcials.

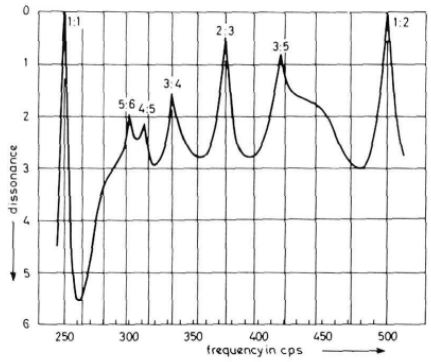



Figura 3.3: Corba de dissonància depenent de la diferència de les freqüències fonamentals, amb 6 harmònics a cada cas i la freqüència base 250 $Hz$

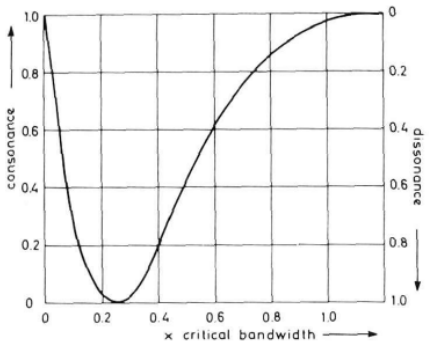



Figura 3.4: Corba representativa del nivell de consonància de dos tons simples en funció de la diferència de freqüències amb l'amplada de banda crítica unitària

## 3.3 Corbes de dissonància

Les corbes que dibuixen Plomp i Levelt s'anomenen corbes de dissonància donat que retraten gràficament la consonància o la dissonància percebuda versus els intervals musicals. Durant el desenvolupament del treball s'han representat gràficament aquestes corbes mitjançant el llenguatge SageMath. Es va partir d'un programa en MATLAB pertanyent a un CD del Llibre [8], disponible a [1]. Aquest programa considerava la sonoritat com a una constant, que era la mateixa per a totes les parcials. Una de les contribucions més importants del present treball ha estat implementar un canvi per tal de tenir present el que s'ha estudiat al Capítol 2. Així, es pot modificar la sonoritat en què es dóna cada parcial i prendre'n el mínim de cada parella. Aquest canvi ha implicat per una banda, un estudi profund d'una nova unitat de mesura per la sonoritat anomenada fon i per altra banda, la implementació d'un altre programa, basant-nos en [11], per tal de convertir la intensitat en sonoritat subjectiva (fons) seguint la $ISO266 : 2003$. Aquesta nova unitat, els fons, tenen a veure amb la sonoritat perceptiva i se'n parla a les properes seccions. A continuació s'explicaran les diverses funcions que s'han implementat per a l'estudi de la dissonància musical, a més de les propietats que se'n dedueixen a partir de les gràfiques.

### 3.3.1 Representació de les corbes de dissonància

L'essència del codi resideix en la representació gràfica de les corbes de dissonància. La dissonància per a cada interval està pensada com una suma de la dissonància que es genera per a cada parella de parcials adjacents, en afirmació de Plomp i Levelt.

Tal i com s'ha explicat anteriorment, Plomp i Levelt van iniciar el seu estudi amb tons simples i posteriorment, mitjançant els resultats obtinguts i el gràfic de la Figura 3.1, van portar l'estudi un pas més enllà, per veure com es comporta la dissonància per a tons complexes. De les vàries funcions que descriuen la corba per a tons simples, a aquest treball s'ha escollit la que es dóna a [8, p.345] :

$$d(x) = e^{-b_1 x} - e^{-b_2 x} \tag{3.1}$$

tal que $x$ representa la diferència en valor absolut de freqüències amb la freqüència greu fixa i les constants $b_1 = 3.5$ i $b_2 = 5.75$ s'escullen de forma que el pendent per tots els punts de la funció sigui el més similar possible a la corba de la Figura 3.4. Aquesta selecció es fa mitjançant el mètode dels mínims quadrats entre les dades inicials i $d(x)$. A més, la funció de dissonància escollida satisfà $d(0) = 0$.

Plomp i Levelt també suggereixen que en funció de la freqüència greu i les amplituds de les ones, la corba hauria de variar. La dissonància generada per dues ones sinusoïdals, cada una a una amplitud concreta es pot modelitzar matemàticament com:

$$d(f_1, f_2, \ell_1, \ell_2) = \ell_{12}[e^{-b_1 s(f_2 - f_1)} - e^{-b_2 s(f_2 - f_1)}] \tag{3.2}$$

de forma que $f_1$ és la freqüència greu amb sonoritat $\ell_1$, $f_2$ correspon a la freqüència aguda amb sonoritat $\ell_2$ i $\ell_{12} = \min(\ell_1, \ell_2)$. Es pren el mínim de les sonoritats per assegurar que el component que sona de forma més dèbil contribueix menys al total. A més, si una de les dues s'aproxima a 0, la dissonància desapareixerà, mentre que si la sonoritat de les parcials augmenta, la dissonància també. Es defineix el punt de màxima dissonància de la funció (3.1) com $x^* = \dfrac{\ln(b_1/b_2)}{b_1 - b_2}$. El paràmetre $s = \dfrac{x^*}{s_1 f_1 + s_2}$ s'usa per tal que es produeixi la màxima

dissonància a la ràtio adequada, és a dir, al 25% de la banda crítica. Aquest paràmetre prové d'interpolar vàries corbes generades per dos tons simples simultanis en els que es fixa com a freqüència base $f_1$ i l'altra freqüència es recorre al llarg de l'eix de freqüències a partir de la freqüència base. Mitjançant el mètode dels mínims quadrats s'obté $s_1 = 0.021$ i $s_2 = 19$.

Les corbes de dissonància es dibuixen per a un espectre particular. Fins ara s'ha modelitzat la corba de dissonància per a tons simples, en que l'espectre d'una nota té una sola parcial. La idea per a tons complexes és utilitzar la mateixa modelització, però de forma additiva, per a totes les parcials presents a l'espectre harmònic (Secció 2.1). En particular, veurem que les corbes canvien de forma si es canvia l'espectre, ja que és el que determina les parcials presents. Es considera l'espectre $F = \{f_i \mid i \in \{1, ..n\}\}$, de forma que $f_i$ són les parcials, i per tant múltiples d'$f_1$, $n$ el número de parcials i a més, $\ell_i$ representarà les sonoritats respectives.

Tenint present tot el comentat anteriorment, es defineix la **dissonància intrínseca** a F ($D_F$) com la dissonància causada per una freqüència fonamental amb les seves parcials. Així doncs, $D_F$ correspon a la suma de dissonàncies de totes les possibles parelles de parcials, expressades com $d(f_i, f_j.\ell_i, \ell_j)$ per a tots els possibles valors de $i$ i $j$, de forma que:

$$D_F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d(f_i, f_j, \ell_i, \ell_j)$$

Considerem dues notes tocades simultàniament, en que la que no correspon a la freqüència base es desplaça segons $\alpha \in \mathbb{R} \geq 1$ i les seves freqüències fonamentals són $f_1$ i $\alpha g_1$. Fins que no es digui el contrari, es considerarà el mateix espectre per les dues, amb $f_1 = g_1$, i $\alpha$ la ràtio de freqüències entre elles. Les dues notes generen una dissonància en què hi ha la presència de la intrínseca d'ambdós tons i l'ocasionada per la interacció d'ells, de forma additiva. Sigui $F$ l'espectre de la freqüència base i $G = \{\alpha g_j \mid j \in \{1, ..., m\}\}$ la de la freqüència no base amb $m$ parcials i sonoritats $\ell_j^{'}$ per $j \in \{1, ..., m\}$, respectivament, la dissonància de l'interval corresponent és:

$$D_{F,G}(\alpha) = D_F + D_G + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d(f_i, \alpha g_j, \ell_i, \ell_j^{'})$$

La dissonància $D_{F,G}(\alpha)$ al llarg de tots els intervals amb $\alpha \in [1, \infty)$ d'interès generats per els espectres harmònics $F$ i $G$ generen l'anomenada **corba de dissonància**.

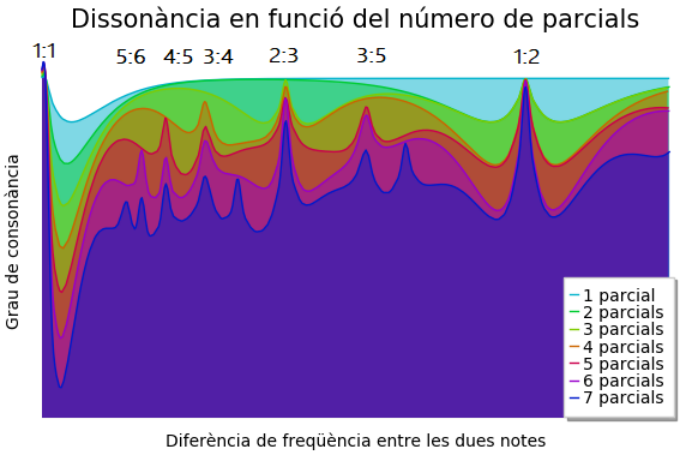



Figura 3.5: Corbes de dissonància de 1 a 7 parcials per a una freqüència base de 500 $Hz$

### 3.3.2 Intensitat i sonoritat de les ones sonores

Per representar la corba de dissonància és molt important el paper de la intensitat del so. Les ones sonores són producte de la propagació del so. Generen un moviment ondulatori de les partícules de l'aire, tot provocant la variació en la pressió estàtica de l'aire. La unitat de mesura del nivell de pressió sonora ($SPL$) són els micropascals ($\mu Pa$) i determina la intensitat del so, però el rang de valors és tan elevat que resulta totalment inadequada a nivells pràctics. Generalment, per a descriure la sensació física s'utilitza com a unitat la logarítmica dels micropascals, anomenada decibels ($dB$). Per el canvi d'unitats s'utilitza la fórmula $SPL = 20\log_{10}\left(\frac{P}{20}\right)$, on $P$ és la pressió sonora en $\mu Pa$.

