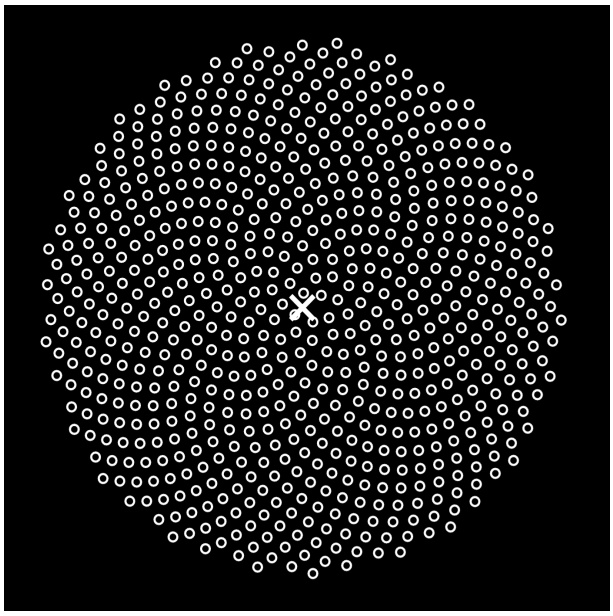
UAB

Universitat Autònoma de Barcelona

Facultat de Ciències

Grau en Matemàtiques

Temperament musical, fraccions contínues i l'escala de 53 notes



Anna Nofuentes Creus

Tutor: Roberto Rubio Núñez

Juliol 2023

Abstract

En aquest treball estudiem la teoria de fraccions contínues i mostrem com es relacionen amb l'escala musical de 12 semitons. Per començar fem una anàlisi exhaustiva d'aquestes expressions matemàtiques i descrivim de manera precisa com estan vinculades a la representació dels nombres reals. Posteriorment, estudiem l'escala musical des d'una perspectiva matemàtica, amb un enfocament particular en l'afinació pitagòrica i el temperament musical, i establim una relació entre la construcció d'aquestes escales i la teoria de les fraccions contínues, la qual ens suggereix alternatives per a l'escala musical, destacant especialment la de 53 notes.

Agraïments

Vull expressar el meu agraïment cap a totes aquelles persones que han estat presents durant aquest procés. En primer lloc, al meu tutor, Roberto Rubio Núñéz, per la seva guia i suport al llarg de tot aquest temps. Sense el seu acompanyament aquest treball no hagués estat possible. Per totes les hores dedicades, l'interès constant i tots els consells que m'ha donat, gràcies. En segon lloc, vull agrair als meus pares, la Júlia i el Víctor, per la seva immensa paciència, el seu interès en el projecte i el seu constant suport i ànim per aconseguir-ho. Finalment, a tots els professors i professores del Grau de Matemàtiques que m'han guiat i ajudat durant aquests anys, acompanyant-me en el meu recorregut al llarg de tota la carrera.

Índex

1 Introducció **1**

2 Fraccions contínues **2**

3 Convergents d'una fracció contínua **3**

4 Nombres racionals i fraccions contínues finites **5**

4.1 L'algorisme de la fracció contínua 5

4.2 Representacions equivalents 7

5 Nombres reals i fraccions contínues **8**

6 La qualitat de les convergents **11**

7 Fraccions contínues periòdiques **14**

7.1 Fraccions contínues eventualment periòdiques 14

7.2 Fraccions contínues purament periòdiques 17

7.3 La fracció contínua per $\sqrt{N}$ 21

8 La raó àuria **22**

9 L'escala musical des d'una perspectiva matemàtica **24**

9.1 Introducció 24

9.2 L'escala pitagòrica 25

9.3 El cicle de quintes 27

9.4 Cents 28

9.5 Temperaments 28

9.6 L'escala de 53 notes 30

Referències **32**

1 Introducció

Les matemàtiques i la música són dos àmbits que, malgrat a primera vista poden semblar totalment diferents, estan estretament relacionats. Al llarg de la meva trajectòria acadèmica he estat conscient que tant el món de les matemàtiques com el de la música representen un repte per a mi. Des de la meva infància, els professors i professores de música sempre m'han dit que aquestes dues disciplines van de la mà. Per això, penso que una bona manera d'acabar el Grau de Matemàtiques és aprofundir en alguna de les nombroses connexions que existeixen entre elles.

Els continguts que es presenten en aquest treball es poden emmarcar en dos grans blocs. El primer es centra en l'estudi matemàtic de les fraccions contínues, explorant el seus conceptes fonamentals i propietats més rellevants. El segon s'ocupa de l'aplicació directa d'aquestes fraccions contínues en el context musical, analitzant com ens ajuden a entendre un aspecte específic de l'àmbit de la música. Cal destacar que el treball és essencialment autocontingut, excepte per les proves de dos resultats tècnics (Lema 6.5 i Lema 7.12), que s'han omès per millorar la presentació.

Pel que respecta al primer bloc, les fraccions contínues ofereixen una visió àmplia de diversos problemes matemàtics, per exemple, en l'aproximació de nombres irracionals, en la resolució d'equacions diofàntiques, en la factorització d'enters, entre d'altres. Al llarg de la història, destacats matemàtics han contribuït al desenvolupament de la teoria de fraccions contínues. Entre ells podem citar a Cataldi, Bombelli, Euler, Lagrange, Lambert i Gauss, qui les van estudiar durant els segles XVI, XVII i XVIII. De fet, ja Euclides, l'any 300 aC, utilitzava les fraccions contínues de manera implícita, tot i que no va ser fins a prop de l'any 1500 que Cataldi i Bombelli en van desenvolupar l'ús i van estudiar les seves propietats.

