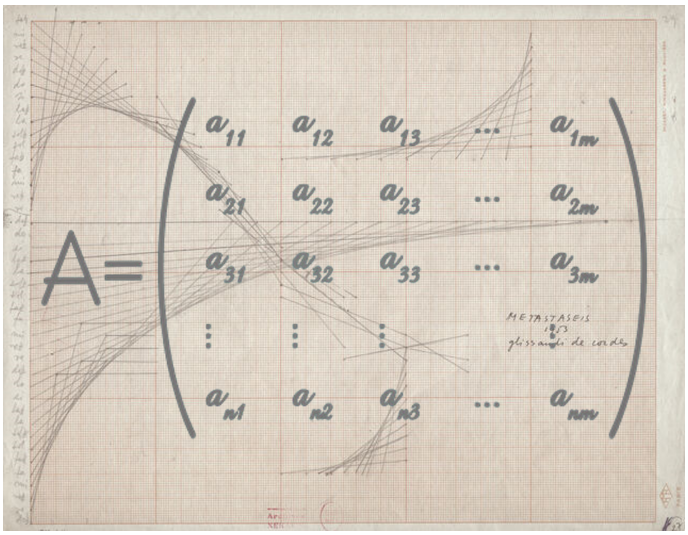
Facultat de Ciències, Grau de Matemàtiques

Música i Matemàtiques. Aplicació de la Teoria de jocs a la composició



Treball de Final de Grau
26 de Juny de l'any 2023

Autor: Miquel Rovira Buendía - 1566706
Tutor: Roberto Rubio Núñez

Resum

En aquest treball de final de grau, s'aborda l'estudi dels jocs de suma zero per a dos jugadors dins del marc de la teoria de jocs. Com a aplicació i segon objectiu principal d'aquest treball, s'analitza en detall l'obra titulada "Duel", creada per Iannis Xenakis, que presenta un joc de suma zero on dues orquestres interpreten les estratègies triades pels seus directors respectius.

Per aconseguir-ho, s'explora primer la teoria de jocs en general, incloent la definició de joc en forma normal. Seguidament, s'aprofundeix en el concepte de joc de suma zero per a dos jugadors i el d'estratègies pures. També s'introdueix què és un punt de sella. A més, s'explora la noció d'equilibri de Nash en un joc amb estratègies pures. Mantenint com a objectiu del treball arribar a analitzar l'obra "Duel", s'incorpora la noció d'estratègia mixta. Així mateix, s'explora l'equilibri de Nash per a estratègies mixtes.

Finalment, es presenta la noció de valor d'un joc i s'exposa el Teorema minimax i, per concloure el treball, s'analitza detalladament l'obra "Duel" de Iannis Xenakis des de la perspectiva de la teoria de jocs, tot identificant els seus elements clau i les implicacions que té en relació amb els conceptes i resultats estudiats al llarg del treball.

Abstract

In this thesis, the study of zero-sum games for two players is addressed within the framework of game theory. As an application and the second main objective of this work, the work entitled "Duel", created by Iannis Xenakis, which presents a zero-sum game where two orchestras interpret the strategies chosen by their respective conductors, is analyzed in detail

To achieve this, we first explore game theory in general, including the definition of a game in normal form. Next, the concept of two-player zero-sum games and pure strategies is explored. It also introduces what a saddle point is. Furthermore, the notion of Nash equilibrium in a game with pure strategies is explored. Keeping the aim of the work to analyze the work "Duel", the notion of mixed strategy is incorporated. Likewise, the Nash equilibrium for mixed strategies is explored.

Finally, the notion of the value of a game is presented and the Minimax Theorem is presented and, to conclude the work, the work "Duel" by Iannis Xenakis is analyzed in detail from the perspective of game theory, all identifying its key elements and the implications it has in relation to the concepts and results studied throughout the work.

1 Introducció

La teoria de jocs és l'àrea de les matemàtiques que estudia la presa de decisions estratègiques en situacions d'interacció entre el que s'anomenen jugadors, un conjunt d'agents racionals. Aquesta teoria és aplicable en diferents àmbits com, per exemple, la política, l'economia o la biologia. A través de models matemàtics, la teoria de jocs proporciona eines per analitzar i inclús predir els resultats de les interaccions estratègiques en diverses situacions, des de conflictes polítics fins a competències empresarials o pugnes entre animals.

En aquest treball s'estudien un tipus concret de jocs, els jocs de dos jugadors de suma zero. Aquests jocs es caracteritzen perquè el guany d'un jugador implica necessàriament una pèrdua equivalent per l'altre jugador. Per posar un exemple senzill, un partida de pòquer de dos jugadors, tots els diners que guanya un dels jugadors després de la partida són els diners que perd l'altre jugador. Els jocs de suma zero són un dels casos més comuns en la teoria de jocs i proporcionen una base sòlida per comprendre els conceptes fonamentals d'aquesta disciplina.

Durant aquest estudi, primer s'introdueixen definicions i nocions bàsiques de la teoria de jocs necessàries per després d'aplicar-les en un cas pràctic. S'estudien els diferents tipus d'estratègies, els pagaments i les diferents solucions possibles en aquests jocs, així com el concepte d'equilibri (tant pur com mixt) de Nash, que és una noció clau en la teoria de jocs.

Un altre àmbit en el qual s'ha fet servir la teoria de jocs és en la creativitat artística, més concretament a la música. En aquest treball parlarem de l'obra "Duel", composta per Iannis Xenakis, considerat un dels compositors més innovadors del segle XX.

L'obra musical de Xenakis és coneguda per l'avantguarda, utilitzant mètodes i tècniques com ara l'aplicació de la teoria de jocs a la composició musical. Xenakis va ser un pioner en l'ús de les matemàtiques i la física en la composició musical. Va desenvolupar mètodes innovadors basats en models matemàtics i en conceptes de probabilitat per crear estructures sonores complexes.

"Duel" és un exemple destacat de l'enfocament únic de Xenakis en la composició. Aquesta obra, composta el 1959, és un experiment que aplica els principis de la teoria de jocs a la composició musical. En aquesta peça, dues orquestres "juguen" un joc de suma zero, on els moviments de cada orquestra afecten directament els resultats i l'execució de l'obra. A través d'aquesta estructura de joc, Xenakis crea una experiència musical interactiva, on els jugadors musicals són partícips actius en la generació i la transformació del so.

La innovadora contribució de Xenakis a la música contemporània ens permet explorar les seves composicions des d'una perspectiva matemàtica.

Índex

1 Introducció **2**

2 Teoria de Jocs **4**
2.1 Primeres definicions 4
2.2 Estratègies pures 7
2.3 Estratègies mixtes 14
2.4 El teorema minimax, de John von Neumann 17

3 "Duel" (1959) **22**
3.1 Introducció històrica 22
3.2 Descripció del joc 22
3.3 Anàlisi de l'obra 23
3.3.1 Exposició del problema 23
3.3.2 Estudi del problema 25

4 Discussió **31**

5 Conclusions **32**

2 Teoria de Jocs

Un joc és una situació en la qual els participants, anomenats jugadors, prenen decisions, amb certes regles establertes, per obtenir una recompensa.

Els jocs poden tenir diferents formes i formats, incloent jocs de taula com el Monopoli o els escacs, jocs esportius com el futbol o el bàsquet, jocs de cartes com el pòquer, i fins i tot jocs virtuals o en línia.

A simple vista es poden diferenciar dos tipus de jocs, els jocs competitius o bé els jocs cooperatius. En qualsevol d'ells, els jugadors han de decidir quina acció efectuar en funció de les accions dels altres jugadors per tal de maximitzar el seu benefici o bé minimitzar les pèrdues.
Per a aquest capítol s'ha consultat els llibres "A Course in Game Theory", de Martin J. Osborne i Ariel Rubinstein [8] i "Game Theory", de Thomas S. Feguson [2]. Aquests han servit per comprendre diversos aspectes de la teoria de jocs.

Alhora, s'han fet servir dos documents del MIT per entendre els jocs de suma zero [6] o com arribar a calcular el valor d'un joc [7].

Per fer més entenedors els conceptes s'han elaborat, de manera independent, exemples per observar diferents situacions que poden pasar en un joc.

2.1 Primeres definicions

Com que cada jugador haurà de decidir quina acció prendre, aquest tindrà una relació de preferència entre les seves possibles accions per tal d'arribar a maximitzar el seu benefici o bé minimitzar les seves pèrdues.

Definició 1. Una **relació de preferència** $\succsim$ és una relació d'ordre total i completa. És a dir, és una relació binària en un conjunt X tal que és:

- *Reflexiva:* $\forall x \in X$, $x \succsim x$
- *Antisimètrica:* $\forall x, y \in X$, si $x \succsim y$ i $y \succsim x$, aleshores $x \approx y$
- *Transitiva:* $\forall x, y, z \in X$, si $x \succsim y$ i $y \succsim z$, aleshores $x \succsim z$.
- *Lineal*: $\forall x, y \in X$ es compleix que $x \succsim y$ o bé que $y \succsim x$.

Definició 2. Una manera de donar una relació de preferència és amb una **funció de pagament** $U : X \to \mathbb{R}$ en el següent sentit:

$$x \succsim y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y) \qquad \forall x, y \in X. \tag{1}$$

Un cop definit què és una relació de preferència es pot definir què és un joc en forma normal.