Fletcher i Munson van definir una nova unitat pel concepte d'intensitat, però en termes perceptius. Aquest concepte s'anomena sonoritat i és el terme psicològic que descriure la magnitud de la sensació audible. La idea de Fletcher i Munson era trobar una relació entre el nivell de pressió sonora ($SPL$), que és la intensitat del so que genera una pressió sonora, mesurat en decibels, i la freqüència.

Per tal de trobar la relació comentada anteriorment, van realitzar un estudi experimental, explicat a [11], respecte la sonoritat en termes perceptius. En primer lloc, van escollir diversos tons purs, amb diferents sonoritats, classificats segons si la seva freqüència era o no de 1000 $Hz$. Als participants se'ls va presentar diversos dels tons amb freqüència diferent a 1000 $Hz$, i per cada un es demanava que l'identifiquessin amb un dels de 1000 $Hz$ quan els dos tinguessin la mateixa sonoritat. Posteriorment, coneixent la $SPL$ de cada un dels tons, van traçar unes corbes que unien els que se'ls va associar la mateixa sonoritat. Aquestes corbes s'anomenen **corbes isofòniques**.

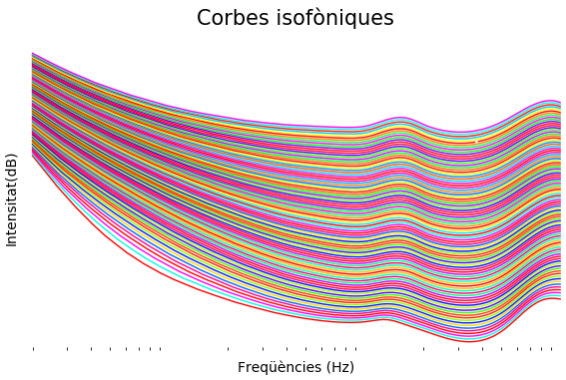



Figura 3.6: Corbes isofòniques

La magnitud de sonoritat en termes perceptius ve donada per les corbes isofòniques, i s'anomena **fon**. Els fons corresponen a cada una de les corbes isofòniques, i a més reben el nom de la corresponent $SPL$ a 1000 $Hz$. Aleshores tots aquells tons que es trobin a una mateixa corba correspondran al mateix fon. La unitat no logarítmica dels fons s'anomena sons. Sigui $L_N$ la sonoritat expressada en fons, $N$ en sons, la relació entre elles ve donada per:

$$N = \begin{cases} 2^{(0.1L_N)-4}, & si \;\; L_N \geq 40 \\ \left(\frac{L_N}{40}\right)^{2.86} - 0.005, & si \;\; L_N < 40 \end{cases} \tag{3.3}$$

A [8] es suggereix una possible millora per la representació de les corbes de dissonància. Consisteix en donar un valor per la sonoritat en termes de les corbes isofòniques. D'acord amb l'Equació (3.2), al codi en SAGEMATH s'han implementat diverses funcions per a determi-

nar les corresponents magnituds de la sonoritat en termes perceptius. Tenint present que la dissonància funciona de forma additiva, per a cada parella de parcials retorna les corresponents sonoritats i es queda amb la menor. Cal remarcar que al codi es consideren exactament 90 corbes isofòniques per fer-ne més eficients els càlculs, però, per descomptat, la sonoritat és una magnitud contínua. Es poden veure representades a la Figura 3.6.

La base de dades $ISO$ 226 : 2003 ( *"Acoustics - Normal equal-loudness level contours"*) permet mitjançant una modelització matemàtica calcular el nivell de pressió sonora de freqüències concretes amb les corresponents sonoritats. Aquesta base conté dades en relació a la percepció de la sonoritat ($a_f$), el llindar d'audició ($T_f$), la magnitud de la transformada lineal de la funció ($L_u$) i el nivell de sonoritat en relació a sons de 1000 $Hz$ ($L_N$), entre d'altres.

Mitjançant el següent model matemàtic, explicat més detalladament a [12], s'obtenen les $SPL$ corresponents a diverses freqüències de com a màxim 120 $dB$ per freqüències sota 1 $kHz$ i 100 $dB$ per freqüències d'entre 1 i 12.5 $kHz$. Totes aquelles que tenen un mateix nivell de sonoritat ($L_N$) es poden interpolar generant la corresponent corba isofònica. El model és el següent:

$$SPL = \frac{10\log_{10}\left(4.47\cdot 10^{-3}(10\cdot 0.025L_N - 1.14) + \left[0.4\cdot 10^{\left(\frac{T_f+L_u}{10}-9\right)}\right]^{a_f}\right)}{a_f} - L_u + 94\ dB$$

on per cada una de les variables es prendrà el valor corresponent a la freqüència desitjada.

La Figura 3.7 representa el mateix cas que la Figura 3.5, però en aquest cas, implementant les corbes isofòniques per tal de tenir un model més acurat basat amb la sonoritat. Finalment, la Figura 3.8 presenta una comparació dels dos models. Per a més informació sobre els conceptes comentats a aquesta secció, consultar [13].

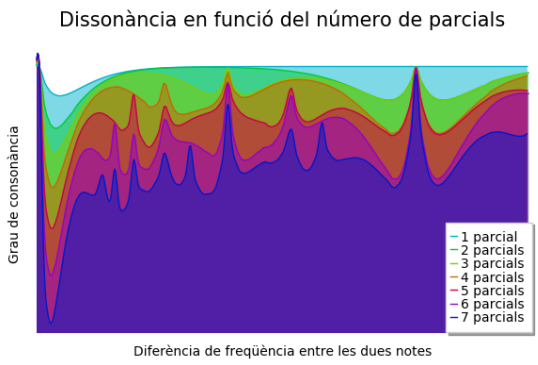



Figura 3.7: Corbes de dissonància de 1 a 7 parcials per a una freqüència base de 500 $Hz$ mitjançant les corbes isofòniques

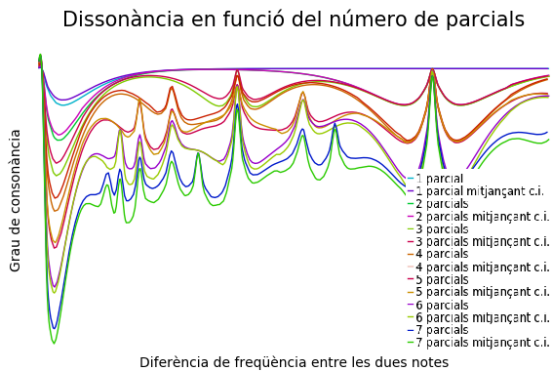



Figura 3.8: Comparació de les corbes de dissonància sense i amb la presència de les corbes isofòniques i freqüència base 500 $Hz$

### 3.3.3 Propietats de les corbes de dissonància

Arribats a aquest punt, estudiem les propietats generals de les corbes de dissonància tot explorant els diversos patrons del model matemàtic.

La dissonància segueix un patró en funció de la ràtio de freqüències $\alpha$. Prop de la unitat, és a dir, $\alpha \in [1, 1.15)$ es generen unes petites pulsacions però no és fins $\alpha \approx 1.15$ que l'orella les capta i les interpreta com a dissonància. A mesura que $\alpha$ segueix incrementant, es tornen a generar màxims i mínims locals de forma que els màxims locals de la corba de dissonància es donen a ràtios de freqüències senzilles. Per $\alpha$ més grans, les parcials de $F$ i $G$ estan a més distància i a més, les parcials es manifesten cada vegada amb menys intensitat cosa que comporta una petita interacció entre elles i conseqüentment una petita dissonància.

La forma de les corbes de dissonància depèn de les freqüències que componen l'espectre i per tant, de la forma d'ona. Qualsevol parella de tons amb espectres complexos mostren un cert grau de dissonància a causa de la interacció entre les parcials. Quan aquest espectre es modifica, també en varia la localització i la profunditat dels màxims i mínims de dissonància. S'observa que hi ha dos classes de mínims de dissonància. Per una banda els causats per les parcials coincidents, i per altra, aquells causats per la distància entre les parcials.

Un dels mínims de dissonància més clars és l'uníson, és a dir un interval en què la diferència de freqüències és 0, i a més, $\alpha = 1$. Això es deu a que les parcials d'ambdues notes estan alineades i conseqüentment serà l'interval amb més diferències de parcials nul·les. A la Figura 3.9 s'observa que per a diferents freqüències base s'obté sempre un mínim de dissonància molt clar al 25% de la banda crítica, però amb la peculiaritat que conforme més gran és la freqüència base, més pronunciat i ample és el mínim de la corba.

El següent teorema dóna un resultat sobre la dissonància en tons prou separats:

**Teorema 2.** *Per a qualsevol interval amb espectres $F$ i $G$, $\lim_{\alpha\to\infty} D_{F,G}(\alpha) = D_F + D_G$.*

*Demostració.* Es té que $d(x) \longrightarrow 0$ quan $x \longrightarrow \infty$. Com $x$ representa la diferència entre les freqüències de l'interval, equivalentment s'obté $d(f_i, \alpha g_j, \ell_i, \ell_j') \longrightarrow 0$ $\forall i, j$ quan $\alpha \longrightarrow \infty$. Per tant:

$$\lim_{\alpha\longrightarrow\infty} D_{F,G}(\alpha) = \lim_{\alpha\longrightarrow\infty} D_F + D_G + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d(f_i, \alpha g_j, \ell_i, \ell_j') = D_F + D_G$$

Anàlogament, $d(x) \longrightarrow 0$ quan $x \longrightarrow 0$ i per tant, $\lim_{\alpha\longrightarrow 0} D_{F,G}(\alpha) = D_F + D_G$ □

Així queda clar que conforme les freqüències fonamentals es van distanciant, la interacció entre les parcials esdevé negligible, i conseqüentment la dissonància s'aproxima a un valor que no és més que l'intrínsec de la dissonància de cadascun dels sons.

Finalment, el *principi de les parcials coincidents* diu que els màxims locals ocorren als intervals amb ràtios $\dfrac{\alpha g_j}{f_i}$ tals que $f_i$ i $\alpha g_j$ són parcials dels espectres $F$ i $G$ respectivament, degut a l'alineació de vàries de les parcials i per tant, la cancel·lació de moltes diferències entre elles.