Les fraccions contínues es poden classificar en finites i infinites. Veurem els contextos en què s'utilitza cada tipus i destacarem una de les idees principals de la part matemàtica del treball: l'estreta relació que tenen amb els nombres reals. D'una banda, les fraccions contínues finites estan associades a nombres racionals ja que cada racional pot tenir dues representacions possibles per una fracció contínua finita, com també passa en el cas de la representació decimal. Mentre que les fraccions contínues infinites estan en correspondència bijectiva amb els nombres irracionals. D'aquesta manera, les fraccions contínues permeten una representació alternativa dels nombres reals diferent de la seva expressió decimal. A través del que es coneix com convergents de la fracció contínua, que en realitat són fraccions contínues finites generades a partir de la fracció contínua inicial, analitzarem la qualitat d'aquestes aproximacions.

De fet, en una de les seccions aprofundirem en l'estudi d'un tipus específic de fraccions contínues infinites conegudes com a fraccions contínues periòdiques. Tal com suggereix el seu nom, aquestes fraccions es caracteritzen per tenir una seqüència periòdica de termes repetits, amb un patró recurrent que es repeteix infinitament. Les fraccions contínues periòdiques tenen propietats matemàtiques especialment interessants. Per exemple, hi ha una correspondència bijectiva entre els nombres irracionals quadràtics i les fraccions contínues periòdiques. A més, destacarem una classe específica d'irracionals quadràtics anomenats reduïts, que es corresponen amb fraccions contínues purament periòdiques, és a dir, amb un patró periòdic des del principi. Per altra banda, estudiarem la fracció contínua de $\sqrt{N}$, on N és un nombre quadràtic irracional, que resulta ser una representació única i interessant per a aquest tipus d'irracionals quadràtics.

Altrament, en la segona part d'aquest treball, explorarem l'escala musical des d'una perspectiva matemàtica. Ens centrarem en l'afinació pitagòrica, un sistema de construcció de l'escala musical que és la base del mètode d'afinació occidental i el primer documentat, però que presenta l'inconvenient principal conegut com a coma pitagòrica que s'explicarà detalladament (a la Secció 9.) Estudiarem a fons el problema matemàtic associat a aquest sistema i explicarem la solució més comunament acceptada: el temperament musical. De fet, serà en aquest punt on mitjançant les fraccions contínues podrem comprendre millor per què l'escala musical habitual consta de 12 semitons i també explorarem altres opcions per a la quantitat de notes més òptima. Com a exemple, parlarem de l'escala alternativa de 53 notes.

2 Fraccions contínues

En aquesta primera secció introduïm les fraccions contínues, proporcionant una visió general de què són i explorant algunes de les seves propietats més rellevants. Com s'ha mencionat anteriorment, hi ha dos tipus de fraccions contínues. No obstant això, en les seccions següents, ens centrem en el grup de les fraccions finites, deixant les fraccions contínues infinites per a la Secció 5. Aquesta secció i les properes estan basades en les referències bibliogràfiques [HW79], [Hua12] i [Kri16].

Comencem, doncs, definint de manera formal el concepte de fracció contínua finita.

Definició 2.1 (Fracció contínua finita)**.** *Una fracció contínua finita és una expressió de la forma*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \; a_{N-2} + \cfrac{1}{a_{N-1} + \cfrac{1}{a_N}}}} \tag{1}$$

on els a_i són enters positius per $i \in \{1, \dots, N\}$ i a_0 és qualsevol enter. Diem que $a_0, a_1, \dots, a_N$ són els quocients parcials o simplement els quocients de la fracció contínua.

L'expressió (1) és difícil de manejar i, per tant, generalment escrivim la fracció contínua finita de les següents maneres:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 +} \cdots \frac{1}{+ a_N}$$

$$[a_0; a_1, \dots, a_N] \, .$$

Observació 2.2. *És clar veure que es compleix*

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = \left[a_0; a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right], \tag{2}$$

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots, a_n]} = [a_0; [a_1, \dots, a_n]] \, , \tag{3}$$

per $1 \leq n \leq N$.

En general,

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = [a_0; a_1, \dots, a_{m-1}, [a_m; a_{m+1}, \dots, a_n]] \tag{4}$$

per $1 \leq m < n \leq N$.

De fet, notem que estem utilitzant la notació de la definició amb nombres racionals, els quals no són necessàriament enters.

Si permetem que els numeradors i/o els denominadors parcials prenguin valors arbitraris, que podrien ser funcions en algun context en concret, l'expressió resultant es denomina *fracció contínua generalitzada.*

No obstant, en aquest treball ens limitem a tractar les *fraccions contínues simples*, que són aquelles en què els numeradors parcials són sempre 1 i els denominadors parcials, a_i, són enters positius (excepte a_0 que pot ser qualsevol enter). Tot i això, fem servir el terme *fraccions contínues* per tal de simplificar la notació.

3 Convergents d'una fracció contínua

Per tenir una idea general, les convergents d'una fracció contínua són expressions que s'obtenen considerant un nombre finit de termes de la fracció contínua inicial. Tot seguit, en donem la seva definició i estudiem algunes de les seves propietats.

Definició 3.1 (Convergents d'una fracció contínua)**.** *Diem que* $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ *és l'n−èsima convergent de la fracció contínua* $[a_0; a_1, \ldots, a_N]$ *per a* $0 \leq n \leq N$.

La següent proposició ens mostra una manera eficient de calcular les convergents d'una fracció contínua.

Proposició 3.2. *Siguin* p_n *i* q_n *definits per*

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & p_1 &= a_1 a_0 + 1, & p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} & (2 \leq n \leq N), \\ q_0 &= 1, & q_1 &= a_1, & q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} & (2 \leq n \leq N), \end{aligned}$$

llavors

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

és l'n-èsima convergent de la fracció contínua $[a_0; a_1, \ldots, a_N]$.