Definició 3. Un **joc estratègic** (o **joc en forma normal**) consisteix en:

- Un conjunt finit N de jugadors.
- Per tot jugador $i \in N$, un conjunt no buit d'accions A_i.
- Una relació de preferència del jugador i, que denotem per $\succsim_i$, al conjunt total d'$A = \times_{j \in N} A_j$.

Si el conjunt d'accions A_i de cada jugador i és finit, aleshores el joc és **finit**.

En aquest treball considerarem jocs de dos jugadors tot suposant que tenim una funció de pagament donada per a cada jugador. Un joc normal (de dos jugadors) es pot representar en una taula posant com a files les possibles accions del jugador 1 i com a columnes les possibles accions del jugador 2. Aleshores podem representar la funció de pagament com una matriu (de pagaments) $M \in M_{n \times m}$. Cada component de la matriu U, $a_{ij} = (b_{ij}, c_{ij}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ és el pagament que rep el jugador 1 (b_{ij}) i el que rep el jugador 2 (c_{ij}) si el jugador 1 efectua l'acció $i \in \{1 \dots n\}$ i el jugador 2 efectua l'acció $j \in \{1 \dots m\}$.

Exemple 4. Considerem un joc amb la següent taula de pagaments:

		Jugador 2	
		C_1	C_2
Jugador 1	F_1	(3,2)	(1,1)
	F_2	(1,1)	(2,3)

En aquest cas, si el jugador 1 fa l'acció F_1 i el jugador 2 l'acció C_1, el jugador 1 obté un benefici de 3 unitats mentre que el jugador 2 obté un benefici de 2 unitats.

En cas que la matriu de pagaments vingui representada per components $a_{ij} \in \mathbb{R}$, aleshores estem davant d'un joc de suma zero, el qual definirem a continuació. La manera d'entendre la matriu de pagaments és pensant que el jugador 1 rep un pagament de a_{ij} mentre que el jugador 2 de $-a_{ij}$.

Definició 5. Considerem un joc de dos jugadors on cadascun dels quals té un conjunt finit d'accions A_1 i A_2 respectivament. Suposem que un jugador té una funció de pagament denotada per $U_i : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ per $i = 1, 2$. Aleshores el joc és un **joc de dos jugadors amb suma zero** si compleix:

$$U_1(a_1, a_2) = -U_2(a_1, a_2) \qquad \forall a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \tag{2}$$

Per tant, per qualsevol joc de suma zero per a dos jugadors, els guanys d'un jugador són les pèrdues de l'altre. En aquest tipus de jocs, els interessos dels jugadors són completament oposats.

Un cop se sap representar i entendre un joc de suma zero per a dos jugadors, és necessari distingir entre les possibles estratègies que es poden dur a terme

per cada jugador. L'estratègia d'un jugador és un pla d'acció complet, on s'especifica quina acció prendria el jugador davant qualsevol possible escenari que es pugui produir. Intuïtivament es pot pensar que un jugador tria accions a mesura que va avançant el joc (cada cop que li toca efectuar una acció), una estratègia ho resol tot abans de començar a jugar.

Exemple 6. Pedra, paper, tisores: Siguin Jugador1 i Jugador2 els jugadors que juguen al joc, aleshores:

- $N = \{\text{Jugador1, Jugador2}\}$.
- $A_i = \{\text{Pedra, Paper, Tisores}\}\ \forall i \in N$.
- Sigui $U_1 : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ la funció de pagament del jugador 1, aleshores

$$\begin{aligned} &U_1(\text{Pedra}, \text{Tisores}) = U_1(\text{Paper}, \text{Pedra}) = U_1(\text{Tisores}, \text{Paper}) \\ &> U_1(\text{Pedra}, \text{Pedra}) = U_1(\text{Paper}, \text{Paper}) = U_1(\text{Tisores}, \text{Tisores}) \\ &> U_1(\text{Pedra}, \text{Paper}) = U_1(\text{Paper}, \text{Tisores}) = U_1(\text{Tisores}, \text{Pedra}). \end{aligned}$$

- Sigui $U_2 : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ la funció de pagament del jugador 2, aleshores

$$\begin{aligned} &U_2(\text{Pedra}, \text{Paper}) = U_2(\text{Paper}, \text{Tisores}) = U_2(\text{Tisores}, \text{Pedra}) \\ &> U_2(\text{Pedra}, \text{Pedra}) = U_2(\text{Paper}, \text{Paper}) = U_2(\text{Tisores}, \text{Tisores}) \\ &> U_2(\text{Pedra}, \text{Tisores}) = U_2(\text{Paper}, \text{Pedra}) = U_2(\text{Tisores}, \text{Paper}) \end{aligned}$$

Podem representar, per tant, la matriu de pagaments del jugador 1 en la següent taula:

Jugador 1 \ Jugador 2			
	0	-1	1
	1	0	-1
	-1	1	0

Figura 1: Taula de pagaments del jugador 1.

Tal i com hem dit anteriorment, la matriu de pagaments del jugador 2 és la mateixa però canviant el signe de les components de la matriu de pagaments del jugador 1.

En aquest treball considerarem jocs de suma zero. Per tant, suposarem que A_i és el conjunt d'accions del jugador $i = 1, 2$ i que $U_i : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ és la funció de pagament del jugador $i = 1, 2$. També suposarem que tenim una taula de pagaments del jugador 1 (recordem que la taula de pagaments del jugador 2 és la mateixa però canviant el signe de cada component), la qual vindrà donada per una matriu de pagaments on cada component a_{ij} és un real.

2.2 Estratègies pures

Ara que sabem el tipus de jocs que estudiarem en aquest treball, hom pot preguntar-se quins tipus d'estratègia hi ha i quina és la millor a seguir en cada joc.

Definició 7. Considerem un joc en forma normal de suma zero amb n files i m columnes, diem que un jugador segueix una **estratègia pura** si sempre tria la mateixa acció.

Definició 8. Com que el jugador 1 desitja maximitzar el seu benefici, podria escollir la seva estratègia per tal de maximitzar el seu mínim benefici independentment de l'estratègia del jugador 2. Al fer això, el jugador 1 adoptaria una **estratègia maximin pura**. Al seguir-la, el jugador 1 rebrà el pagament: $\max_{a_1 \in A_1} \min_{a_2 \in A_2} U(a_1, a_2)$.

Recíprocament, com que el jugador 2 vol maximitzar el seu benefici (és a dir, minimitzar el benefici del jugador 1), podria escollir la seva estratègia per tal de minimitzar el màxim benefici del jugador. Al fer-ho, estaria adoptant una **estratègia minimax pura**.Al seguir-la, el jugador 1 rebrà el pagament: $\min_{a_2 \in A_2} \max_{a_1 \in A_1} U(a_1, a_2)$.

Si els dos jugadors segueixen les estratègies maximin i minimax pures, tenim una fita inferior i una superior pel benefici del jugador 1. Sigui B aquest benefici (el benefici del jugador 2 serà $-B$, aleshores:

$$\max_{a_1 \in A_1} \min_{a_2 \in A_2} U(a_1, a_2) \leq B \leq \min_{a_2 \in A_2} \max_{a_1 \in A_1} U(a_1, a_2)$$

D'on:

$$\max_{a_1 \in A_1} \min_{a_2 \in A_2} U(a_1, a_2) \leq \min_{a_2 \in A_2} \max_{a_1 \in A_1} U(a_1, a_2) \tag{3}$$

Il·lustrem aquests dos conceptes amb uns quants exemples on es mostri que el resultat del joc es mou entre les fites:

Exemple 9. Considerem un joc de suma zero per a dos jugadors amb la següent taula de pagaments pel jugador 1:

		Jugador 2		
		C_1	C_2	C_3
Jugador 1	F_1	-4	1	3
	F_2	5	-1	0
	F_3	1	0	-2

- Estratègia maximin pura: Hem de calcular el màxim dels mínims de cada fila. És a dir: $\max\{\min\{-4,1,3\},\min\{5,-1,0\},\min\{1,0,-2\}\} = \max\{-4,-1,-2\} = -1$. Així, si el jugador 1 escull sempre l'acció F_2, tindrà un mínim benefici de -1.
- Estratègia minimax pura: Hem de calcular el mínim dels màxims de cada columna. És a dir: $\min\{\max\{-4,5,1\},\max\{1,-1,0\},\max\{3,0,-2\}\} = \min\{5,1,3\} = 1$. Per tant, si el jugador 2 escull sempre l'acció C_2 s'assegura que el benefici del jugador 1 sigui, com a molt, 1.

Recapitulem: sigui B el benefici del jugador 1, si el jugador 1 escull F_2, aleshores $-1 \leq B$. D'altra banda, si el jugador 2 escull C_2, aleshores $B \leq 1$. Ara bé, si ambdós jugadors trien F_2 i C_2, $B = -1 = \max_{i\in\{1,2,3\}} \min_{j\in\{1,2,3\}} U(a_{ij})$.