Les Figures 3.5, 3.7, 3.8 i 3.9 són exemples en els quals s'ha considerat el mateix número de parcials per a ambdues notes dels intervals, i a més, la mateixa forma d'ona. De fet, aquest és

el cas de dues notes d'un mateix instrument, ja que ambdues generen el mateix espectre. Una de les millores que s'ha fet al codi ha estat el fet de poder-ne canviar el número de parcials i donar intensitats diferents a les parcials, en funció de la forma d'ona desitjada. Per a totes les figures d'aquesta secció s'ha iniciat el programa amb 5 *sons*, i posteriorment, en els casos pertinents, s'aplica la transformació d'aquesta unitat mitjançant les corbes isofòniques. A la Figura 3.10 s'observa la dissonància per a les quatre formes d'ona més elementals comentades a la Secció 2.1, amb el mateix número de parcials.

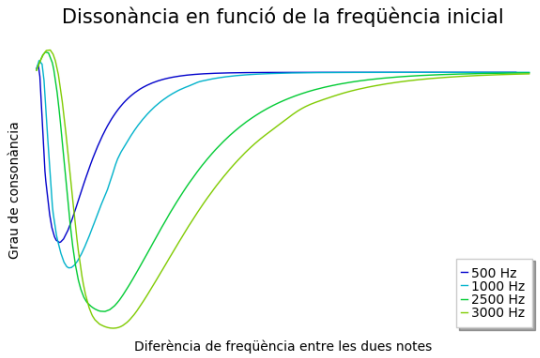



Figura 3.9: Corbes de dissonància amb 1 parcial per a diferents freqüències base

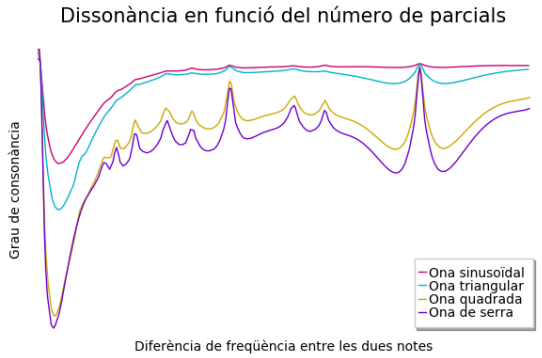



Figura 3.10: Corbes de dissonància per a diferents formes d'ona amb 7 parcials

Però no només es genera dissonància quan sonen dos tons simultanis d'un mateix instrument, sinó també es pot donar el cas en que els tons siguin donats per dos instruments diferents. A la Figura 3.11 es considera que la forma d'ona dels dos instruments és la mateixa però el número de parcials diferent. De totes formes, aquest cas exacte a la realitat no pot succeir ja que cada instrument genera una forma d'ona particular. El codi que ens ha permès fer aquest gràfic és útil per a formes d'ona diferents que contemplin diferent número de parcials. Ja per acabar, es pot donar el cas que dos instruments diferents, i per tant dues ones amb formes totalment diferents sonin simultàniament. A la Figura 3.12 es mostra com cooperarien una ona quadrada (similar a la d'un clarinet) amb 4 parcials i una ona de serra (similar a la d'un violí) amb 7 parcials. Finalment, l'afinació dels instruments esdevé fonamental per tal que cooperin. En cas contrari, la superposició d'ones no s'alinearà i la diferència de freqüències entre les dues notes quedarà dins la banda crítica, tot generant una sensació de molta dissonància.

Ja per acabar, les propietats comentades són específiques per les corbes de dissonància. Aquestes corbes venen generades per la variació d'un paràmetre: la ràtio de freqüències dels intervals. Recordem que un interval és quan dos sons es produeixen simultàniament. El mateix concepte, però per més de dos sons s'anomena acord. Fins ara s'ha parlat d'intervals però hom es pregunta què succeeix quan en comptes d'intervals hi ha la presència d'acords. En aquest cas intervenen dos paràmetres: la ràtio de freqüències del primer i el segon to i la del primer i el tercer. S'estudiarà aquest aspecte a la següent secció.

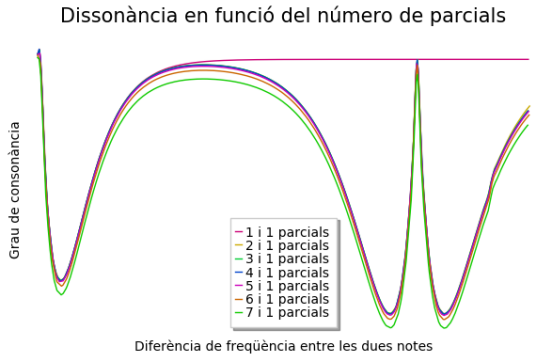



Figura 3.11: Corbes de dissonància per a diferents número de parcials a ambdós tons

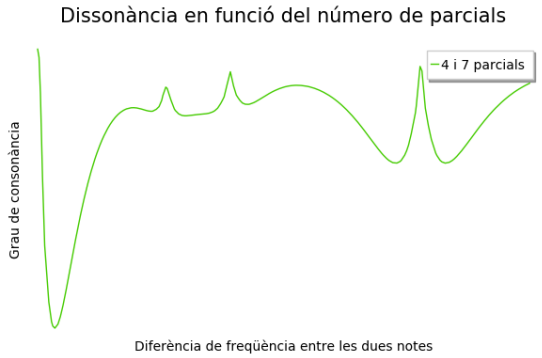



Figura 3.12: Corba de dissonància generada per una ona quadrada i una ona de serra

## 3.4 Superfícies de dissonància

La idea d'aquesta secció és respondre a la pregunta amb què acaba la Secció 3.3.3. Ho estudiarem pel cas més senzill, és a dir per acords de 3 sons, d'on podrem treure'n unes conclusions més globals.

Tal i com s'ha comentat durant tot el treball, la dissonància es genera de forma additiva entre totes les possibles parelles de parcials. Sigui un acord de tres sons tals que la freqüència fonamental d'un d'ells és la freqüència base, i els altres dos estan a una ràtio de $\alpha$ i $\beta$ respecte de la freqüència base, amb espectres $F = \{f_i \mid i \in \{1, ..., n\}\}$, $G = \{\alpha g_j \mid j \in \{1, ..., m\}\}$ i $H = \{\beta h_k \mid k \in \{1, ..., t\}\}$ respectivament. Aleshores, de forma anàloga a les seccions anteriors, la dissonància total per cada un dels acords ve donada per:

$$D_{F,G,H}(\alpha, \beta) = D_F + D_G + D_H + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{t} d(f_i, \alpha g_j, \beta h_k, \ell_i, \ell_j', \ell_k'')$$

on $\ell_i, \ell_j', \ell_k''$ són les sonoritats corresponents a les freqüències $f_i$, $\alpha g_j$ i $\beta h_k$.

A la Figura 3.13 s'aprecia una superfície que representa la superfície de dissonància pel cas d'un acord on tots els tons són del mateix instrument, i per tant, tenen la mateixa forma d'ona i el mateix número de parcials. Per veure-ho amb més claredat s'ha invertit la figura tal i com es pot apreciar a la Figura 3.14, en què com més amunt, més dissonant és aquell acord. Cada punt d'aquests gràfics representa la dissonància amb una freqüència base de 500 $Hz$, i les dues situades a les ràtios corresponents amb el que indiquen els eixos. Cal dir, que malgrat s'hagi fet l'estudi per a acords amb les mateixes formes d'ona, el codi permet implementar diverses formes d'ona, però requerint una potència computacional més gran.

Mitjançant les Figures 3.13 i 3.14 es confirma el fet que quan dues notes es troben dins la banda crítica generen la màxima dissonància, corresponent al pic de l'esquerra de qualsevol de les dues figures. S'observa també que en els extrems es dóna una sensació de dissonància molt baixa. Finalment, a la Figura 3.14 s'aprecia una diagonal en la qual hi haurà intervals dissonants. Aquests són causats per la interferència del segon i tercer to de l'interval, en què estan dins una mateixa banda crítica.

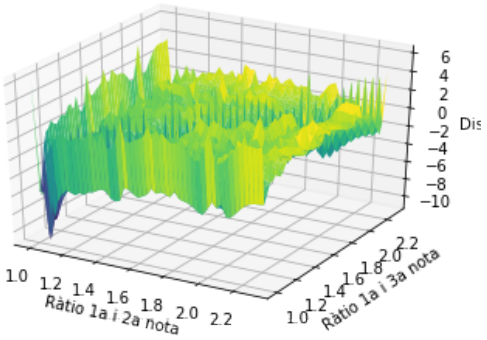



Figura 3.13: Superfície de dissonància amb 7 parcials per a acords de tres notes amb freqüència base de 500 $Hz$

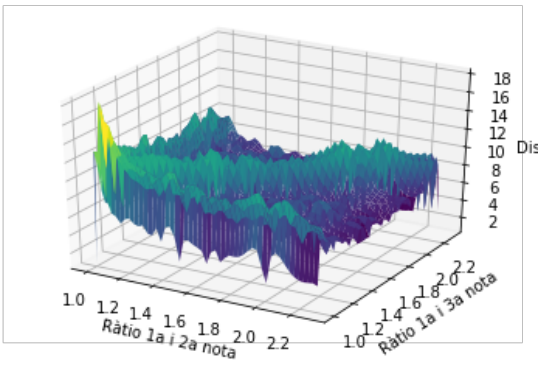



Figura 3.14: Superfície invertida amb 7 parcials i tres notes amb freqüència base de 500 $Hz$

Ja per acabar, generalitzant aquest fet per a acords amb presència d'$n$ sons amb espectres $F_i = \{\alpha_i(f_i)_j \mid \forall j \in \{1, ..., k_i\}\}$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $k_i$ el cardinal de cada espectre i $\alpha_i$ la variació respecte la freqüència base inicial, tenint present que $\alpha_1 = 1$, s'obté la següent fórmula :

$$D_{F_1,...,F_n}(\alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} D_{F_i} + \sum_{j_1=1}^{k_1} ... \sum_{j_n=1}^{k_n} d((f_1)_{j_1}, \alpha_2(f_2)_{j_2}, ..., \alpha_n(f_n)_{j_n}, \ell^1_{j_1}, ..., \ell^n_{j_n})$$

on $\ell^1_{j_1}, ..., \ell^n_{j_n}$ són les sonoritats respectives de $(f_1)_{j_1}, \alpha_2(f_2)_{j_2}, ..., \alpha_n(f_n)_{j_n}$. Cal recalcar que per a dimensions més grans que 3 no hi ha forma fàcil de representar-ho gràficament.