Demostració. Ho demostrarem per inducció sobre n. Per $n = 0$ i $n = 1$ és evident. Suposem ara que és cert per $n \leq m$, on $m < N$ (hipòtesi d'inducció). Llavors,

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m] = \frac{p_m}{q_m} = \frac{a_m p_{m-1} + p_{m-2}}{a_m q_{m-1} + q_{m-2}},$$

i $p_{m-1}, p_{m-2}, q_{m-1}, q_{m-2}$ depenen només de $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$.

Per tant, utilitzant la igualtat (2) obtenim que

$$\begin{aligned} [a_0; a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m, a_{m+1}] &= \left[a_o; a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right] \\ &= \frac{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) p_{m-1} + p_{m-2}}{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) q_{m-1} + q_{m-2}} \\ &= \frac{a_{m+1}(a_m p_{m-1} + p_{m-2}) + p_{m-1}}{a_{m+1}(a_m q_{m-1} + q_{m-2}) + q_{m-1}} \\ &= \frac{a_{m+1} p_m + p_{m-1}}{a_{m+1} q_m + q_{m-1}} = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}; \end{aligned}$$

i veiem que per inducció el teorema queda demostrat. □

Seguidament, presentem una sèrie de propietats rellevants de les convergents que ens seran útils per demostrar resultats futurs, acompanyades de les seves demostracions.

Lema 3.3. *Les funcions* p_n *i* q_n *satisfan*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

Demostració. Per la Proposició 3.2 tenim que

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

També

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}). \end{aligned}$$

Repetint l'argument per a $n-1, n-2, \ldots, 2$ enlloc de n obtenim que

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = \ldots = (-1)^{n-1}(p_1 q_0 - p_0 q_1) = (-1)^{n-1}.$$

□

Lema 3.4. *Les funcions p_n i q_n també satisfan*

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n \qquad (n \geq 2).$$

Demostració. Notem que

$$\begin{aligned} p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = (-1)^n a_n. \end{aligned}$$

□

Lema 3.5. *Les convergents parelles x_{2n} augmenten estrictament amb n i les convergents imparelles x_{2n+1} decreixen estrictament amb n.*

Demostració. Observem que cada q_n és positiu i pel Lema 3.4 tenim que

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_{n-2} q_n}.$$

També $a_i > 0$ per a tot $i \in \{1, \ldots, N\}$ (excepte a_0 que pot ser negatiu). Per tant, $x_n - x_{n-2}$ té el signe de $(-1)^n$. □

Lema 3.6. *Tota convergent imparella és major que qualsevol convergent parella.*

Demostració. Pel Lema 3.3 tenim que

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n}.$$

Aleshores, $x_n - x_{n-1}$ té el signe de $(-1)^{n-1}$. Per tant, $x_{2m+1} > x_{2m}$. Ara bé, si el resultat fos fals tindríem que $x_{2m+1} \leq x_{2\mu}$ per a certs m, μ. Si $\mu < m$, llavors pel Lema 3.5 tenim que $x_{2m+1} < x_{2m}$. Si $\mu > m$, llavors $x_{2\mu+1} < x_{2\mu}$. En conclusió, qualsevol de les dues desigualtats contradiu que $x_{2m+1} > x_{2m}$. □

Lema 3.7. *El valor de la fracció contínua es troba entre les convergents parelles i les convergents senars.*

Demostració. Notem que el valor de la fracció contínua és igual a la darrera convergent, és a dir, la convergent N. Si N és parell, llavors és la més gran de les convergents parelles segons el Lema 3.5 i menor que totes les convergents senars segons el Lema 3.6. De manera similar, si N és senar, llavors és la més petita de les convergents senars segons el Lema 3.5 i més gran que totes les convergents parelles segons el Lema 3.6. Per tant, el valor de la convergent i, en conseqüència de la fracció contínua, es troba entre les convergents parelles i les convergents senars. □

Lema 3.8. *Tenim que $q_n \geq n$, amb desigualtat estricta quan $n > 3$.*

Demostració. En primer lloc, $q_0 = 1$ i $q_1 = a_1 \geq 1$. Si $n \geq 2$, aleshores

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1} + 1,$$

per tant, $q_n > q_{n-1}$ i $q_n \geq n$. Si $n > 3$, llavors

$$q_n \geq q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1} + 1 \geq n,$$

i per tant, $q_n > n$. □

4 Nombres racionals i fraccions contínues finites

En aquesta secció tractem la relació que hi ha entre els nombres racionals i les fraccions contínues finites. En particular, veiem que tot racional pot ser representat de dues úniques maneres possibles per una fracció contínua finita i viceversa. D'una banda, és clar que qualsevol fracció contínua finita $[a_0; a_1, \ldots, a_N]$ representa un nombre racional

$$x = x_N.$$

Així doncs, ens centrem en demostrar la implicació contrària, és a dir, cada nombre racional x pot ser representat per una fracció contínua finita i aquesta representació serà única excepte per una ambigüitat que descriurem de manera precisa a la Secció 4.2.

4.1 L'algorisme de la fracció contínua

Com bé ja sabem l'algorisme d'Euclides és un mètode eficient per calcular el màxim comú divisor de dos o més nombres. De fet, es tracta d'un algorisme que està estretament relacionat amb les fraccions contínues. Tot seguit, veiem l'algorisme de la fracció contínua que està basat en l'algorisme d'Euclides.

Abans de continuar, és important destacar que sovint ens interessa considerar els últims pisos de la fracció contínua, és a dir, ignorar els primers denominadors parcials i prendre la resta. Aquest concepte s'anomena quocient complet de la fracció contínua i serà utilitzat en l'algorisme. A continuació, en donem la seva definició formal.

Definició 4.1 (Quocient complet)**.** *Diem que $a'_n = [a_n; a_{n+1}, \ldots, a_N] \quad (0 \leq n \leq N)$ és l'n-èsim quocient complet de la fracció contínua $[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots, a_N]$.*

Ara ja comptem amb les eines necessàries per descriure l'algorisme.