Vegem un exemple molt semblant però amb un resultat diferent:

Exemple 10. Considerem un joc de suma zero per a dos jugadors amb la següent taula de pagaments pel jugador 1:

		Jugador 2		
		C_1	C_2	C_3
Jugador 1	F_1	0	1	3
	F_2	5	-1	-1
	F_3	1	-1	-2

- Estratègia maximin pura: 0. Així, si el jugador 1 escull l'acció F_1, tindrà un mínim benefici de 0.
- Estratègia minimax pura: 1. Per tant, si el jugador 2 escull l'acció C_2 s'assegura que el benefici del jugador 1 sigui, com a molt, 1.

Així: sigui B el benefici del jugador 1, si el jugador 1 usa una estratègia de triar F_1, aleshores $0 \leq B$. D'altra banda, si el jugador 2 segueix l'estratègia de triar C_2, aleshores $B \leq 1$. Per últim, si tots dos jugadors escullen F_1 i C_2, aleshores $B = 1 = \min_{j\in\{1,2,3\}} \max_{i\in\{1,2,3\}} U(a_{ij})$

Vegem un últim exemple on el resultat no sigui una de les fites:

Exemple 11. Considerem un joc de suma zero per a dos jugadors amb la següent taula de pagaments pel jugador 1:

		Jugador 2		
		C_1	C_2	C_3
Jugador 1	F_1	-4	1	3
	F_2	5	-2	0
	F_3	1	0	-1

- Estratègia maximin pura: -1. Així, si el jugador 1 escull l'acció F_3, tindrà un mínim benefici de 0.
- Estratègia minimax pura: 1. Per tant, si el jugador 2 escull l'acció C_2 s'assegura que el benefici del jugador 1 sigui, com a molt, 1.

Per tant: sigui B el benefici del jugador 1, si el jugador 1 usa una estratègia de triar F_3, aleshores $-1 \leq B$. D'altra banda, si el jugador 2 segueix l'estratègia de triar C_2, aleshores $B \leq 1$. Per últim, si tots dos jugadors escullen F_3 i C_2, aleshores $B = 0 \in (-1, 1)$

També podria ser que l'estratègia maximin o l'estratègia minimax pures no siguin úniques:

Exemple 12. Considerem un joc de suma zero per a dos jugadors amb la següent taula de pagaments pel jugador 1:

		Jugador 2		
		C_1	C_2	C_3
Jugador 1	F_1	-4	1	3
	F_2	5	-1	0
	F_3	1	0	-2

- Estratègia maximin pura: Hem de calcular el màxim dels mínims de cada fila. És a dir: $\max\{\min\{-4, 1, 3\}, \min\{5, -1, 0\}, \min\{1, 0, -2\}\} = \max\{-4, -1, -2\} = -1$. Així, si el jugador 1 escull l'acció F_2, tindrà un mínim benefici de -1.
- Estratègia minimax pura: Hem de calcular el mínim dels màxims de cada columna. És a dir: $\min\{\max\{-4, 5, 1\}, \max\{1, -1, 0\}, \max\{3, 0, -2\}\} = \min\{5, 1, 3\} = 1$. Per tant, si el jugador 2 escull l'acció C_2 s'assegura que el benefici del jugador 1 sigui, com a molt, 1.

Recapitulem: sigui B el benefici del jugador 1, si el jugador 1 usa una estratègia d'escollir F_2, aleshores $-1 \leq B$. D'altra banda, si el jugador 2 segueix l'estratègia d'escollir C_2, aleshores $B \leq 1$.

Per tant, les fites inferiors i superiors del benefici del jugador 1 són: $-1 \leq B \leq 1$ però, en cas que els jugadors segueixin les estratègies maximin i minimax pures, respectivament,

Ens podem trobar en la situació en la qual la fita inferior i la superior siguin iguals, és a dir:

$$\max_{a_1 \in A_1} \min_{a_2 \in A_2} U(a_1, a_2) = \min_{a_2 \in A_2} \max_{a_1 \in A_1} U(a_1, a_2) \tag{4}$$

En cas de complir-se aquesta casuística, podrem definir nous termes de la teoria de jocs:

Definició 13. Considerem un joc de suma zero per a dos jugadors. Sigui A_i el conjunt d'accions disponibles, $U : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ la funció de pagaments del jugador 1 (la del jugador 2 serà $U_2(a_1, a_2) = -U(a_1, a_2)$ i suposem que es compleix l'equació (4). En aquest cas, existeixen $a_1^* \in A_1$, $a_2^* \in A_2$ tals que:

$$U(a_1^*, a_2^*) = max_{a_1 \in A_1} min_{a_2 \in A_2} U(a_1, a_2) = min_{a_2 \in A_2} max_{a_1 \in A_1} U(a_1, a_2)$$

Un perfil (a_1^*, a_2^*) s'anomena **punt de sella** del joc si, a més a més, compleix:

$$U(a_1^*, a_2^*) = \max_{a_1 \in A_1} U(a_1, a_2^*),$$
$$U(a_1^*, a_2^*) = \min_{a_2 \in A_2} U(a_1^*, a_2).$$

És a dir, si el pagament és mínim per la seva fila i màxim per la seva columna. Un joc amb, com a mínim, un punt de sella, s'anomena **joc estrictament determinat**, i l'elecció de cada jugador de la seva fila o columna corresponent es denomina **estratègia pura òptima**.

Pot ser que un joc no tingui cap punt de sella, tal i com hem vist a l'Exemple 9.

Proposició 14. *Considerem un joc de suma zero per a dos jugadors amb matriu de pagaments M i funció de pagaments $U : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ del jugador 1 (la del jugador 2 serà $U_2(a_1, a_2) = -U(a_1, a_2)$). Si es compleix que*

$$max_{a_1 \in A_1} min_{a_2 \in A_2} U(a_1, a_2) = min_{a_2 \in A_2} max_{a_1 \in A_1} U(a_1, a_2)$$

aleshores podem assegurar l'existència de, com a mínim, un punt de sella.

Demostració. Suposem que :

$$max_{a_1 \in A_1} min_{a_2 \in A_2} U(a_1, a_2) = min_{a_2 \in A_2} max_{a_1 \in A_1} U(a_1, a_2) = n.$$

Aleshores, el més petit dels màxims de les columnes és n. Suposem que aquest (podria haver més d'un) està a la columna j. És a dir, $\max_{a_1 \in A_1} U(a_1, j) = n$ i, per tant, $U(a_1, j) \leq n$, $\forall a_1 \in A_1$.

Alhora, el més gran dels mínims de les files també és n. Suposem que aquest (podria haver més d'un) està a la fila i. És a dir, $\min_{a_2 \in A_2} U(i, a_2) = n$ i, per tant, $U(i, a_2) \geq n, \forall a_2 \in A_2$.

Llavors $n \leq U(i, j) \leq n$, pel que $U(i, j) = n$.

Així, el perfil (i, j) compleix:

1. $U(i, j) = n = max_{a_1 \in A_1} min_{a_2 \in A_2} U(a_1, a_2) = min_{a_2 \in A_2} max_{a_1 \in A_1} U(a_1, a_2)$.
2. $U(i, j) = n = \max_{a_1 \in A_1} U(a_1, j)$.
3. $U(i, j) = n = \min_{a_2 \in A_2} U(i, a_2)$.

Per tant, (i, j) és un punt de sella. □

Definició 15. Considerem un joc de suma zero per a dos jugadors, sigui A_i el conjunt d'accions del jugador $i = 1, 2$ i sigui U la funció de pagaments del jugador 1. Un **equilibri de Nash en un joc amb estratègies pures** és una component de la matriu de pagaments $a^* = (a_1^*, a_2^*)$, on $a_i^* \in A_i$, $\forall i = 1, 2$ tal que:

$$\begin{aligned} U(a_1^*, a_2^*) &\geq U(a_1, a_2^*) \quad \forall a_1 \in A_1. \\ U(a_1^*, a_2^*) &\leq U(a_1^*, a_2) \quad \forall a_2 \in A_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Això és el mateix que dir que si tenim un joc en forma normal amb funció de pagaments $U : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$, aleshores el perfil (a_1^*, a_2^*) compleix:

$$U(a_1^*, a_2^*) = \min_{a_2 \in A_2} U(a_1^*, a_2)$$
$$U(a_1^*, a_2^*) = \max_{a_1 \in A_1} U(a_1, a_2^*)$$

És a dir, un equilibri de Nash amb estratègies pures és un perfil a^* en el qual cap jugador pot arribar a treure un benefici major si canvia la seva acció (mantenint constant l'acció de l'altre jugador).

En cas que l'equació (5) sigui una desigualtat estricta, s'anomena **equilibri de Nash estricte** per a $a_i \neq a_i^*$ em (5). En cas contrari, s'anomena **equilibri de Nash feble**.

$\multimap$ *Comentari:* La condició per ser equilibri pur de Nash és la mateixa que la segona condició per ser un punt de sella.