## 3.5 Possibles millores futures

El codi que s'ha emprat per l'anàlisi del treball es pot trobar a l'Apèndix B. Aquest codi conté alguns petits errors que m'agradaria comentar. En primer lloc, els valors per al nivell de pressió sonora ($SPL$) són limitats donat el llindar d'audició i el punt en què el so es percep com un dolor. És per això que s'ha afegit una tolerància d'error en què per a freqüències a partir de 12500 $Hz$, la $SPL$ tindrà el mateix valor que per 12500 $Hz$. Així el codi es pot emprar per a freqüències prou altes.

En segon lloc, l'algorisme implementat és molt pesat, així que per reduir-ne la càrrega s'han pres certes mesures. Ja s'ha comentat durant el treball, però m'agradaria insistir en el fet que la sonoritat es mesura de forma contínua, fet que computacionalment esdevé impossible. És per això que s'han implementat les corbes que representen els fons de 0 a 90 amb números naturals. Una possible millora de l'algorisme per a donar-ne una aproximació més bona és aplicar el mètode de bisecció entre les dues corbes sobre les quals estan els punts d'interès. A més, pel que fa a la superfície de dissonància, per fer-ho computacionalment viable, s'ha considerat el cas en què no es tenen en compte les corbes isofòniques.

Finalment, penso que seria interessant analitzar com varia la dissonància en funció de si les freqüències presents corresponen a punts de creixement o decreixement de les corbes isofòniques.

# Bibliografia


[1] William A. Sethares *CD from the book Tuning, Timbre, Spectrum, Scale* (2005). Disponible a https://sethares.engr.wisc.edu/TTSS2.htm

[2] Dave Benson *Music: A Mathematical Offering* (2008). Disponible a https://logosfoundation.org/kursus/music_math.pdf

[3] Paul A. Tipler, *Física para la ciencia y la tecnología. Mecánica, termodinámica, oscilaciones y ondas. Vol. I* (1999).*Editorial Reverté, S. A.*

[4] David R. Lapp, *The physics of music and musical instruments* (2002).*Tufts University*

[5] E.Zwicker, G. Flottorp i S.S. Stevens *Critical bandwidth in loudness summation* (1957). Disponible a http://www.ee.columbia.edu/~dpwe/e6820/papers/ZwicFS57-crband.pdf

[6] Giorgio Dillon *Calculating the dissonance of a chord according to Helmholtz theory* (2013). Disponible a https://arxiv.org/pdf/1306.1344.pdf

[7] Critical bands and mixed-frequency scaling: Sequential dependencies, equal-loudness contours, and power function exponents *Lawrence M. Ward*(1990). Disponible a https://link.springer.com/content/pdf/10.3758/BF03203107.pdf

[8] William A. Sethares *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale* (2005). Disponible a http://www.r-5.org/files/books/rx-music/tuning/William_A_Sethares-Tuning_Timbre_Spectrum_Scale-EN.pdf

[9] R. Plomp i W.J.M. Levelt *Musical Consonance and Critical Bandwidth* (1962). Disponible a https://pure.mpg.de/rest/items/item_66223/component/file_102829/content

[10] R. Plomp i W.J.M. Levelt *Tonal Consonance and Critical Bandwidth* (1965). Disponible a https://www.mpi.nl/world/materials/publications/levelt/Plomp_Levelt_Tonal_1965.pdf

[11] Harvey Fletcher W. A. Munson *Loudness, Its Definition, Measurement and Calculation* (1933). Disponible a https://pdfs.semanticscholar.org/c05b/bcae742902528524c0aa728b6d82f77c957c.pdf

[12] Jeremy Charbonneau *Comparison of loudness calculation procedure results to equal loudness contours* (2010). Disponible a https://core.ac.uk/download/pdf/72791416.pdf

[13] Lawrence E. Marks i Mary Florentine *Measurement of Loudness, Part I: Methods, Problems, and Pitfalls* (2000). Disponible a http://media.axon.es/pdf/81940_2.pdf

# Apèndix A

# Gràfics de l'estudi de Plomp i Levelt

Les Figures A.1, A.2, A.3 i A.4 i A.5 representen els resultats dels cinc estudis que van fer Plomp i Levelt l'any 1965, en funció de la freqüència mitjana dels intervals. La corba contínua correspon a la mediana de les percepcions del nivell de consonància en funció de la diferència de les freqüències fonamentals dels intervals. Les discontínues representen la mitjana entre la percepció més baixa per cada interval i la mediana del conjunt de dades, i el mateix però amb la més alta. La Figura A.6 mostra com varia la consonància d'alguns intervals amb una determinada ràtio de freqüències depenent de la freqüència més baixa.

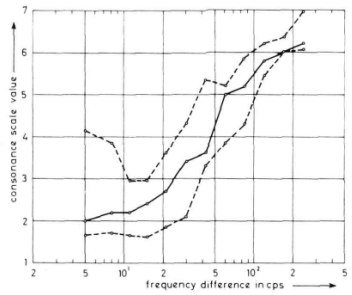



Figura A.1: Intervals amb mitjana d'uns 125 $Hz$

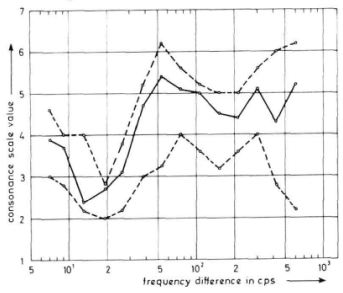



Figura A.2: Intervals amb mitjana d'uns 250 $Hz$

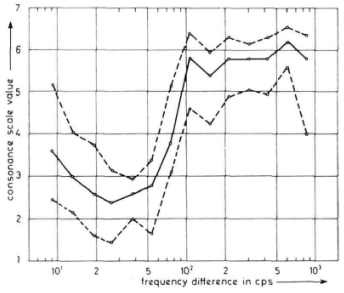



Figura A.3: Intervals amb una mitjana d'uns 500 $Hz$

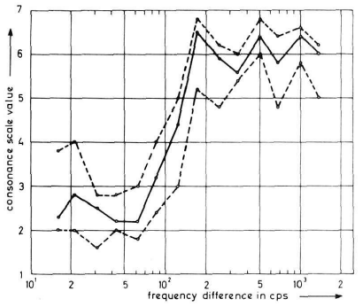



Figura A.4: Intervals amb una mitjana d'uns 1000 $Hz$

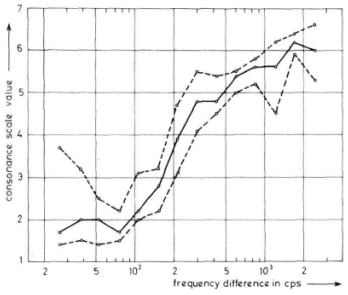



Figura A.5: Intervals amb una mitjana d'uns 2000 $Hz$

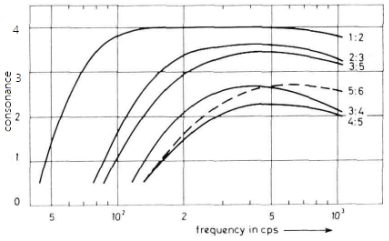



Figura A.6: Nivell de consonància de diverses ràtios en funció de la freqüència més baixa que genera cada un dels intervals