Sigui x un nombre real qualsevol i $a_0 = [x]$ (on $[x]$ denota la part entera de x). Llavors,

$$x_0 = a_0 + \xi_0, \qquad 0 \leq \xi_0 < 1.$$

Si $\xi_0 \neq 0$, aleshores podem escriure

$$\frac{1}{\xi_0} = a'_1, \quad [a'_1] = a_1, \quad a'_1 = a_1 + \xi_1, \quad 0 \leq \xi_1 < 1.$$

Si $\xi_1 \neq 0$, llavors tenim que

$$\frac{1}{\xi_1} = a'_2, \quad [a'_2] = a_2, \quad a'_2 = a_2 + \xi_2, \quad 0 \leq \xi_2 < 1,$$

i així successivament. Llavors $a'_n = \frac{1}{\xi_{n-1}} > 1$ i, per tant, $a_n \geq 1$ per $n \geq 1$.

Per tant,

$$x = [a_0; a'_1] = \left[a_0; a_1 + \frac{1}{a'_2}\right] = [a_0; a_1, a'_2] = [a_0; a_1, a_2, a'_3] = \dots,$$

amb $a_0, a_1, \dots$ enters i $a_i > 0$ per a tot $i \geq 1$.

El sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \xi_0 && (0 \leq \xi_0 < 1), \\ \frac{1}{\xi_0} &= a'_1 = a_1 + \xi_1 && (0 \leq \xi_1 < 1), \\ \frac{1}{\xi_1} &= a'_2 = a_2 + \xi_2 && (0 \leq \xi_2 < 1), \\ &\dots \end{aligned}$$

s'anomena l'algorisme de la fracció contínua.

Aquest algorisme continua sempre i quan $\xi_n \neq 0$. Si en algun moment $\xi_N = 0$ per algun cert N, aleshores l'algorisme acaba i

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_N].$$

En aquest cas, el nombre x és un racional representat per una fracció contínua finita i els nombres a'_n són els quocients complets de la fracció contínua.

Arribats a aquest punt, ja comptem amb les eines adequades per a demostrar el resultat principal de la secció.

Teorema 4.2. *Qualsevol nombre racional pot ser representat per una fracció contínua finita.*

Demostració. Si x és un enter, aleshores $\xi_0 = 0$ i $x = a_0$. Si x no és un enter, aleshores $x = \frac{h}{k}$, amb h i k enters i $k > 1$. Com que

$$\frac{h}{k} = a_0 + \xi_0 \Rightarrow h = a_0 k + \xi_0 k,$$

on a_0 és el quocient i $k_1 = \xi_0 k$ el residu de la divisió de h entre k.

Si $\xi_0 \neq 0$, aleshores

$$a'_1 = \frac{1}{\xi_0} = \frac{k}{k_1}$$

i

$$\frac{k}{k_1} = a_1 + \xi_1 \Rightarrow k = a_1 k_1 + \xi_1 k_1,$$

on a_1 és el quocient i $k_2 = \xi_1 k_1$ el residu de la divisió de k entre k_1.

Per tant, obtenim una sèrie d'equacions:

$$\begin{aligned} h &= a_0 k + k_1 \\ k &= a_1 k_1 + k_2 \\ k_1 &= a_2 k_2 + k_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

i així successivament sempre i quan $\xi_n \neq 0$, o equivalentment, $k_{n+1} \neq 0$.

Els enters no negatius $k, k_1, k_2, \dots$ formen una successió estrictament decreixent i, per tant, $k_{N+1} = 0$ per algun cert N. Per tant, $\xi_N = 0$ per algun determinat N i, en conseqüència, l'algorisme de la fracció contínua acaba i això demostra el teorema. □

Observació 4.3. *El sistema d'equacions*

$$\begin{aligned} h &= a_0 k + k_1 && (0 < k_1 < k), \\ k &= a_1 k_1 + k_2 && (0 < k_2 < k_1), \\ &\dots \\ k_{N-2} &= a_{N-1} k_{N-1} + k_N && (0 < k_N < k_{N-1}), \\ k_{N-1} &= a_N k_N \end{aligned}$$

es coneix com l'algorisme d'Euclides. El lector reconeixerà el procés per determinar el màxim comú divisor k_N, de h i k.

4.2 Representacions equivalents

Recordem que en la representació decimal de nombres racionals hi ha dues possibles representacions. Un exemple d'això és el nombre decimal periòdic $0.999\ldots$, el qual denota el nombre 1. En altres paraules, els símbols "$0.999\ldots$" i "1" són dues representacions diferents del mateix nombre. Aquest mateix fenomen es produeix amb les fraccions contínues, és a dir, com es mostra en el següent resultat, un nombre racional pot ser representat de dues maneres possibles mitjançant una fracció contínua finita.

Lema 4.4. *Si x és un nombre racional que es pot representar per una fracció contínua finita amb un nombre imparell (parell) de convergents, aleshores es pot representar també per una altra amb un nombre parell (imparell).*

Demostració. Si $a_N \geq 2$,

$$[a_0; a_1, \dots, a_N] = [a_0; a_1, \dots, a_N - 1, 1]\,.$$

Si $a_N = 1$,

$$[a_0; a_1, \dots, a_{N-1}, 1] = [a_0; a_1, \dots, a_{N-2}, a_{N-1} + 1]\,.$$

□

Observació 4.5. *Utilitzant la igualtat* (4) *i la Proposició 3.2 obtenim que*

$$\begin{aligned} x &= [a_0; a_1, \dots, a_N] \\ &= [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, [a_n; a_{n+1}, \dots, a_N]] \\ &= \frac{[a_n; a_{n+1}, \dots, a_N]\, p_{n-1} + p_{n-2}}{[a_n; a_{n+1}, \dots, a_N]\, q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{a'_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a'_n q_{n-1} + q_{n-2}} \quad (2 \leq n \leq N). \end{aligned}$$

Quan diem que dues fraccions contínues són idèntiques ens referim a que estan formades per la mateixa seqüència de quocients parcials. El lema que citem a continuació el necessitarem posteriorment per a la prova de la proposició que mostrarà que si dues fraccions contínues finites tenen el mateix valor sota una condició específica, llavors les fraccions són idèntiques.