Proposició 16. *Als jocs de suma zero per a dos jugadors, un perfil (a_1^*, a_2^*) és un punt de sella $\Leftrightarrow$ és un equilibri pur de Nash.*

Demostració. ($\Rightarrow$) Trivial.
($\Leftarrow$) Sigui (a_1^*, a_2^*) un equilibri pur de Nash, hem de veure si compleix:

$$U(a_1^*, a_2^*) = max_{a_1 \in A_1} min_{a_2 \in A_2} U(a_1, a_2) = min_{a_2 \in A_2} max_{a_1 \in A_1} U(a_1, a_2)$$

Suposem que $U(a_1^*, a_2^*) = n$. Com que (a_1^*, a_2^*) és un equilibri pur de Nash, aleshores la matriu de pagaments del joc es pot escriure de la forma:

		Jugador 2					
		C_1	C_2	$\cdots$	a_2^*	$\cdots$	C_n
Jugador 1	F_1				$\leq n$		
	F_2				$\leq n$		
	$\vdots$				$\leq n$		
	a_1^*	$\geq n$	$\geq n$	$\geq n$	n	$\geq n$	$\geq n$
	$\vdots$				$\leq n$		
	F_n				$\leq n$		

Ara, el mínim de cada fila és un real $l \leq n$ a totes les files menys a a_1^*, que és n. Així, $\max_{a_1 \in A_1} \min_{a_2 \in A_2} U(a_1, a_2) = \max_{a_1 \in A_1} \{l, n\} = n$.

D'altra banda, el màxim de cada columna és un real $m \geq n$ a totes les columnes menys a a_2^*, que és n. Així, $\min_{a_2 \in A_2} \max_{a_1 \in A_1} U(a_1, a_2) = \min_{a_2 \in A_2} \{m, n\} = n$.

Per tant,

$$U(a_1^*, a_2^*) = max_{a_1 \in A_1} min_{a_2 \in A_2} U(a_1, a_2) = min_{a_2 \in A_2} max_{a_1 \in A_1} U(a_1, a_2) = n,$$

pel que l'equilibri de Nash és un punt de sella. □

$\multimap$ *Comentari:* En jocs de suma no zero, un punt de sella és un equilibri de Nash però el recíproc és fals.

Exemple 17. Busquem els punts de sella d'un joc amb la següent matriu de pagaments:

		Jugador 2		
		C_1	C_2	C_3
Jugador 1	F_1	1	-3	-1
	F_2	4	2	1
	F_2	-2	-1	-5

Per definició, un punt de sella és un perfil (a_1^*, a_2^*) on $a^* \in A$, $b^* \in B$ tal que:

$$U(a_1^*, a_2^*) = max_{a_1^* \in A_1} min_{a_2^* \in A_2} U(a_1^*, a_2^*) = min_{a_2^* \in A_2} max_{a_1^* \in A_1} U(a_1^*, a_2^*)$$

A més a més, aquest perfil ha de ser el mínim pagament de la seva fila i el màxim pagament de la seva columna. Calculem primer $max_{a_1 \in A_1} min_{a_2 \in a_2} U(a_1, a_2)$:

$$\begin{aligned} \max_{a_1 \in A_1} \min_{a_2 \in A_2} U(a_1, a_2) &= \max\{\min\{1, -3, -1\}, \min\{4, 2, 1\}, \min\{-2, -1, -5\}\} \\ &= \max\{-3, 1, -5\} = 1 \end{aligned}$$

Ara calculem $min_{a_2 \in A_2} max_{a_1 \in A_1} U(a_1, a_2)$:

$$\begin{aligned}\min_{a_2 \in A_2} \max_{a_1 \in A_1} U(a_1, a_2) &= \min\{\max\{1, 4, -2\}, \max\{-3, 2, -1\}, \max\{-1, 1, -5\}\} \\ &= \min\{4, 2, 1\} = 1\end{aligned}$$

Així, els punts (F_1, C_1) i (F_2, C_3) són candidats a ser punt de sella, però

$$U(F_1, C_1) = 1 \leq 4 = U(F_2, C_1),$$

pel que no és un màxim a la seva columna així que no és un punt de sella mentre que (F_2, C_3) sí que ho és.

Ara bé, pot ser que tinguem més d'un punt de sella. Vegem-ne un exemple:

Exemple 18. Busquem els punts de sella d'un joc amb la següent matriu de pagaments:

		Jugador 2		
		C_1	C_2	C_3
Jugador 1	F_1	3	1	2
	F_2	4	1	2
	F_2	-2	-1	-5

Fent el mateix que a l'exemple anterior:

$$U(a_1^*, a_2^*) = max_{a_1^* \in A_1} min_{a_2^* \in A_2} U(a_1^*, a_2^*) = min_{a_2^* \in A_2} max_{a_1^* \in A_1} U(a_1^*, a_2^*)$$

Així:

$$\begin{aligned}\max_{a_1^* \in A_1} \min_{a_2^* \in A_2} U(a_1^*, a_2^*) &= \max\{\min\{3, 1, 2\}, \min\{4, 1, 2\}, \min\{-2, -1, -5\}\} = \\ &= \max\{1, 1, -5\} = 1\end{aligned}$$

D'altra banda:

$$\begin{aligned}\min_{a_2^* \in A_2} \max_{a_1^* \in A_1} U(a_1^*, a_2^*) &= \min\{\max\{3, 4, -2\}, \max\{1, 1, -1\}, \max\{2, 2, -5\}\} \\ &= \min\{4, 1, 2\} = 1\end{aligned}$$

Així podem concloure que el punt (A_2, B_2) és un punt de sella però el punt (A_1, B_2) també. Per tant, els dos són equilibris purs de Nash, ja que:

- $U(A_2, B_2) = \min_{b \in \{B_1, B_2, B_3\}} U(A_2, b)$ i, per tant, l'acció B_2 és la millor resposta del jugador B a que el jugador A faci l'acció A_2 (i el mateix per A_1).
- $U(A_1, B_2) = U(A_2, B_2) = \max_{a \in \{A1, A2, A3\}} U(a, B_3)$ i, per tant, les accions A_1 i A_2 són la millor resposta del jugador A quan el jugador B efectua l'acció B_2.

2.3 Estratègies mixtes

També pot passar que la millor estratègia per a un jugador sigui anar canviant d'acció segons algun criteri (com, per exemple, seguint una distribució de probabilitat).

Definició 19. Considerem un joc de 2 jugadors, pel jugador $i = 1, 2$, una **estratègia mixta** σ_i sobre el conjunt d'accions A_i, és una distribució de probabilitat sobre A_i. Ho denotem per $\sigma_i \in \Sigma_i$ on Σ_i és el conjunt de distribucions de probabilitat sobre A_i i $\sigma_i(a_i)$ és la probabilitat que a l'estratègia σ_i s'assigni a l'acció $a_i \in A_i$.

Definició 20. Una **estratègia mixta conjunta** és un vector $\sigma \in \Sigma = \prod_{i=1}^{2} \Sigma_i$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, on $\sigma_i \in \Sigma_i^2$. Addicionalment, suposem que els jugadors escullen les estratègies mixtes de forma estadísticament independent.

Proposició 21. *El conjunt d'estratègies pures és un subconjunt del conjunt d'estratègies mixtes.*

Demostració. Sigui $n = |A|$, on A és el conjunt d'accions disponibles del jugador $i = 1, 2$. Com que, per definició, una estratègia pura és prendre només una acció, podem pensar que $\mathbb{P}(A_i) = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$ per algun $j \in \{1, \ldots, n\}$ i, $\mathbb{P}(A_j) = 1$. Per definició, això és una estratègia mixta. $\square$

Definició 22. Considerem un joc de suma zero per a dos jugadors, l'**estratègia mixta òptima** és la millor estratègia que pot seguir un jugador. Suposem que els jugadors són 1 i 2 i que el jugador 1 pot efectuar n accions mentre que el jugador 2 té m accions disponibles (és a dir, tenim una matriu de pagaments de dimensions $n \times m$). Per cada fila $i \in 1, \ldots, n$, denotem per x_i a la probabilitat del jugador 1 d'escollir la fila i. Aleshores per cada columna $j \in 1, \ldots, m$, el pagament esperat del jugador 1 per la columna j és $P_j = \sum_{i=1}^{n} U(i,j) \cdot x_i$.
Aleshores, el pagament esperat pel jugador 1 és, com a mínim, $\min_{j \in 1,\ldots,m}\{P_j\}$ i tenim una fita inferior.
Així, l'estratègia mixta òptima és aquella que assigna les probabilitats $x_1, ..., x_n$ per tal de maximitzar el $\min_{j \in 1,\ldots,m}\{P_j\}$. Per tant, tenim el següent problema d'optimització:

$$\max \min_{j \in 1,\ldots,m}\{P_j\},$$

$$\begin{aligned}
&P_j = \sum_{i=1}^{n} U(i,j) \cdot x_i, \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}, \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\
&x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.
\end{aligned}$$

Ara, definint z com $z = \min_{j \in 1,\ldots,m}\{P_j\}$, obtenim el següent problema de programació lineal:

$$\max z,$$

$$z \leq \sum_{i=1}^{n} U(i,j) \cdot x_i, \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$
$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

El qual es pot resoldre mitjançant el mètode *símplex*.