# Apèndix B

# Codi en SageMath

En aquest Apèndix es mostra el codi que s'ha implementat amb el SageMath. Per a cada funció hi ha una breu descripció de com utilitzar-la i quina és la seva funció. A més, mitjançant els 10 casos que es mostren, s'han realitzat les diferents figures del Capítol 3.3. Cal dir que part del codi no es pot veure degut a la llargada d'algunes de les línies que el composen. Per a més informació, consultar l'arxiu ipynb que s'adjunta juntament amb la memòria.

```
In [1]: #PAQUETS NECESSARIS
        import numpy as np
        from scipy.interpolate import interp1d
        import matplotlib.pyplot as plt
        from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

        #CONSTANTS NECESSÀRIES
        loudness=5 #Sonoritat mesurada en sons
        Dstar=0.24 #Mínim local de la funció de dissonància
        dif_freq=2.3 #Màxima ràtio de freqüències (x^*)

        #Constants de la funció de dissonància(d) definida a la pàgina 26 de la memòria:
        b1=-3.51
        b2=-5.75
        S1=0.0203
        S2=18.96

In [2]: #DEFINICIONS
        def parcials(freq,num_parcials): #Torna una llista de parcials a partir de la freqüència
                                         #Entrar la freqüència base i el número de parcials.
            pcials=[freq*i for i in [1..num_parcials]]
            return pcials


        def iso226(phon,plot): #Torna els punts que mitjançant interpolació ens donaran les corb
                               #evaluades a 29 freq(20-12.5 kHz).
                               #Entrar el número de corba, "plot=False" si es vol plotejar la co
                               #"plot=True" si es vol trobar els punts que la generen.

            freq = vector([20,25,31.5,40,50,63,80,100,125,160,200,250,315,400,500,630,800,1000,1
            af =vector([0.532,0.506,0.480,0.455,0.432,0.409,0.387,0.367,0.349,0.330,0.315,0.301,
            Lu = vector([-31.6,-27.2,-23.0,-19.1,-15.9,-13.0,-10.3,-8.1,-6.2,-4.5,-3.1,-2.0,-1.1
            Tf = vector([78.5,68.7,59.5,51.1,44.0,37.5,31.5,26.5,22.1,17.9,14.4,11.4,8.6,6.2,4.4

            primer=4.47*(10^(-3))*(10^(0.025*phon) - 1.15)
            exponent=(((Tf+Lu)/10)-9*vector([1]*len(Tf)))
            segon_terme=vector([(0.4*(10^exponent[i]))^af[i] for i in [0..len(exponent)-1]])
            primer_terme=primer*vector([1]*len(exponent))
            Af = primer_terme+segon_terme
            spl = vector([(10/af[i])* math.log(Af[i],10) for i in [0..len(Lu)-1]])- Lu + 94*vect

            if plot is False:
                return freq, spl

            if plot is True:
                return zip(freq,spl)
```

```
def isofoniques(num_corbes): #Torna com a objectes les corbes isofòniques.
                             #Entrar el número de corbes isofòniques desitjades.
    interpoladors=[]
    for k in [0..num_corbes]:
            a, b = iso226(k,False)
            f = interp1d(a, b, "cubic")
            interpoladors+=[f]
    return interpoladors

interp=isofoniques(90) #Guarda les 90 corbes per tal d'haver-les de generar una sola veg


def iso_propera(totes,pressio_sonora): #Torna la corba isofonica més propera a la freqüè
                                       #Entrar les freqüències i spl corresponents.
    Iso = []
    for Z in [0..90]:
        K=interp[Z](totes)
        if Z == 0:
            error = np.abs(pressio_sonora-K)
            temp = 0
        elif np.abs(pressio_sonora-K) < error:
            error = np.abs(pressio_sonora-K)
            temp = Z
        elif np.abs(pressio_sonora-K) > error:
            break
    Iso +=[temp]
    return Iso


def SPL(totes,formes):  #Torna el vector del nivell de pressió sonora per a cada una de
                        #Entrar les freqüències desitjades, "formes=True" si es vol les
                        #explicades al treball (llegenda de formes al CAS 8), i "formes=
                        #vol la mateixa intensitat per totes les parcials (tenir en comp
                        #els casos, excepte el 8 i 9 se suposa que les intensitats són i
                        #totes les parcials).

    spl=[]

    if formes is False:
        for n in [0..len(totes)-1]:
            if totes[n]>12500:
                totes[n]=12500

            corba=iso_propera(totes[n],40+10*(ln(loudness)/ln(2)))
            spl+=[interp[corba[0]](totes[n])]


    elif formes==0:
```

```
        if totes[0]>12500:
            totes[0]=12500
        corba=iso_propera(totes[0],40+10*(ln(loudness)/ln(2)))
        spl+=[interp[corba[0]](totes[0])]+[0 for i in [2..len(totes)]]

    elif formes==1:
        for n in [0..len(totes)-1]:
            if totes[n]>12500:
                totes[n]=12500

            corba=iso_propera(totes[n],40+10*(ln(loudness*(4/(np.pi*(2*(n+1)-1)^2)))/ln(
            spl+=[interp[corba[0]](totes[n])]

    elif formes==2:
        for n in [0..len(totes)-1]:
            if totes[n]>12500:
                totes[n]=12500

            corba=iso_propera(totes[n],40+10*(ln(loudness*(4/(np.pi*(2*(n+1)-1))))/ln(2)
            spl+=[interp[corba[0]](totes[n])]

    elif formes==3:
         for n in [0..len(totes)-1]:
            if totes[n]>12500:
                totes[n]=12500

            corba=iso_propera(totes[n],40+10*(ln(loudness/(n+1))/ln(2)))
            spl+=[interp[corba[0]](totes[n])]

    return spl


def dissonancia(totes,sons=True,formes=False): #Calcula la dissonància generada per les
                                               #Entrar "sons=False" si no es vol tenir e
                                               #Entrar "formes=True" si es vol les forme
                                               #de formes al CAS 8). Tenir en compte que
                                               #se suposa que les intensitats són iguals


    N=len(totes)

    if sons is True:
        for k in [0..N-1]:
            if totes[k]>12500:
                totes[k]=12500

        phons=[]
        phons1=[]
```

```
        phons2=[]
        if formes is not False:
            for j in [0..X-1]:
                phons1+=iso_propera(totes[j],SPL(totes[0:X],formes[0])[j])
            for j in [0..Y-1]:
                phons2+=iso_propera(totes[j],SPL(totes[X:X+Y],formes[1])[j])
            phons=phons1+phons2

        if formes is False:
            for j in [0..N-1]:
                phons+=iso_propera(totes[j],SPL(totes,False)[j])


        sns=[]
        for t in [0..len(phons)-1]:
            if phons[t]>=40:
                sns+=[2^((0.1*phons[t])-4)]
            elif phons[t]<40:
                sns+=[(40+phons[t]*0.005)^0.35]



    D=0
    for i in [2..N]:
        Fmin=vector(totes[0:N-i+1])
        dif=vector(totes[i-1:N])-Fmin
        Fdif=[abs(dif[j]) for j in [0..N-i]]

        S=[Dstar/(S1*Fmin[j]+S2) for j in [0..len(Fmin)-1]]
        exp=[math.exp(b1*S[k]*Fdif[k])-math.exp(b2*S[k]*Fdif[k]) for k in [0..len(Fmin)-

        if sons is False:
            ampl=[loudness for k in [0..len(totes)]]
            minampl=[min(ampl[i-1:N][j],ampl[0:N-i+1][j]) for j in [0..len(Fmin)-1]]
            diss=vector([minampl[k]*exp[k] for k in [0..len(S)-1]])

        if sons is True:
            sonsmin=[min(sns[i-1:N][j],sns[0:N-i+1][j]) for j in [0..len(Fmin)-1]]
            diss=vector([sonsmin[k]*exp[k] for k in [0..len(exp)-1]])

        for k in [0..len(diss)-1]:
            D+=diss[k]

    return [D]


def diss3d(k,s,numero_parcials): #Calcula la dissonància per a acords de 3 notes
                                 #Entrar les ràtios entre la 1a i 2a nota i 1a i 3a,
```

```
                                    #i el número de parcials.
        totes_parcials1=parcials(freq_greu,numero_parcials)+parcials(k*freq_greu,numero_parc
        disson1=dissonancia(totes_parcials1,sons=False)

        totes_parcials2=parcials(freq_greu,numero_parcials)+parcials(s*freq_greu,numero_parc
        disson2=dissonancia(totes_parcials2,sons=False)

        totes_parcials3=parcials(s*freq_greu,numero_parcials)+parcials(k*freq_greu,numero_pa
        disson3=dissonancia(totes_parcials3,sons=False)

        disson=np.dot(disson1+disson2+disson3,[1,1,1])
        return 7-disson


    def rainbow_color(i): #Codi de color
        return Color((0.666666666666+i*0.618033988749895) % 1, 1, 0.4, space='hsl')
```

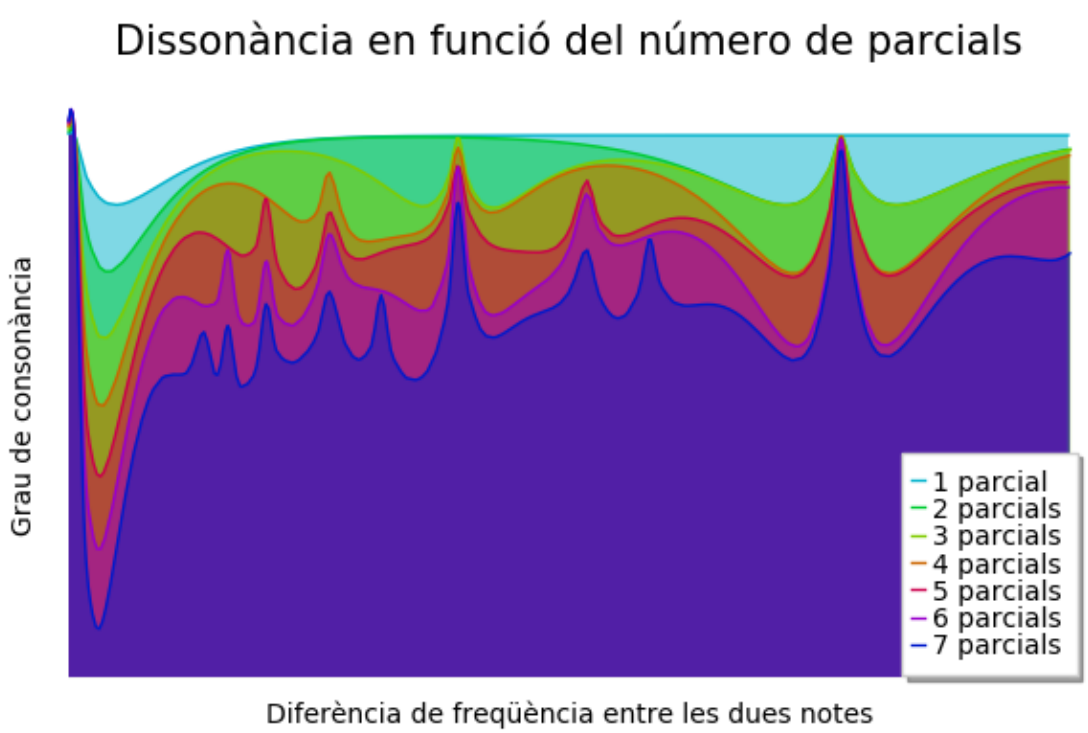
In [3]:
```
#---------------------CAS 1: DISSONÀNCIA EXACTA D'UN INTERVAL SENSE I AMB CORBES ISOFÒNI
#------------------Entrar les freqüències i el número de parcials corresponent a cada fr

freq_greu=[400,400]
numero_parcials=[7,7]

#-------------------------------------------------------------------------------------
totes_parcials=[]

for s in [0..len(freq_greu)-1]:
    totes_parcials+=parcials(freq_greu[s],numero_parcials[s])

disson1=dissonancia(totes_parcials,sons=False)
ampl=7-disson1[0]
disson2=dissonancia(totes_parcials)
ph=7-disson2[0]

print('El nivell de consonància amb amplitud equival a '+str(ampl))
print('El nivell de consonància amb sons equival a '+str(ph))
```

```
El nivell de consonància amb amplitud equival a 6.705787142572744
El nivell de consonància amb sons equival a 6.69748462920919
```

In [4]:
```
#-----------------CAS 2: CORBES DE DISSONÀNCIA ON EL NÚMERO DE PARCIALS DE LES DUES NOTE
#------------------------------ÉS EL MATEIX I NO ES CONSIDEREN LES CORBES ISOFÒNIQUES---
#--------------------------------Entrar la freqüència base i el número de parcials:-----

freq_greu=500
numero_parcials=[1..7]
```