Lema 4.6. *[HW79, Thm. 159] Tenim que $a_n = [a'_n]$, on $[a'_n]$ designa la part entera de a'_n, excepte $a_{N-1} = [a'_{N-1}] - 1$ quan $a_N = 1$.*

Proposició 4.7. *Si dues fraccions contínues finites*

$$[a_0; a_1, \dots, a_N]\,, \quad [b_0; b_1, \dots, b_M]$$

tenen el mateix valor x i $a_N, b_N > 1$, aleshores $M = N$ i les fraccions són idèntiques.

Demostració. Pel Lema 4.6, $a_0 = [x] = b_0$. Suposem que els primers n quocients parcials de les fraccions contínues són idèntics i que a'_n i b'_n són els $n-$èsims quocients complets. Aleshores,

$$x = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a'_n] = [b_0; b_1, \ldots, b_{n-1}, b'_n].$$

Si $n = 1$, llavors

$$a_0 + \frac{1}{a'_1} = b_0 + \frac{1}{b'_1},$$

és a dir, $a'_1 = b'_1$ i pel Lema 4.6 obtenim que $a_1 = b_1$. Suposem que $n > 1$, llavors per l'Observació 4.5 tenim que

$$\frac{a'_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a'_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{b'_n p_{n-1} + p_{n-2}}{b'_n q_{n-1} + q_{n-2}} \Rightarrow (a'_n - b'_n)(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) = 0.$$

Notem que pel Lema 3.3 tenim que, $p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$, per tant, $a'_n = b'_n$. De nou, pel Lema 4.6 arribem a que $a_n = b_n$. Sense pèrdua de la generalitat suposem que $N \leq M$. Acabem de veure que $a_n = b_n$ per a $n \leq N$. Si $M > N$, aleshores,

$$\begin{aligned} \frac{p_N}{q_N} &= [a_0; a_1, \ldots, a_N] \\ &= [a_0; a_1, \ldots, a_N, b_{N+1}, \ldots, b_M] \\ &= \frac{b'_{N+1} p_N + p_{N-1}}{b'_{N+1} q_N + q_{N-1}}, \end{aligned}$$

i aquesta darrera igualtat es deu a l'Observació 4.5. O equivalentment,

$$p_N q_{N-1} - p_{N-1} q_N = 0,$$

que és fals. Aleshores, $M = N$ i les fraccions són idèntiques. □

En conseqüència, podem deduir el següent resultat.

Lema 4.8. *L'algorisme de la fracció contínua determina una representació única excepte per la variació del Lema 4.4.*

Demostració. Com que $\xi_N = 0, a'_N = a_N$; llavors

$$0 < \frac{1}{a_N} = \frac{1}{a'_N} = \xi_{N-1} < 1$$

i per tant, $a_N \geq 2$. Per tant, per la Proposició 4.7 l'algorisme determina una representació del tipus que va ser demostrada per ser única excepte per la variació del Lema 4.4. □

En conclusió, obtenim el següent resultat.

Teorema 4.9. *Qualsevol nombre racional pot ser expressat com una fracció contínua finita de dues úniques maneres possibles: amb un nombre parell de convergents i amb un nombre senar de convergents. En particular, en una forma l'últim quocient parcial és 1 i en l'altra és estrictament major que 1.*

5 Nombres reals i fraccions contínues

Fins ara ens hem centrat en les fraccions contínues finites. Hem estudiat les propietats més rellevants de les seves convergents i hem demostrat que representen nombres racionals. No obstant, l'interès principal de les fraccions contínues està en la seva aplicació per representar nombres irracionals, la qual cosa requereix l'ús de fraccions contínues infinites. Tot seguit, enunciem la definició formal d'aquest altre grup de fraccions contínues.

Definició 5.1 (Fracció contínua infinita)**.** *Una fracció contínua infinita és una expressió de la forma*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \tag{5}$$

on els a_i són enters positius per $i = 1, 2, 3, \ldots$, i a_0 és qualsevol enter. Diem que $a_0, a_1, a_2, \ldots$ són els quocients parcials o simplement els quocients de la fracció contínua.

Observem que $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de la Definició 5.1 dona lloc a una successió d'enters positius excepte a_0 que pot ser negatiu. Per tant,

$$x_n = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$$

és, per a cada n, una fracció contínua que representa a un racional x_n. Si provem que x_n tendeix a un límit x quan $n \to \infty$, aleshores és natural dir que la fracció contínua $[a_0; a_1, \ldots]$ convergeix al valor x, és a dir, $x = [a_0; a_1, \ldots]$.

Cal remarcar que en la Secció 3 hem estudiat les propietats fonamentals de les convergents d'una fracció contínua finita. Aquestes propietats són també vàlides per al cas de les infinites i, a continuació, utilitzarem algunes d'elles per demostrar que efectivament tota fracció contínua infinita convergeix a un valor numèric.