Anàlogament, per cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, denotem per y_j a la probabilitat del jugador 2 d'escollir la columna j. Aleshores per cada fila $i \in 1, \ldots, n$, el pagament esperat del jugador X per la fila i és $P_i = \sum_{j=1}^{m} U(i,j) \cdot y_i$.
Aleshores, el pagament esperat pel jugador A és, com a molt, $\max_{i \in 1,\ldots,n}\{P_i\}$ i tenim una fita superior.
Ara, sigui $w = \max_{i \in 1,\ldots,n}\{P_i\}$, tenim el següent problema de programació lineal:

$$\min w,$$

$$w \geq \sum_{j=1}^{m} U(i,j) \cdot y_i, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$
$$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1,$$
$$y_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Definició 23. Una estratègia mixta conjunta $\sigma^* \in \Sigma$ és un **equilibri de Nash** si, per tot jugador $i = 1, 2$ i per tota estratègia $\sigma_i \in \Sigma_i$, tenim:

$$\begin{aligned} U(\sigma_1^*, \sigma_2^*) &\geq U(a_1, \sigma_2^*) \quad \forall a_1 \in A_1 \\ U(\sigma_1^*, \sigma_2^*) &\leq U(\sigma_1^*, a_2) \quad \forall a_2 \in A_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Per tant, cap jugador pot millorar el pagament que espera rebre canviant la seva estratègia unilateralment, donada l'estratègia mixta dels altres jugadors.

Exemple 24. Considerem un joc amb la següent taula de pagaments, calculem les probabilitats de cada acció per tenir una estratègia mixta òptima per cada jugador.

Definim x_1, x_2, x_3 com les probabilitats del jugador 1 de fer l'acció F_1, F_2, F_3 respectivament. Ara, si el jugador 2 escull:

- C_1, aleshores el pagament esperat del jugador 1 és

$$P_1 := -2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = -2x_1 + 2x_2 + x_3.$$

		Jugador 2		
		C_1	C_2	C_3
Jugador 1	F_1	-2	1	2
	F_2	2	-1	0
	F_3	1	0	-2

- C_2, aleshores el pagament esperat del jugador 1 és

$$P_2 := 1 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = x_1 - x_2.$$

- C_3, aleshores el pagament esperat del jugador 1 és

$$P_3 := 2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + (-2) \cdot x_3 = 2x_1 - 2x_3.$$

Per tant, el pagament esperat del jugador 1 és, com a mínim, $\min\{P_1, P_2, P_3\}$. Resolent el problema de programació lineal:

$$\begin{aligned} &\text{max z} \\ &z \leq -2x_1 + 2x_2 + x_3, \\ &z \leq x_1 - x_2, \\ &z \leq 2x_1 - 2x_3, \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Arribem a la solució òptima amb el mètode del símplex, resolt mitjançant ordinador:

$$x_1 = \frac{7}{18}, \quad x_2 = \frac{5}{18}, \quad x_3 = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{1}{9},$$

De la mateixa manera, denotem per y_1, y_2, y_3 a les probabilitats del jugador 2 de fer l'acció C_1, C_2, C_3 respectivament. Ara, si el jugador 1 escull:

- F_1, aleshores el pagament esperat del jugador 1 és

$$P_1 := -2 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 = -2y_1 + y_2 + 2y_3.$$

- F_2, aleshores el pagament esperat del jugador 1 és

$$P_2 := 2 \cdot y_1 + (-1) \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 = 2y_1 - y_2.$$

- F_3, aleshores el pagament esperat del jugador 1 és

$$P_3 := 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 = y_1 + 2y_3.$$

Per tant, el pagament esperat del jugador 1 és, com a molt, $\max\{P_1, P_2, P_3\}$. Resolent el problema de programació lineal següent:

$$\min \text{ w}$$

$$\begin{aligned} w &\geq -2y_1 + y_2 + 2y_3, \\ w &\geq 2y_1 - y_2, \\ w &\geq y_1 - 2y_3, \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1, \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Arribem a la solució òptima:

$$y_1 = \frac{1}{3}, \quad y_2 = \frac{5}{9}, \quad y_3 = \frac{1}{9}, \quad w = \frac{1}{9},$$

Així, amb estratègies mixtes pures, el jugador 1 s'espera que guanyi: $z \leq \mathbb{E}(\text{guanys jugador 1}) \leq w$ i, com que $z = w = \frac{1}{9}$, s'espera que el jugador 1 tingui uns guanys de $\frac{1}{9}$ cada jugada, el que es defineix com a valor del joc (ho veurem a continuació).

2.4 El teorema minimax, de John von Neumann

Definició 25. El **valor d'un joc** és el resultat esperat per cada jugada quan els jugadors segueixen la seva estratègia òptima. És a dir, si tots els jugadors segueixen la seva estratègia òptima, llavors el pagament d'aquella jugada és el valor del joc.

Ara bé, és casualitat que a l'Exemple 24 tinguem $z = w$? No, perquè als jocs per a dos jugadors de suma zero sempre es compleix. Aquesta afirmació representa un teorema molt important dins la teoria de jocs, el qual estableix que tot joc finit, de suma zero i de dos jugadors té estratègies mixtes òptimes. Va ser demostrat per John von Neumann el 1928, nosaltres seguirem [3] per la demostració.

Teorema 26. ***minimax (John von Neumann)***
Siguin X i Y estratègies mixtes pels jugadors 1 i 2 respectivament. Sigui M la matriu de pagaments. Aleshores:

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} xMy^T = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} xAy^T = v, \tag{7}$$

on v s'anomena valor del joc i x i y pels quals es realitza la igualtat, s'anomenen solucions. També resulta que si hi ha més d'una estratègia mixta òptima, n'hi ha infinites.

Notació 27. Usarem la següent notació de cara a demostrar el Teorema 26:

$$\begin{aligned} v_1 &= \max_{x \in X} \min_{y \in Y} xMy^T = \max_{x \in X} \min_{1 \leq j \leq m} xM^j \\ v_2 &= \min_{y \in Y} \max_{x \in X} xMy^T = \min_{y \in Y} \max_{1 \leq i \leq n} M_i y^T \end{aligned}$$

Demostració. Suposem que el joc té una matriu de pagaments, de dimensió $n \times m$, $M = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Per utilitzar tècniques de programació lineal, necessitem suposar que v_1, v_2 són positius. Això és trivial si totes les components de la matriu M, a_{ij}, són positives. Per tant, separarem la demostració en dos casos. Al primer d'ells, suposarem que $a_{ij} > 0$. El segon cas és més general podem usar resultats del primer cas.

Cas 1. $a_{ij} > 0$: Sabem que $v_1 = \max_{x \in X} \min_{1 \leq j \leq m} xM^j$. Per arribar a determinar v_1 per qualsevol estratègia $x \in X$, hem de determinar el mínim de xA^j. És a dir, hem de trobar el mínim de les m quantitats:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n, \\
&a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n, \\
&\vdots \\
&a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n.
\end{aligned}$$

Sigui w aquest mínim, aleshores:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n \geq z \\
&a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n \geq z \\
&\vdots \\
&a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n \geq z
\end{aligned}$$

Considerem ara v_1, el qual és el màxim valor de les w dins de $x \in X$. Com que $X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1,\ x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq n\}$, tenim que v_1 és el màxim w que satisfà:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n \geq z, \\
&a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n \geq z, \\
&\vdots \\
&a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n \geq z, \\
&x_1 + \ldots + x_n = 1, \\
&x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq n.
\end{aligned} \tag{8}$$

Així, l'estratègia $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en què s'aconsegueix aquest màxim és la millor estratègia possible pel jugador 1.

Com que $a_{ij} > 0$, aleshores $v_1 > 0$, així que podem considerar l'únic z que satisfà (8). Dividint les inequacions a (8) per z, tenim el problema:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } w \\
&a_{11}\frac{x_1}{z} + a_{21}\frac{x_2}{z} + \cdots + a_{n1}\frac{x_n}{z} \geq 1, \\
&a_{12}\frac{x_1}{z} + a_{22}\frac{x_2}{z} + \cdots + a_{n2}\frac{x_n}{z} \geq 1, \\
&\vdots \\
&a_{1m}\frac{x_1}{z} + a_{2m}\frac{x_2}{z} + \cdots + a_{nm}\frac{x_n}{z} \geq 1, \\
&\frac{x_1}{z} + \ldots + \frac{x_n}{z} = \frac{1}{z}, \\
&\frac{x_i}{z} \geq 0,\ 1 \leq i \leq n.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Sigui ara $x'_i = (\frac{x_i}{z})$, $1 \leq i \leq n$. Com que el problema de maximitzar z és el mateix que el de minimitzar $\frac{1}{z}$, el problema es pot reescriure com:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n \\
&a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + \cdots + a_{n1}x'_n \geq 1, \\
&a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + \cdots + a_{n2}x'_n \geq 1, \\
&\vdots \\
&a_{1m}x'_1 + a_{2m}x'_2 + \cdots + a_{nm}x'_n \geq 1, \\
&x'_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Podem expressar-ho de manera més concisa en notació vectorial. Siguin $X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)^T$, $b = (1, 1, \ldots, 1)^T$ i $c = (1, 1, \ldots, 1)^T$ on b és de dimensió n i c és de dimensió m, aleshores podem reescriure (10) com:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } \ bX' \\
&\text{Condicionat a :} \\
&M^T X' \geq c,\ \ X' \geq 0
\end{aligned} \tag{11}
$$

En resum, el recíproc del valor mínim de la funció bx' és igual a v_1. A més a més, com que $z(x'_1, \ldots, x'_n) = (x_1, \ldots, x_n)$, al multiplicar les coordenades d'una X' en la qual s'aconsegueix aquest mínim, ens dóna l'estratègia màxima pel jugador 1.