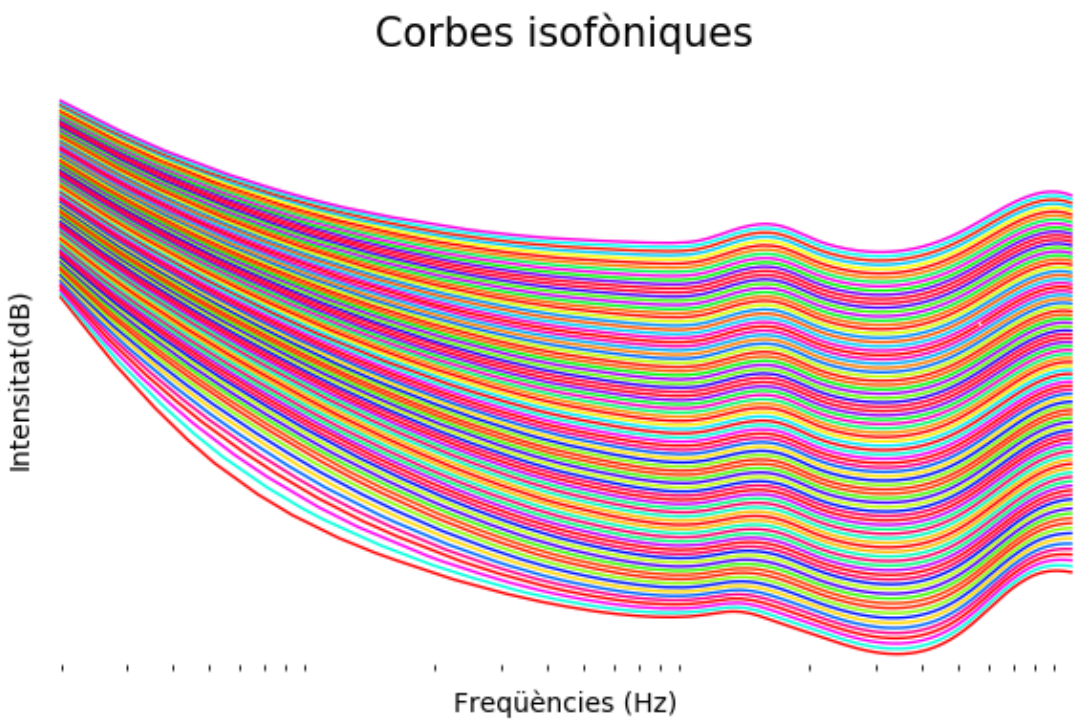
```
#-----------------------------------------------------------------------------------------

grafic=plot([],(x,0,670))
for X in numero_parcials:
    disso=[0]
    k=1
    eix_x=[1]

    for alpha in [1..100*(dif_freq-1)+1]:
        totes_parcials=parcials(freq_greu,X)+parcials(k*freq_greu,X)
        disson=dissonancia(totes_parcials,sons=False)
        disso=disso+disson
        k+=0.01
        eix_x+=[k]

    px=freq_greu*vector(eix_x)-vector([freq_greu for i in [1..len(eix_x)]])
    py=vector([7-disso[i] for i in [0..len(disso)-1]])


    if X==1:
        grafic+=plot(spline(zip(px,py)),(x,1,670),fontsize=15,fill='axis', fillcolor=rai

    elif X!=1:
        grafic+=plot(spline(zip(px,py)),(x,1,670),fontsize=15,fill='axis', fillcolor=rai
grafic
```

Out[4]:



In [5]:
```
#-------------------------------------------CAS 3: CORBES ISOFÒNIQUES------------------
#--------------------------------------------------------------------------------------

grafic=plot([],(x,20,10000),scale='semilogx')
for k in [0..90]:
    grafic+=plot(spline(iso226(k,True)),(x,20,10000),scale='semilogx',color=hue(sin(k/2)
grafic

#--------------------------------------------------------------------------------------
#----------------------A partir d'aqui tots els programes tenen en compte les corbes iso
#--------------------------------------------------------------------------------------
```

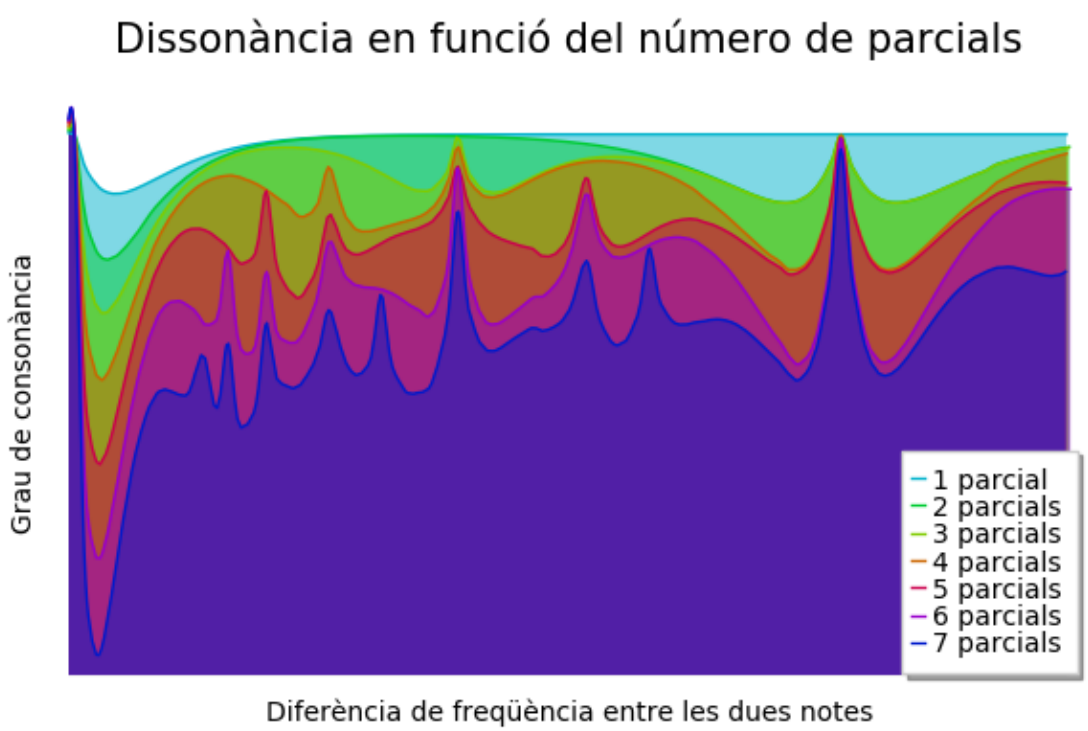
Out[5]:




In [6]:
```
#-----------------CAS 4: DISSONÀNCIA ON EL NÚMERO DE PARCIALS DE LES DUES NOTES SEMPRE É
#--------------------------------Entrar la freqüència base i el número de parcials:-----

freq_greu=500
numero_parcials=[1..7]

#--------------------------------------------------------------------------------------
```

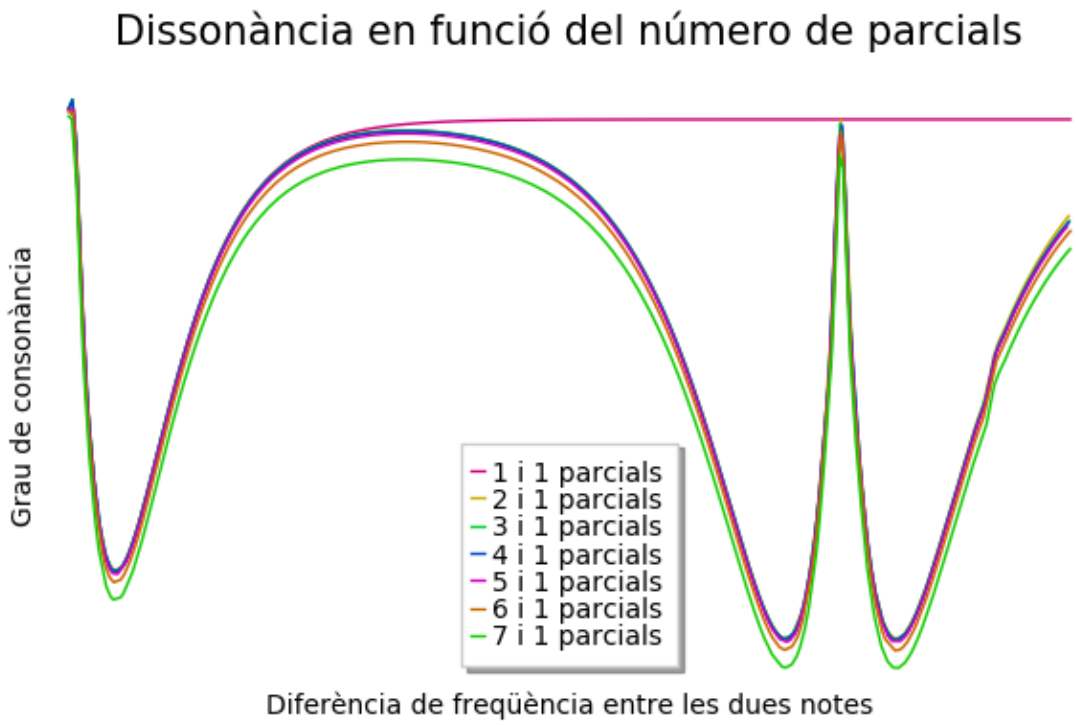
```
grafic=plot([],(x,0,670))
for X in numero_parcials:
    disso=[0]
    k=1
    eix_x=[1]

    for alpha in [1..100*(dif_freq-1)+1]:
        totes_parcials=parcials(freq_greu,X)+parcials(k*freq_greu,X)
        disson=dissonancia(totes_parcials)
        disso=disso+disson
        k+=0.01
        eix_x+=[k]

    px=freq_greu*vector(eix_x)-vector([freq_greu for i in [1..len(eix_x)]])
    py=vector([7-disso[i] for i in [0..len(disso)-1]])

    if X==1:
        grafic+=plot(spline(zip(px,py)),(x,1,670),fontsize=15,fill='axis', fillcolor=rai

    elif X!=1:
        grafic+=plot(spline(zip(px,py)),(x,1,670),fontsize=15,fill='axis', fillcolor=rai
grafic
```