Proposició 5.2. *Totes les fraccions contínues infinites són convergents.*

Demostració. Hem de veure que les convergents $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ tendeixen a un límit. Si $N \geq n$, la convergent x_n és també una convergent a $[a_0; a_1, \ldots, a_N]$. Aleshores, pel Lema 3.5 les convergents parelles formen una seqüència estrictament creixent i les convergents senars formen una seqüència estrictament decreixent. Ara si apliquem el Lema 3.6 tenim que cada convergent parella és menor que x_1, per tant, la seqüència estrictament creixent de convergents parelles està acotada per dalt; també cada convergent senar és major que x_0, per tant, la seqüència estrictament decreixent de convergents senar està acotada per sota. D'aquesta manera obtenim que les convergents parelles tendeixen a un límit ξ_1 i les convergents senars tendeixen a un límit ξ_2 tal que $\xi_1 \leq \xi_2$. Llavors, pel Lema 3.3 i Lema 3.8 tenim que

$$\left| \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} \right| = \frac{1}{q_{2n} q_{2n-1}} \leq \frac{1}{2n(2n-1)} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Per tant, $\xi_1 = \xi_2 =: x$ i la fracció $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ convergeix a x. □

De manera anàloga a la unicitat que teníem amb les fraccions contínues finites, també la tenim amb les fraccions contínues infinites. Aquesta unicitat per a les infinites es pot deduir directament del següent lema.

Lema 5.3. *Si $x = [a_0; a_1, \ldots]$, llavors $a_0 = [x]$ i $a_n = [a'_n]$ $(n \geq 0)$ (recordem que $[x]$ i $[a'_n]$ denoten la part entera de x i a'_n, respectivament).*

Demostració. Recordem que $a'_n = [a_n; a_{n+1}, \ldots]$ és l'n-èsim quocient complet de la fracció contínua $x = [a_0; a_1, \ldots]$. Aleshores,

$$\begin{aligned} a'_n &= \lim_{N \to \infty} [a_n; a_{n+1}, \ldots, a_N] \\ &= a_n + \lim_{N \to \infty} \frac{1}{[a_{n+1}, \ldots, a_N]} \\ &= a_n + \frac{1}{a'_{n+1}}. \end{aligned}$$

En particular,

$$x = a'_0 = a_0 + \frac{1}{a'_1}.$$

També

$$a'_n > a_n, \quad a'_{n+1} > a_{n+1} > 0, \quad 0 < \frac{1}{a'_{n+1}} < 1;$$

per tant, $a_n = [a'_n]$. □

Proposició 5.4. *Dues fraccions contínues infinites que convergeixen al mateix valor són idèntiques.*

Demostració. Notem que pel Lema 5.3 el primer terme de totes dues fraccions contínues és simplement la part entera del valor. Aleshores, podem veure per inducció que a_n és la part entera de a'_n i, per tant, ha de ser el mateix en les dues expressions de fraccions contínues infinites. En conseqüència, les dues fraccions contínues infinites han de ser idèntiques. □

Observem ara que si x és un nombre irracional, aleshores l'algorisme de la fracció contínua de la Secció 4.1 no pot terminar. Per tant, aquest defineix una seqüència infinita d'enters

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

i, com abans, tenim que $x = [a_0; a'_1] = [a_0; a_1, a'_2] = \ldots = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, a'_{n+1}]$, on $a'_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{a'_{n+2}} > a_{n+1}$.

Per l'Observació 4.5,

$$x = \frac{a'_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a'_{n+1}q_n + q_{n-1}}$$

i, conseqüentment,

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}}{q_n(a'_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{q_n(a'_{n+1}q_n + q_{n-1})}.$$

Aleshores

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_nq_{n+1}} \leq \frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Per tant,

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_n \ldots],$$

i l'algorisme ens condueix a la fracció contínua amb valor x i és única per la Proposició 5.4.

En conclusió, obtenim el següent teorema.

Teorema 5.5. *Cada nombre irracional pot ser expressat de forma única com una fracció contínua infinita.*

En conseqüència, podem establir una correspondència bijectiva entre les fraccions contínues i els nombres reals (excepte per l'ambigüitat del Lema 4.4 en el cas dels racionals). Si el nombre real és racional, llavors la seva fracció contínua serà finita, mentre que si és irracional, serà infinita.

6 La qualitat de les convergents

Sigui ara x un nombre real arbitrari. Les convergents de la fracció contínua de x proporcionen aproximacions molt precises del nombre real en qüestió. En particular, són la millor aproximació racional del nombre x d'entre totes les fraccions amb denominador menor o igual que el de la convergent. És a dir, si considerem qualsevol convergent de la fracció contínua d'un nombre real i prenem totes les fraccions amb denominador menor o igual que el denominador de la convergent que hem triat, aleshores aquesta convergent és una millor aproximació racional que qualsevol de les altres fraccions.

L'objectiu d'aquesta secció és estudiar la qualitat de l'aproximació de les convergents.

Lema 6.1. *Tenim que*

$$q_n x - p_n = \frac{(-1)^n \delta_n}{q_{n+1}}$$

per a $\delta_n \in (0,1)$ *tal que* δ_n/q_{n+1} *és una funció decreixent per* n. *(Si* x *és un nombre racional, aleshores el resultat és vàlid per* $1 \leq n \leq N-2$, *i* $\delta_{N-1} = 1$*).*

Demostració. Tenim que

$$x = \frac{a'_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a'_{n+1} q_n + q_{n-1}},$$

per tant,

$$\begin{aligned} x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{a'_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a'_{n+1} q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{-(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1})}{q_n (a'_{n+1} q_n + q_{n+1})} = \frac{(-1)^n}{q_n (a'_{n+1} q_n + q_{n-1})}. \end{aligned}$$

Aleshores,

$$\delta_n = \frac{q_{n+1}}{a'_{n+1} q_n + q_{n-1}} = \frac{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}{a'_{n+1} q_n + q_{n-1}}.$$