De manera similar, veurem que el problema de determinar v_2 i l'estratègia minimax pel jugador 2 és el problema dual de (10).

Per algun $y \in Y$, el màxim de les n quantitats de $M_i y^T$ és el mínim $z \in \mathbb{R}$ tal que:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1m}y_m \leq w, \\
&\vdots \\
&a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nm}y_m \leq w.
\end{aligned}
$$

Com que v_2 és el mínim de tots els $y \in Y$ d'aquests w, aleshores v_2 és igual al mínim z que satisfà:

$$\begin{aligned}
&a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1m}y_m \leq w,\\
&\vdots\\
&a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nm}y_m \leq w,\\
&y_1 + y_2 + \cdots + y_m = 1,\\
&y_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq m.
\end{aligned} \tag{12}$$

El punt en el qual aquest valor mínim s'assoleix és l'estratègia minimax pel jugador 2. Com abans, sabem que $v_2 > 0$ i, per tant, qualsevol w que satisfà (10) ha de ser positiva. Dividint les inequacions de (10) per z obtenim el problema de:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } w\\
&a_{11}\frac{y_1}{w} + a_{21}\frac{y_2}{w} + \cdots + a_{1m}\frac{y_m}{w} \leq 1,\\
&a_{12}\frac{y_1}{w} + a_{22}\frac{y_2}{w} + \cdots + a_{2m}\frac{y_m}{w} \leq 1,\\
&\vdots\\
&a_{n1}\frac{y_1}{w} + a_{n2}\frac{y_2}{w} + \cdots + a_{nm}\frac{y_m}{w} \leq 1,\\
&\frac{y_1}{w} + \ldots + \frac{y_m}{w} = \frac{1}{w},\\
&\frac{y_j}{w} \geq 0,\ 1 \leq j \leq m.
\end{aligned} \tag{13}$$

Sigui $y'_j = (y_j/w)$, $1 \leq j \leq m$, aleshores (13) és equivalent al següent problema de programació lineal:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } y'_1 + y'_2 + \ldots + y'_m\\
&a_{11}y'_1 + a_{21}y'_2 + \cdots + a_{1m}y'_m \geq 1,\\
&a_{12}y'_1 + a_{22}y'_2 + \cdots + a_{2m}y'_m \geq 1,\\
&\vdots\\
&a_{n1}y'_1 + a_{n2}y'_2 + \cdots + a_{nm}y'_m \geq 1,\\
&y'_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq m.
\end{aligned} \tag{14}$$

Com hem fet abans, utilitzem la notació vectorial per arribar a:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } \ cY'\\
&\text{Condicionat a :}\\
&M^TY' \geq b,\ Y' \geq 0
\end{aligned} \tag{15}$$

El recíproc del màxim valor de la funció cY' és igual a v_2. També, com que $w(y'_1, \ldots, y'_m) = (y_1, \ldots, y_m)$, multiplicant les coordenades d'un Y' en les quals s'aconsegueix aquest mínim per v_2, ens dóna l'estratègia minimax pel jugador 2.

Ara, es pot veure que (11) i (15) són problemes lineals duals. Maximitzar cY' condicionat a que $MY' \leq b$, $Y' \geq 0$ és el problema primal i minimitzar bX' condicionat a que $M^T X' \geq c$, $X' \geq 0$ és el problema dual. A més a més, el problema dual ha de tenir una solució òptima finita, ja que, la funció objectiu $bX' = x'_1 + \ldots + x'_n$ està acotada inferiorment per zero, i com que tots els a_{ij} són positius, existeixen solucions factibles pel sistema de restriccions $M^T X' \geq c$. D'aquesta manera el problema primal també té una solució òptima finita. Per tant, pel Teorema de Dualitat (vist a l'assignatura de Seminari de Matemàtica Discreta), els dos problemes tenen solucions finites obtenint el mateix valor òptim. Així, existeixen estratègies òptimes, l'estratègia maximin i l'estratègia minimax, pels jugadors 1 i 2 respectivament, i aquests valors són iguals, i.e. $v_1 = v_2$.

Cas 2: Cas general
Suposem que algunes coordenades a_{ij} són negatives. Escollim qualsevol constant r amb la propietat que $a_{ij} + r > 0$ per tot i, j. Sigui E la matriu $n \times m$ amb totes les coordenades igual a 1. Considerem la matriu de pagaments $M + rE$. D'aquesta manera el pagament esperat per qualsevol parell d'estratègies (x, y) és:

$$X(M + rE)Y^T = XMY^T + rXEY^T \tag{16}$$

Però $X = (x_1, \ldots, x_n)$ i $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ són estratègies, i $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, $\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$. Pel que aleshores XE és igual al vector de dimensió n $(1, \ldots, 1)$ i llavors $xEY^T = (1, \ldots, 1)Y^T = 1$. Per tant, el pagament esperat és $XAY^T + r$, el qual és el pagament esperat per la matriu del joc més la constant r. Com que els pagaments esperats XMY^T i $X(M + rE)Y^T$ difereixen només per la constant r, els jocs amb matrius de pagament M i $M + rE$ tindran les mateixes estratègies òptimes (estratègies maximin i minimax), amb valors de joc que difereixen de la constant r. Però totes les coordenades de la matriu del joc $M + rE$ són positives, i per tant podem aplicar els resultats del Cas 1 a aquest joc. Així, per un joc amb matriu de pagaments M, les estratègies maximin i minimax existeixen i $v_1 = v_2$. $\square$

3 “Duel” (1959)

En aquesta secció del treball analitzem l’obra des del punt de vista matemàtic tot aplicant els conceptes vistos anteriorment per tal d’acabar fent un anàlisi del procés de creació des del punt de vista matemàtic.

Per a aquesta part del treball s’ha consultat “Formalized Music”, un treball de Iannis Xenakis [10] així com un article que analitza l’obra [11].

3.1 Introducció històrica

“Duel” és una obra musical composta per Iannis Xenakis, un pioner en el camp de la música contemporània.

“Duel” va ser escrita entre els anys 1958 i 1959 i és considerada una de les seves obres més emblemàtiques. Aquesta reflecteix la visió avantguardista i innovadora de Xenakis i és representativa del seu interès per les matemàtiques, la física i l’ús de la tecnologia en la música.
Una de les grans característiques destacades de “Duel” és l’ús de les tècniques de composició de Xenakis basades en l’anàlisi estocàstica i la teoria dels jocs. A través d’aquests mètodes, Xenakis va explorar la interacció i la competència entre dues orquestres, creant una experiència innovadora per a l’audiència.

3.2 Descripció del joc

En aquest joc musical hi ha dos participants: els directors de cada orquestra. Els anomenarem com director X i director Y. Cada una de les orquestres està formada per tres grups instrumentals diferents:

1. Vents: 1 piccolo (flautí), 1 oboè, 1 clarinet en mi bemoll, 1 clarinet baix, 1 fagot, 1 contrafagot, 2 trompetes i 1 trombó.
2. Percussió: 2 bongos, 3 congues, 1 tambor i 1 gran cassa
3. Cordes: 6 violins primers, 6 violins segons, 4 violoncels i 2 contrabaixos

Cada director té a la seva disposició sis estratègies possibles:

I. Clúster de sons com el pizzicato o cops amb la part de fusta de l’arc molt breus distribuïts estocàsticament.

II. Cordes sostingudes paral·leles amb fluctuacions.

III. Glissandos de cordes entrellaçades.

IV. Sons estocàstics de percussió.

V. Sons estocàstics d’instruments de vent.

VI. Silenci.

La idea és que els directors estiguin esquena amb esquena de manera que no puguin veure què fa l'altre i que utilitzin els dits o senyals lluminosos que són invisibles per a l'orquestra contraria. Si els directors utilitzen senyals lluminosos accionats per botons, les puntuacions es poden anunciar automàticament en un marcador a la sala, tal com es mostra en un marcador als partits de futbol. Si els directors només fan servir els dits, llavors un àrbitre pot comptar els punts i posar les puntuacions manualment perquè siguin visibles a la sala. Al final d'un nombre determinat d'intercanvis o minuts, segons acordin els directors, un dels dos és declarat guanyador.

3.3 Anàlisi de l'obra

3.3.1 Exposició del problema

El conjunt d'accions de les dues orquestres que participen al joc és, respectivament pel director X i pel director Y, A_X i A_Y. Aleshores, podem crear parelles d'esdeveniments (x,y), amb $x \in A_X$ i $y \in A_Y$ i avaluar-les tot seguint un criteri subjectiu creat per Xenakis, tal i com es pot veure a l'obra *Formalized Music* del propi autor. Aquestes parelles d'esdeveniments poden ser avaluades com *poor*, amb nivells: p^-, p, p^+; o *good*, amb nivells: g, g^+, g^{++}. Tots ells venen donats amb una amb una relació d'ordre $\leq$ tal que:

$$\mathrm{p}^- \leq \mathrm{p} \leq \mathrm{p}^+ \leq \mathrm{g} \leq \mathrm{g}^+ \leq \mathrm{g}^{++}.$$

Xenakis va enunciar que cada perfil s'avalués tal i com podem veure a la matriu $M1$:

		Director Y				
		I	II	III	IV	V
Director X	I	p	g	g^+	p^+	g^{++}
	II	g	p	p	g	p^+
	III	g^+	p	p	g^+	g
	IV	p^+	g	g^+	p	g
	V	g^{++}	p^+	g	g	p

Figura 2: M1

La matriu $M1$ no té punts de sella, ja que el màxim dels mínims de cada fila és p i el mínim dels màxims de cada columna és g. Per tant, no hi ha estratègies

òptimes pures a seguir però quan Xenakis introdueix els silencis, modifica $M1$ per obtenir $M2$.