Out[6]:



In [7]:
```
#------------------CAS 5: DISSONÀNCIA ON EL NÚMERO DE PARCIALS DE LES DUES NOTES POT SER
#------------------------Entrar la freqüència base i el número de parcials d'ambdues not

freq_greu=500
parcials_greu=[1..7]
parcials_aguda =[1]

#-------------------------------------------------------------------------------------

grafic=plot([],(x,0,670))
for X in parcials_greu:
    for Y in parcials_aguda:
        disso=[0]
        k=1
        eix_x=[1]

        for alpha in [1..100*(dif_freq-1)+1]:
            totes_parcials=parcials(freq_greu,X)+parcials(k*freq_greu,Y)
            disson=dissonancia(totes_parcials)
            disso=disso+disson
            k+=0.01
            eix_x+=[k]

        px=freq_greu*vector(eix_x)-vector([freq_greu for i in [1..len(eix_x)]])
        py=vector([7-disso[i] for i in [0..len(disso)-1]])


        grafic+=plot(spline(zip(px,py)),(x,1,670),fontsize=15,color=rainbow_color(2*X*Y)
grafic
```

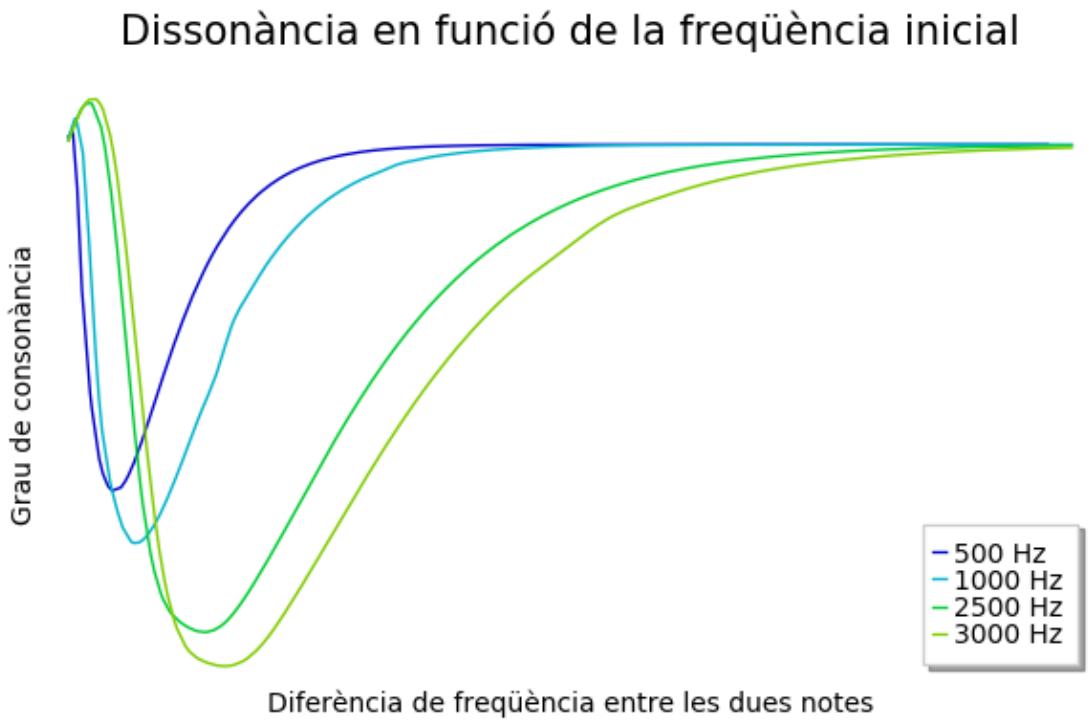
Out[7]:




```
In [8]: #-------------------------------CAS 6: DISSONÀNCIA DEPEPNENT DE LA FREQÜÈNCIA INICIAL---
        #--------------------------------Entrar les freqüències base i el número de parcials:---

        freq_greu=[500,1000,2500,3000];
        numero_parcials=[1]

        #-----------------------------------------------------------------------------------------

        grafic=plot([],(x,0,670))
        for X in numero_parcials:
            for s in [0..len(freq_greu)-1]:
                disso=[0]
                k=1
                eix_x=[1]

                for alpha in [1..100*(dif_freq-1)+1]:
                    totes_parcials=parcials(freq_greu[s],X)+parcials(k*freq_greu[s],X)
                    disson=dissonancia(totes_parcials)
                    disso=disso+disson
                    k+=0.01
                    eix_x+=[k]

                px=freq_greu[s]*vector(eix_x)-vector([freq_greu[s] for i in [1..len(eix_x)]])
                py=vector([7-disso[i] for i in [0..len(disso)-1]])
```

```
        grafic+=plot(spline(zip(px,py)),(x,1,670),fontsize=15,color=rainbow_color(3*X*s)
grafic
```

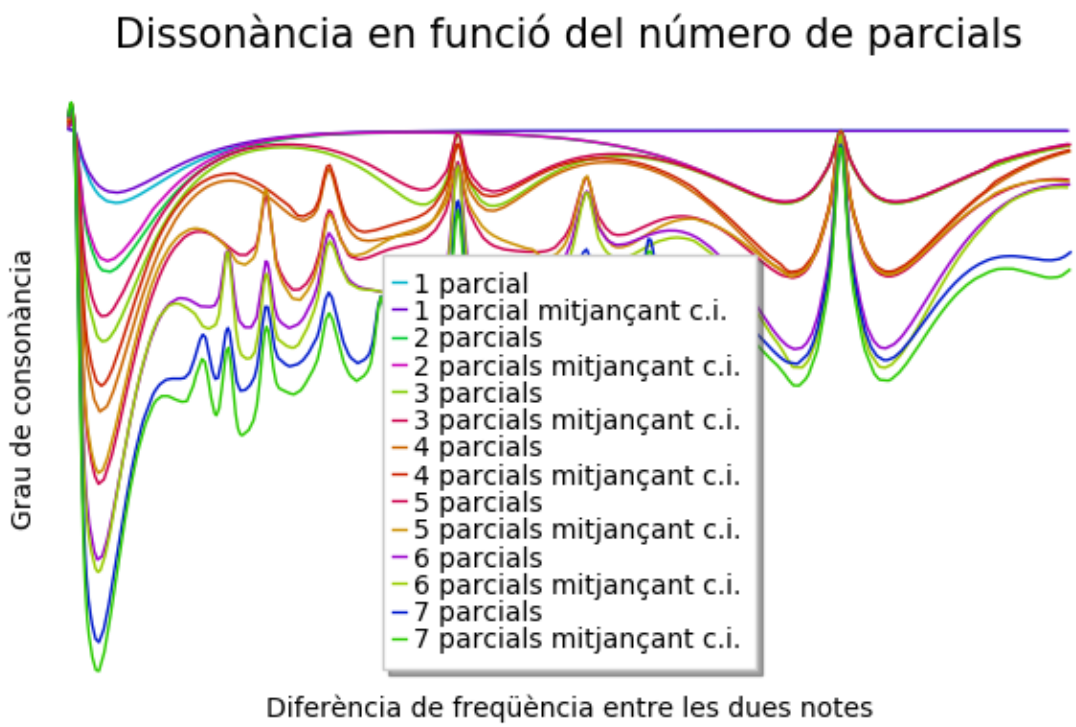
Out[8]:




In [9]:
```
#-----------------CAS 7: COMPARACIÓ DE LA DISSONÀNCIA CALCULADA AMB I SENSE LES CORBES I
#--------------------------------Entrar la freqüència base i el número de parcials:-----

freq_greu=500
numero_parcials=[1..7]

#-----------------------------------------------------------------------------------------

grafic=plot([],(x,0,670))
for X in numero_parcials:
    disso1=[0]
    disso2=[0]
    k=1
    eix_x=[1]

    for alpha in [1..100*(dif_freq-1)+1]:
        totes_parcials=parcials(freq_greu,X)+parcials(k*freq_greu,X)
```

```
            disson1=dissonancia(totes_parcials,sons=False)
            disso1=disso1+disson1
            disson2=dissonancia(totes_parcials)
            disso2=disso2+disson2

            k+=0.01
            eix_x+=[k]

        px=freq_greu*vector(eix_x)-vector([freq_greu for i in [1..len(eix_x)]])
        p1y=vector([7-disso1[i] for i in [0..len(disso1)-1]])
        p2y=vector([7-disso2[i] for i in [0..len(disso2)-1]])


        if X==1:
            grafic+=plot(spline(zip(px,p1y)),(x,1,670),fontsize=15,color=rainbow_color(3*X),

        elif X!=1:
            grafic+=plot(spline(zip(px,p1y)),(x,1,670),fontsize=15,color=rainbow_color(3*X),
    grafic
```

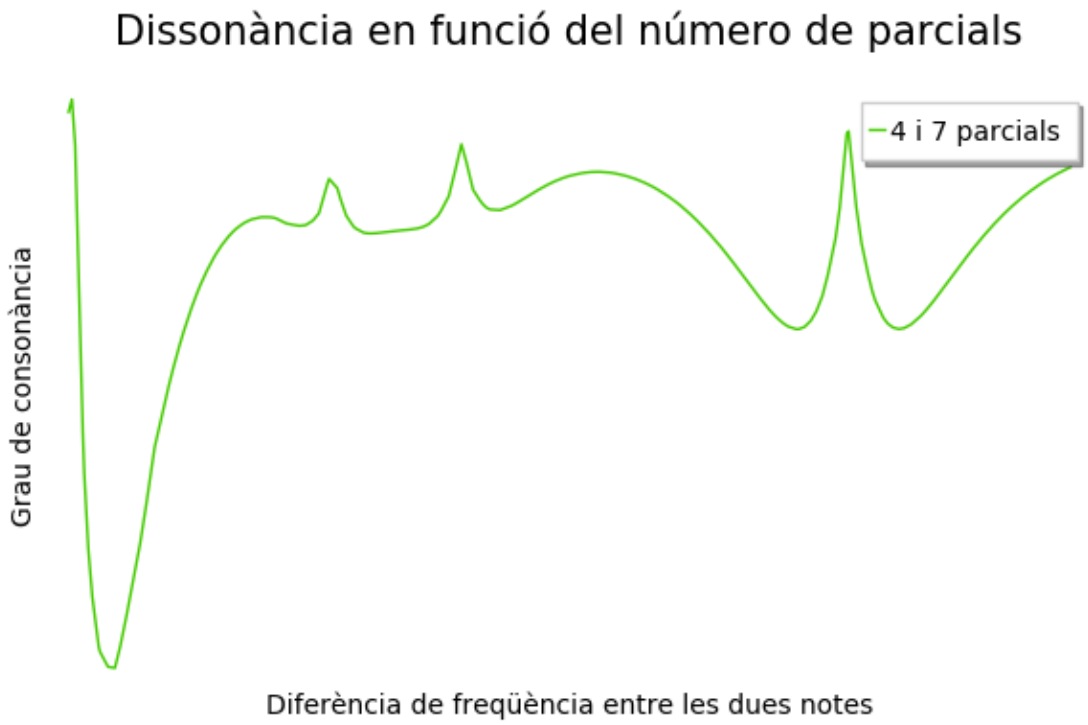
Out[9]:




In [10]:
```
#-----------------------------------CAS 8: DISSONÀNCIA DEPENENT DE LA FORMA D'ONA-------
#---------Entrar la freqüència base, el número de parcials i la forma d'ona per a cada
```

```
freq_greu=500
parcials_greu=[4]
parcials_aguda =[7]


#----LLEGENDA FORMES D'ONA----
#---------0: SINUSOÏDAL-------
#---------1: TRIANGULAR-------
#---------2: QUADRADA---------
#--------3: DE SERRA----------
#----(1r greu, 2on aguda)-----

ones=[2,3]


#-----------------------------------------------------------------------------------------

grafic=plot([],(x,0,670))
for X in parcials_greu:
    for Y in parcials_aguda:
        disso=[0]
        k=1
        eix_x=[]

        for alpha in [1..100*(dif_freq-1)+1]:
            totes_parcials=parcials(freq_greu,X)+parcials(k*freq_greu,Y)
            disson=dissonancia(totes_parcials,formes=ones)
            disso=disso+disson
            k+=0.01
            eix_x+=[k]

        px=freq_greu*vector(eix_x)-vector([freq_greu for i in [1..len(eix_x)]])
        py=vector([7-disso[i] for i in [0..len(disso)-1]])

        grafic+=plot(spline(zip(px,py)),(x,1,670),fontsize=15,color=rainbow_color(2*X*Y
grafic
```

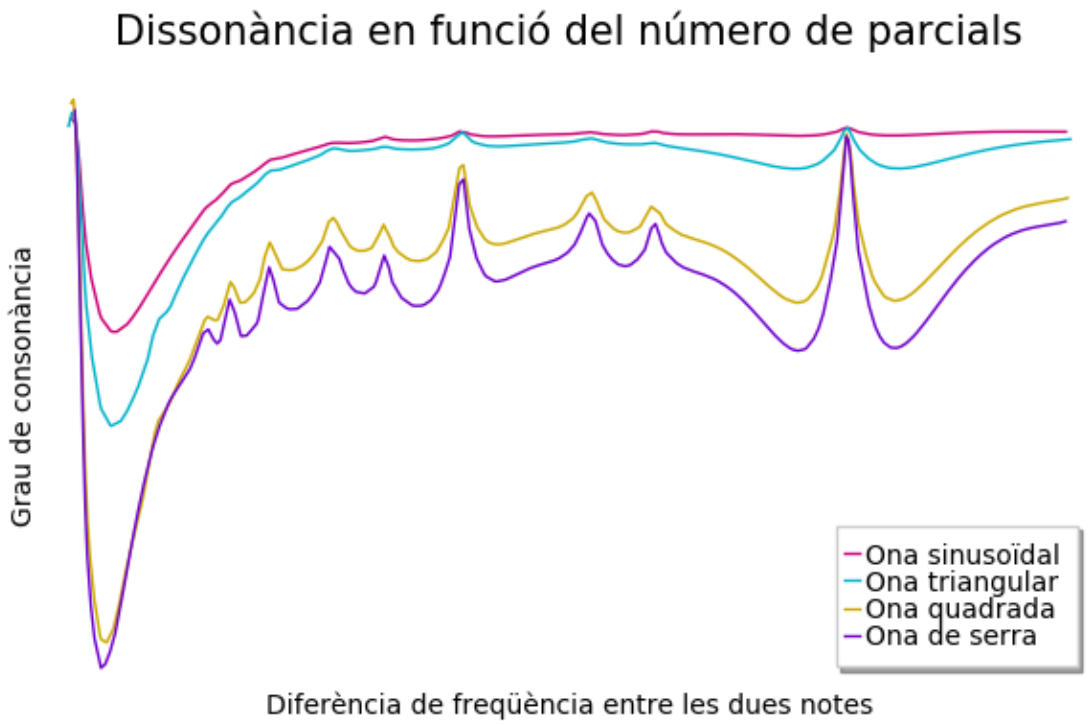
Out[10]:

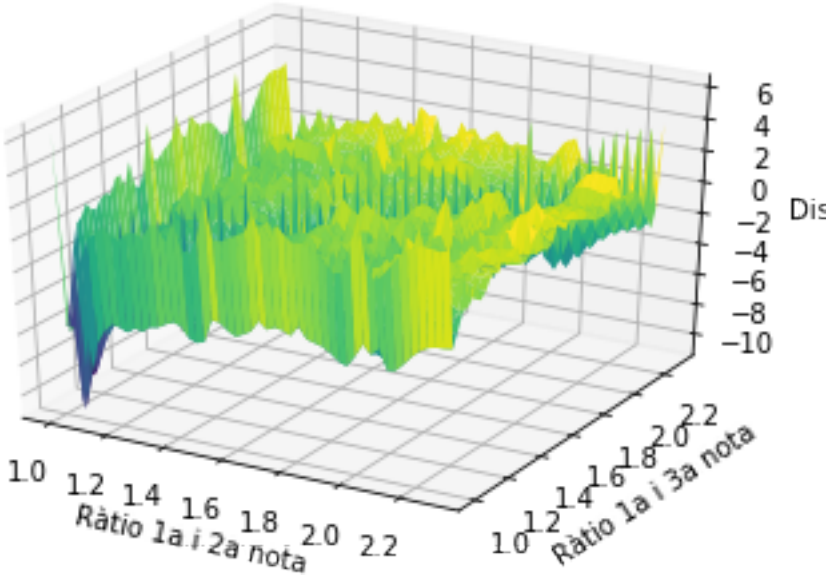



```
In [11]: #-----------------------------------CAS 9: COMPARACIÓ DE LES 4 FORMES D'ONA-----------
         #---------Entrar la freqüència base, el número de parcials i la forma d'ona per a cada

         freq_greu=500
         parcials_greu=[7]
         parcials_aguda =[7]


         #----LLEGENDA FORMES D'ONA----
         #---------0: SINUSOÏDAL-------
         #---------1: TRIANGULAR-------
         #---------2: QUADRADA---------
         #--------3: DE SERRA----------
         #----(1r greu, 2on aguda)-----
         ones0=[0,0]
         ones1=[1,1]
         ones2=[2,2]
         ones3=[3,3]


         #-----------------------------------------------------------------------------------------

         grafic=plot([],(x,0,670))
         for X in parcials_greu:
```

```
    for Y in parcials_aguda:
        disso0=[0]
        disso1=[0]
        disso2=[0]
        disso3=[0]
        k=1
        eix_x=[]

        for alpha in [1..100*(dif_freq-1)+1]:
            totes_parcials=parcials(freq_greu,X)+parcials(k*freq_greu,Y)
            disson0=dissonancia(totes_parcials,formes=ones0)
            disso0=disso0+disson0

            disson1=dissonancia(totes_parcials,formes=ones1)
            disso1=disso1+disson1

            disson2=dissonancia(totes_parcials,formes=ones2)
            disso2=disso2+disson2

            disson3=dissonancia(totes_parcials,formes=ones3)
            disso3=disso3+disson3

            k+=0.01
            eix_x+=[k]

        px=freq_greu*vector(eix_x)-vector([freq_greu for i in [1..len(eix_x)]])
        p0y=vector([7-disso0[i] for i in [0..len(disso0)-1]])
        p1y=vector([7-disso1[i] for i in [0..len(disso1)-1]])
        p2y=vector([7-disso2[i] for i in [0..len(disso2)-1]])
        p3y=vector([7-disso3[i] for i in [0..len(disso3)-1]])


        grafic+=plot(spline(zip(px,p0y)),(x,1,670),fontsize=15,color=rainbow_color(2),

        grafic+=plot(spline(zip(px,p1y)),(x,1,670),fontsize=15,color=rainbow_color(3),

        grafic+=plot(spline(zip(px,p2y)),(x,1,670),fontsize=15,color=rainbow_color(4),

        grafic+=plot(spline(zip(px,p3y)),(x,1,670),fontsize=15,color=rainbow_color(5),

grafic
```

Out[11]:




```
In [12]: #-----------------------------CAS 10: SUPERFÍCIE DE DISSONÀNCIA PER A ACORDS DE 3 NOTES
         #--------------------------------Entrar la freqüència base i el número de parcials:----

         freq_greu=500
         numero_parcials=7

         #-----------------------------------------------------------------------------------------


         notes = np.linspace(1, 2.3, 50)
         X, Y = np.meshgrid(notes, notes)
         Z = []

         for j in notes:
             for i in notes:
                 Z = np.append(Z, diss3d(i,j,numero_parcials))

         Z = np.reshape(Z, (pas,pas))
         fig = plt.figure()
         ax = plt.axes(projection='3d')
         ax.plot_surface(X,Y,Z, rstride = 1, cstride = 1, cmap = 'viridis', edgecolor ='none')
         ax.set_xlabel('Ràtio 1a i 2a nota')
         ax.set_ylabel('Ràtio 1a i 3a nota')
```

```
ax.set_zlabel('Diss')
plt.show()
```