D'aquesta manera veiem que $0 < \delta_n < 1$ excepte quan $a_{n+1} = a'_{n+1}$. Veiem ara que δ_n/q_{n+1} decreix per n. Com que $a'_n = 1 + \frac{1}{a'_{n+1}}$ tenim que

$$\begin{aligned} \frac{\delta_n}{q_{n+1}} &= \frac{1}{a'_{n+1} q_n + q_{n-1}} \\ &\geq \frac{1}{(a_{n+1}+1) q_n + q_{n-1}} = \frac{1}{q_{n+1} + q_n} \\ &\geq \frac{1}{a_{n-2} q_{n+1} + q_n} = \frac{1}{q_{n+2}} \\ &\geq \frac{\delta_{n+1}}{q_{n+2}}. \end{aligned}$$

Notem que l'última desigualtat és una igualtat només quan $a_{n+1} = a'_{n+1}$, és a dir, quan x és un nombre racional i $n = N-1$. □

Lema 6.2. *L'error de la* n*-èsima convergent de la fracció contínua d'un nombre real* x *està acotat per*

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - x \right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Demostració. Demostrarem el resultat per inducció sobre n. En primer lloc, notem que $p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n$. Per $n = 1$, tenim que $p_0 = a_0, q_0 = 1, p_1 = a_0 a_1 + 1, q_1 = a_1$, per tant,

$p_0a_1 - p_1a_0 = -1$. Per $n > 1$, utilitzant la Proposició 3.2 tenim que

$$\begin{aligned} p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} &= p_{n-1}(q_{n-2} + a_nq_{n-1}) - (p_{n-2} + a_np_{n-1})q_{n-1} \\ &= p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} \\ &= -(p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2}) \\ &= -(-1)^{n-1} = (-1)^n. \end{aligned}$$

Com que x es troba entre

$$\frac{p_{n-2} + a_np_{n-1}}{q_{n-2} + a_nq_{n-1}} \quad \text{i} \quad \frac{p_{n-2} + (a_n+1)p_{n-1}}{q_{n-2} + (a_n+1)q_{n-1}},$$

o equivalentment, entre

$$\frac{p_n}{q_n} \quad \text{i} \quad \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}},$$

tenim que la distància entre aquests dos nombres és la següent:

$$\begin{aligned} \left|\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| &= \left|\frac{(p_n + p_{n-1})q_n - p_n(q_n + q_{n-1})}{(q_n + q_{n+1})q_n}\right| \\ &= \left|\frac{p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}}{q_n^2 + q_nq_{n-1}}\right| \\ &= \left|\frac{(-1)^n}{q_n^2 + q_nq_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_n^2}. \end{aligned}$$

□

Observació 6.3. *No és cert que si $\frac{p}{q}$ és un nombre racional tal que satisfà*

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| < \frac{1}{q^2},$$

aleshores $\frac{p}{q}$ és una convergent de la fracció contínua de x.

Com a exemple, prenem l'irracional π i el racional $\frac{4}{1}$. Com podem veure

$$\left|\frac{4}{1} - \pi\right| < \frac{1}{1^2},$$

tanmateix podem comprovar que $\frac{4}{1}$ no és una convergent de la fracció contínua de π.

No obstant, veiem el que enuncia el següent resultat del matemàtic alemany Hurwitz.

Lema 6.4. *De dues convergents consecutives qualssevol de x, almenys una d'elles satisfà la desigualtat*

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Demostració. Pel Lema 3.6 tenim que x es troba entre $\frac{p_n}{q_n}$ i $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Per tant,

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| + \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - x\right|.$$

Suposem que el lema és fals, aleshores:

$$\frac{1}{q_nq_{n+1}} = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

Per tant, $(q_{n+1} - q_n)^2 \leq 0$ per a tot $n > 0$ i arribem a contradicció. □

És més, com bé afirma el lema que citem a continuació, aquesta desigualtat és característica de les convergents d'una fracció contínua (per més detalls consultar la Secció 10.7 de [Hua12]).

Lema 6.5 ([Hua12], Thm. 172)**.** *Si un nombre racional p/q satisfà*

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| < \frac{1}{2q^2},$$

aleshores es tracta d'una convergent de la fracció contínua de x.

De fet, la idea principal dels lemes anteriors és que les convergents de la fracció contínua de x proporcionen aproximacions molt precises del nombre real en qüestió. En particular, el següent teorema demostra que les convergents $\frac{p_n}{q_n}$ de la fracció contínua de x són efectivament les millors aproximacions racionals d'aquest nombre.

Teorema 6.6. *Si $n > 1$, $0 < q \leq q_n$, i $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$, aleshores*

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| < \left|\frac{p}{q} - x\right|.$$

Demostració. El teorema és equivalent a demostrar que si $|qx - p| < |q_n x - p_n|$, aleshores $q > q_n$ per a $n > 1$. Suposem que $|qx - p| < |q_n x - p_n|$ i $q \leq q_n$. Tenim que $q < q_{n+1}$ per a $n > 1$. Considerem ara el següent sistema d'equacions:

$$\alpha p_n + \beta p_{n+1} = p$$

$$\alpha q_n + \beta q_{n+1} = q$$

Observem que $p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = (-1)^n \neq 0$. Per tant, les dues equacions tenen solucions enteres α i β.

Si $\beta = 0$ llavors $p = \alpha p_n$ i $q = \alpha q_n$. Com que $\alpha \neq 0$ aleshores

$$|qx - p| = |\alpha q_n x - \alpha p_n| =\geq |q_n x - p_n|$$

que és una contradicció.

Si $\alpha = 0$ llavors $q = \beta q_n$, i com que $\beta \neq 0$ aleshores contradiu que $q \leq q_n$.