Un cop s'obté $M2$, quan s'avalua amb els criteris de Xenakis, es converteix i s'ajusta en una matriu de pagaments $M3$ tal i com podem veure a la següent figura: Estudiem $M2$ i $M3$ per tal de veure si hi ha punts de sella: Mirem

Director X \ Director Y	I	II	III	IV	V	VI	mín. Fila
I	p	g	g^{++}	g^{+}	g^{+}	p	p
II	g	p	p	g	p^{+}	p	p
III	g^{++}	p	p	g^{+}	g	p	p
IV	g^{+}	g	g^{+}	p	g	p	p
V	g^{+}	p^{+}	g	g	p	p	p
VI	p	p	p	p	p	p^{-}	p^{-}
màx. Columna	g^{++}	g	g^{++}	g^{+}	g^{+}	p	

Director X \ Director Y	I	II	III	IV	V	VI	mín. Fila
I	1	3	5	4	4	1	1
II	3	1	1	3	2	1	1
III	5	1	1	4	3	1	1
IV	4	3	4	1	3	1	1
V	4	2	3	3	1	1	1
VI	1	1	1	1	1	3	1
màx. Columna	5	3	5	4	4	3	

Figura 3: M2 (a l'esquerra) i M3 (a la dreta)

primer $M2$:

- El mínim de cada fila el tenim marcat a la dreta de la taula (en totes és p), pel que el màxim dels mínims és p, el qual es dóna a les files I, II, III, IV i V.
- El màxim de cada columna el tenim marcat a sota de la taula (són g^{++}, g, g^{+}, g^{+}, $g^{+}+$ i p), pel que el mínim dels màxims és p, el qual es dóna a la columna VI.

Al ser els dos iguals (p) tenim punts de sella, els quals es troben a (VI, I), (VI, II), (VI, III), (VI, IV) i (VI, V).

En canvi, a $M3$:

- El mínim de cada fila és 1 a totes les files, pel que el màxim d'aquests mínims és 1 i es produeix a totes les files.
- El màxim de les columnes són (5, 3, 5, 4, 4, 3), pel que el mínim dels màxims és 3, el qual es dóna a les columnes II i VI.

Ara bé, com que $3 \neq 1$, no hi ha punts de sella, pel que no existeixen estratègies pures òptimes i llavors tots directors haurien d'anar canviant l'acció presa.

El director Y està interessat en efectuar l'esdeveniment VI o II només (per tal de minimitzar el benefici del director X), mentre que el director X pot escollir lliurement entre I, II, III, IV i V o VI, ja que els mínims de cada fila són 1.

Ara bé, si ens fixem amb la matriu $M3$, tots els elements són positius, pel que passi el que passi, el director X, tindrà un pagament esperat positiu.

És per això que Xenakis va fer uns canvis per tal que el joc fos més just fins arribar a la següent matriu de pagaments:

Director X \ Director Y	I	II	III	IV	V	VI	mín. Fila
I	2	3	4	2	3	2	2
II	3	2	2	3	3	2	2
III	4	2	1	5	3	1	1
IV	2	4	4	2	2	2	2
V	3	2	3	3	2	2	2
VI	2	2	1	2	2	4	1
màx. Columna	4	4	4	5	3	4	

Figura 4: M4

Novament el joc no té estratègies òptimes pures, però anem a calcular les estratègies òptimes mixtes i el valor del joc.

3.3.2 Estudi del problema

El que farem en aquesta secció és analitzar amb detall la part matemàtica del procés de composició de l'obra.

Definim x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 com les probabilitats del director X de fer l'acció I, II, III, IV, V, VI respectivament. Ara, si el director Y escull:

- I, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_1 := 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6.$$

- II, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_2 := 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 2x_6.$$

- III, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_3 := 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 1x_6.$$

- IV, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_4 := 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6.$$

- V, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_5 := 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6.$$

- VI, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_6 := 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4x_6.$$

Per tant, el pagament esperat pel director X és, com a mínim, $\max\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$. Resolent el problema de programació lineal següent:

$$\begin{aligned}
&\max \text{ w} \\
&w \leq 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6, \\
&w \leq 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 2x_6, \\
&w \leq 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 1x_6, \\
&w \leq 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6, \\
&w \leq 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6, \\
&w \leq 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4x_6, \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1, \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.
\end{aligned}$$

Arribem a la solució òptima:

$$x_1 = \frac{2}{17}, \quad x_2 = \frac{6}{17}, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = \frac{3}{17}, \quad x_5 = \frac{2}{17}, \quad x_6 = \frac{4}{17}, \quad w = \frac{42}{17}.$$

D'altra banda, denotem per y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 a les probabilitats del director Y de fer l'acció I, II, III, IV, V, VI respectivament. Ara, si el director X escull:

- I, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_1 := 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 3y_5 + 2y_6.$$

- II, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_2 := 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6.$$

- III, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_3 := 4y_1 + 2y_2 + y_3 + 5y_4 + 3y_5 + y_6.$$

- IV, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_4 := 2y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 2y_6.$$

- V, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_5 := 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 3y_4 + 2y_5 + 2y_6.$$

- VI, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_6 := 2y_1 + 2y_2 + y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 4y_6.$$

Per tant, el pagament esperat pel director X és, com a molt, $\max\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$. Resolent el problema de programació lineal següent:

$$\begin{aligned}
&\min z \\
&z \geq 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 3y_5 + 2y_6, \\
&z \geq 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6, \\
&z \geq 4y_1 + 2y_2 + y_3 + 5y_4 + 3y_5 + y_6, \\
&z \geq 2y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 2y_6, \\
&z \geq 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 3y_4 + 2y_5 + 2y_6, \\
&z \geq 2y_1 + 2y_2 + y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 4y_6, \\
&y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 1, \\
&y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0.
\end{aligned}$$

Arribem a la solució òptima:

$$y_1 = \frac{5}{17}, \quad y_2 = \frac{2}{17}, \quad y_3 = \frac{2}{17}, \quad y_4 = \frac{1}{17}, \quad y_5 = \frac{2}{17}, \quad y_6 = \frac{5}{17}, \quad z = \frac{42}{17}.$$

Per tant, tenim que el valor del joc és $v = 42/17 \approx 2.47$. Ara bé, hem vist que el director X ha d'evitar l'acció III (probabilitat III $= 0$), i això s'ha d'evitar perquè sinó l'acció s'hauria d'eliminar però aleshores tots dos directors no tindrien el mateix número d'accions.

Modificant el valor de (II, IV) $= 3$ a (II, IV) $= 2$, s'obtenen les següents estratègies òptimes:

$$x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{3}{28}, \quad x_3 = \frac{3}{28}, \quad x_4 = \frac{3}{28}, \quad x_5 = \frac{1}{7}, \quad x_6 = \frac{2}{7}, \quad w = \frac{69}{28}.$$

$$y_1 = \frac{19}{56}, \quad y_2 = \frac{1}{8}, \quad y_3 = \frac{3}{28}, \quad y_4 = \frac{1}{56}, \quad y_5 = \frac{1}{8}, \quad y_6 = \frac{2}{7}, \quad z = \frac{69}{28}.$$

Per tant, el valor del joc és de $v = 69/28 \approx 2.47$ punts.
Encara que els valors s'han modificat una mica, el valor del joc s'ha mantingut pràcticament constant. Però per l'altra banda, les estratègies mixtes òptimes han variat molt. Per tant, és necessari fer més just el joc (és a dir, aconseguir que el valor del joc sigui 0).

Per fer-ho, Iannis Xenakis du a terme operacions elementals per files i columnes de la matriu i arriba a la matriu $M7$ següent: Aquesta matriu no té punts de

		Director Y						
		I	II	III	IV	V	VI	mín. Fila
Director X	I	-1	1	3	-1	1	-1	-1
	II	1	-1	-1	-1	1	-1	-1
	III	3	-1	-3	5	1	-3	-3
	IV	-1	3	3	-1	-1	-1	-1
	V	1	-1	1	1	-1	-1	-1
	VI	-1	-1	-3	-1	-1	3	-3
	màx. Columna	3	3	3	5	1	3	

Figura 5: M7

sella pel que tampoc tindrà estratègies pures òptimes.

Calculem-ne les estratègies mixtes i el valor del joc: Definim x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 com les probabilitats del director X de fer l'acció I, II, III, IV, V, VI respectivament. Ara, si el director Y escull:

- I, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_1 := -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 - x_6.$$

- II, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_2 := x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 - x_6.$$

- III, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_3 := 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 - 3x_6.$$

- IV, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_4 := -x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 - x_6.$$

- V, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_5 := x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6.$$

- VI, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_6 := -x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 3x_6.$$

Per tant, el pagament esperat pel director X és, com a mínim, $\max\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$. Resolent el problema de programació lineal següent:

$$\begin{aligned}
&\max \text{ w} \\
&w \leq -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 - x_6, \\
&w \leq x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 - x_6, \\
&w \leq 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 - 3x_6, \\
&w \leq -x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 - x_6, \\
&w \leq x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6, \\
&w \leq -x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 3x_6, \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1, \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.
\end{aligned}$$

Arribem a la solució òptima:

$$x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{3}{28}, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = \frac{3}{28}, \quad x_5 = \frac{3}{28}, \quad x_6 = \frac{1}{7}, \quad w = \frac{-1}{14}.$$

D'altra banda, denotem per y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 a les probabilitats del director Y de fer l'acció I, II, III, IV, V, VI respectivament. Ara, si el director X escull:

- I, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_1 := -y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 + y_5 - y_6.$$

- II, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_2 := y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + y_5 - y_6.$$

- III, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_3 := 3y_1 - y_2 - 3y_3 + 5y_4 + y_5 - 3y_6.$$

- IV, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_4 := -1y_1 + 3y_2 + 3y_3 - y_4 - y_5 - y_6.$$

- V, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_5 := y_1 - y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6.$$

- VI, aleshores el pagament esperat del director X és

$$P_6 := -y_1 - y_2 - 3y_3 - 3y_4 - y_5 + 3y_6.$$

Per tant, el pagament esperat pel director X és, com a molt, $\max\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$. Resolent el problema de programació lineal següent:

$$\begin{aligned}
&\min z \\
&z \geq -y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 + y_5 - y_6, \\
&z \geq y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + y_5 - y_6, \\
&z \geq 3y_1 - y_2 - 3y_3 + 5y_4 + y_5 - 3y_6, \\
&z \geq -1y_1 + 3y_2 + 3y_3 - y_4 - y_5 - y_6, \\
&z \geq y_1 - y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6, \\
&z \geq -y_1 - y_2 - 3y_3 - 3y_4 - y_5 + 3y_6, \\
&y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 1, \\
&y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0.
\end{aligned}$$

Arribem a la solució òptima:

$$y_1 = \frac{19}{56}, \quad y_2 = \frac{1}{8}, \quad y_3 = \frac{3}{28}, \quad y_4 = \frac{1}{56}, \quad y_5 = \frac{1}{8}, \quad y_6 = \frac{2}{7}, \quad z = \frac{-1}{14}.$$

Per tant, el joc té un valor de $v = \frac{-1}{14} \approx -0.07$, d'on, tot i no ser del tot just, és una molt bona aproximació. Per acabar de fer-lo just, cada ronda, s'ha de restar 0.07 punts al director Y i sumar 0.07 punts al director X,

4 Discussió

En aquest apartat s'estudia molt breument l'impacte que va tindre l'obra "Duel" així com possibles línies futures per aquest treball.

Iannis Xenakis va ser pioner en l'ús de models matemàtics en música, com ara aplicacions de la teoria de conjunts, processos estocàstics i teoria de jocs, i també va tenir una influència important en la música electrònica.

Entre els músics inspirats per Xenakis hi podem trobar Karlheinz Stockhausen, Pierre Boulez, Gerard Grisey, Jonathan Harvey o George Frederic Grass.

Hi ha altres obres que han estat objecte d'estudi per la seva estreta relació amb la teoria de jocs com ara "Stratégie", "Linaïa Agon" [4] o "Achrorripsis" [1] i una possible continuació d'aquest treball seria analitzar aquestes tres obres.

D'altra banda també hi ha qui s'ha bassat en mètodes de Xenakis per fer les seves obres musicals, com pot ser el cas de M. Linui i D. Morelli [5] o Jessica Shand [9]. Així, una altra possible línia futura podria ser arribar a crear un mètode propi de composició musical basat en mètodes originals de Xenakis.

5 Conclusions

El present treball de final de grau ha explorat a fons els jocs de suma zero per a dos jugadors des de la perspectiva de la teoria de jocs. S'ha realitzat un estudi exhaustiu de les seves definicions, propietats i implicacions per acabar analitzant l'obra "Duel" de Iannis Xenakis com a cas d'estudi.

En primer lloc s'ha abordat la definició de joc de suma zero per a dos jugadors, que es caracteritza per tenir la propietat que tots els guanys d'un jugador equivalen a les pèrdues de l'altre.

A l'apartat de teoria de jocs, s'han creat, de manera pròpia, diversos exemples, per fer més comprensibles els conceptes matemàtics que s'enuncien durant tota la secció. S'ha diferenciat entre les estratègies pures i les mixtes on, per les mixtes, s'ha usat el mètode del símplex après a l'assignatura de Seminari de Matemàtica Discreta, la qual es realitza durant el segon curs.

Per cada tipus d'estratègia s'ha introduït el seu respectiu equilibri de Nash, aspecte clau dins el món de la teoria de jocs, el qual es caracteritza per ser la millor resposta d'un jugador si es considera que l'altre manté constant la seva estratègia.

Per acabar la part de teoria de jocs del treball, s'ha definit el valor d'un joc i s'ha enunciat i demostrat el teorema fonamental de la teoria de jocs, el teorema minimax, de John von Neumann, el qual assegura que, en aquest tipus de jocs, existeix sempre una estratègia òptima per a cada jugador, la qual minimitza les pèrdues màximes possibles enfront de les accions del contrincant.

Per últim s'ha analitzat l'obra "Duel" de Iannis Xenakis tot partint des d'una matriu de pagaments creada mitjançant una avaluació subjectiva realitzada pel propi autor fins a arribar a tenir un joc gairebé just (amb valor $v \approx 0.07$). Per fer-ho s'ha anat estudiant el joc en cada matriu de pagaments tot utilitzant les definicions vistes a la secció anterior com ara mirant si la matriu de pagaments tenia punts de sella o si era just (és a dir amb un valor $v = 0$).

El treball s'ha anat realitzant tot il·lustrant amb exemples freqüentment per tal de fer més fàcil la seva comprensió i així poder comprendre els passos a l'hora d'analitzar l'obra analitzada de Xenakis. L'objectiu és que qualsevol lector i lectora pugui arribar a entendre aquest treball sense tenir coneixements previs de teoria de Jocs d'una manera dinàmica, tot i així s'hi poden veure aspectes vistos en diferents assignatures del grau com per exemple, Estadística o Probabilitat.

Així, aquest treball és el resultat d'una recerca, contrastació i verificació d'informació per tal de poder resumir i explicar de manera clara els jocs de suma zero per a dos jugadors.

Referències

[1] Linda M. Arsenault. "Iannis Xenakis's "Achorripsis": The Matrix Game". A: *Computer Music Journal* 26.1 (2002), pàg. 58 - 72. ISSN: 01489267, 15315169. URL: http://www.jstor.org/stable/3681400 (cons. 15-11-2022).

[2] Thomas S. Ferguson. *Game Theory*. UCLA, 2008.

[3] Megan Hall. *Game Theory and Von Neumann's Minimax Theorem*. 2011. URL: https://spark.bethel.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1002&context=honors-works. (consultat: 05.03.2023).

[4] Jelena Janković-Beguš. "Playing the game with aleatorics and narrativity: Linaia-Agon by Iannis Xenakis". A: *New Sound-International Magazine for Music* 48 (2016), pàg. 109 - 130.

[5] Marco Liuni i Davide Morelli. *Playing music: an installation based on Xenakis' musical games*. Association for Computing Machinery. 2006. URL: https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/1133265.1133333. (consultat: 19.10.2022).

[6] Ebrahim Nasrabadi i James Orlin. *Game Theory 1: 2-person 0-sum, or constant sum*. MIT. 2013. URL: https://ocw.mit.edu/courses/15-053-optimization-methods-in-management-science-spring-2013/resources/mit15_053s13_lec7/. (consultat: 19.10.2022).

[7] Ebrahim Nasrabadi i Jim Orlin. *2-person 0-sum Games*. MIT. 2013. URL: https://ocw.mit.edu/courses/15-053-optimization-methods-in-management-science-spring-2013/2e66a9d9a74dc5c11b620f70663400da_MIT15_053S13_tut08.pdf. (consultat: 19.10.2022).

[8] Martin J. Osborne i Ariel Rubinstein. *A Course in Game Theory*. The MIT Press, 1994.

[9] Jessica Shand. *GAME MUSIC: Game-Theoretic Principles in Music Composition*. Harvard College. 2020. URL: https://static1.squarespace.com/static/5c3b71680dbda39a391e9dd5/t/5efb83c7be87e018f0023f4c/1593541579081/Math243_Final_Shand.pdf. (consultat: 19.10.2022).

[10] Iannis Xenakis. *Formalized Music. Thought and mathematics in composition*. Pendragon Press, 1992. ISBN: N 0-945193-24-6.

[11] *Xenakis, Formalized Music*. Wikidot.com. 2022. URL: http://musicgames.wikidot.com/book:xenakis-formalized-music#formalized-music. (consultat: 03.01.2023).