Per tant, α i β són no nuls. Veiem ara que α i β tenen signe oposat.

$$0 < q = \alpha q_n + \beta q_{n+1} < q_{n+1}$$

Per una banda, α i β no poden ser ambdós < 0 ja que $q > 0$. Per una altra, α i β no poden ser ambdós > 0 ja que sinó $q > q_{n+1}$. Notem que $q_n x - p_n$ i $q_{n+1} x - p_{n+1}$ tenen signes oposats. Per tant, $\alpha(q_n x - p_n)$ i $\beta(q_{n+1} x - p_{n+1})$ tenen el mateix signe. Per tant,

$$qx - p = \alpha(q_n x - p_n) + \beta(q_{n+1} x - p_{n+1})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |qx - p| &= |\alpha(q_n x - p_n) + \beta(q_{n+1} x - p_{n+1})| \\ &= |\alpha(q_n x - p_n)| + |\beta(q_{n+1} x - p_{n+1})| \\ &> |\alpha(q_n x - p_n)| \\ &\geq |q_n x - p_n| \end{aligned}$$

i arribem a contradicció. □

7 Fraccions contínues periòdiques

Les fraccions contínues periòdiques són un tipus especial de fraccions contínues infinites en què un nombre o un grup de nombres es repeteix indefinidament. D'una banda, la periodicitat de la fracció contínua pot ser eventual o pura, és a dir, la repetició pot començar des d'un principi o a partir d'un cert punt en el seu desenvolupament. Per una altra, aquesta repetició periòdica pot ser simple o composta, depenent de la longitud del patró que es repeteix.

Els següents apartats basats principalment en la referència [C.D63] estan enfocats a estudiar les propietats i els comportaments específics de les fraccions contínues eventualment periòdiques i de les fraccions contínues purament periòdiques.

7.1 Fraccions contínues eventualment periòdiques

L'objectiu principal d'aquest apartat és demostrar que les fraccions contínues eventualment periòdiques corresponen a nombres irracionals tals que són solució d'alguna equació quadràtica de coeficients enters.

Abans però, hem de descriure com són aquest tipus de fraccions contínues infinites.

Definició 7.1 (Fracció contínua eventualment periòdica)**.** *Diem que una fracció contínua és eventualment periòdica si*

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots] = [a_0; a_1, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}, \ldots, a_l}]\,,$$

és a dir, la fracció contínua comença amb un pre-període $a_0, \ldots, a_k$ i després segueix amb un període $a_{k+1}, \ldots, a_l$ el qual es repeteix indefinidament.

Exemple 7.2. *Tenim que*

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots] = [1; \overline{2}] \text{ és eventualment periòdica amb repetició simple.}$$

$$\sqrt{19} = \left[4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}\right] \text{ és eventualment periòdica amb repetició composta.}$$

A continuació, repassem la definició de nombres irracionals quadràtics.

Definició 7.3 (Irracional quadràtic)**.** *Un irracional quadràtic és un nombre irracional que és una arrel de l'equació quadràtica*

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad a \neq 0.$$

De fet, recordem que aquest tipus d'irracionals es poden expressar com es mostra en el següent lema.

Lema 7.4. *Un nombre és un irracional quadràtic si i només si pot ser expressat de la següent forma*

$$\frac{P + \sqrt{Q}}{R},$$

on $P, Q, R \in \mathbb{Z}, R \neq 0$ i Q és positiu i no és un quadrat perfecte.

Demostració. Suposem que x és un irracional quadràtic. Aleshores x és una arrel de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ on $a, b, c \in \mathbb{Z}$ i $a \neq 0$. Recordem la fórmula quadràtica

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

on $-b, b^2-4ac$ i $2a$ són enters i $2a \neq 0$ ja que $a \neq 0$. Si $b^2-4ac=0 \Rightarrow x=\frac{-b}{2a} \in \mathbb{Q}$ que és una contradicció. Si $b^2-4ac<0 \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ que també és una contradicció. Per tant, només pot passar que $b^2-4ac>0$. Ara, si b^2-4ac és un quadrat perfecte aleshores $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \in \mathbb{Q}$ que és de nou una contradicció. En conclusió, b^2-4ac no és un quadrat perfecte.

Contràriament, suposem que $x=\frac{p+\sqrt{q}}{r}$ on $p,q,r \in \mathbb{Z}, r \neq 0$ i $q>0$ i no és un quadrat perfecte. Llavors,

$$rx-p=\sqrt{q},$$
$$(rx-p)^2=q,$$
$$r^2x^2-2rpx+(p^2-q)=0.$$

És a dir, obtenim una equació quadràtica amb coeficients enters i $r^2 \neq 0$ ja que $r \neq 0$. En conseqüència, x és un irracional quadràtic. □

Amb aquests conceptes, ja disposem dels elements necessaris per demostrar el resultat principal de l'apartat. La prova del resultat l'hem dividit en dues parts. En primer lloc, demostrem que les fraccions contínues periòdiques representen irracionals quadràtics i, posteriorment, provem la implicació contrària. De fet, el resultat obtingut és més conegut com *Teorema de Lagrange*.

Comencem amb la implicació més simple.

Lema 7.5. *Una fracció contínua periòdica correspon a un irracional quadràtic.*

Demostració. Suposem que a'_L és el L-èsim quocient complet de la fracció contínua periòdica x. Aleshores,

$$a'_L=[a_L;a_{L+1},\ldots,a_{L+K-1},a_L,a_{L+1},\ldots]=[a_L;a_{L+1},\ldots,a_{L+K-1},a'_L]$$
$$\Longrightarrow a'_L=\frac{a'_Lp'+p''}{a'_Lq'+q''} \Longrightarrow q'a'^2_L+(q''-p')a'_L-p''=0 \tag{6}$$

on $\frac{p''}{q''}$ i $\frac{p'}{q'}$ són les dues últimes convergents de $[a_L;a_{L+1},\ldots,a_{L+K-1}]$. Tanmateix,

$$x=\frac{a'_Lp_{L-1}+p_{L-2}}{a'_Lq_{L-1}+q_{L-2}} \Longrightarrow a'_L=\frac{p_{L-2}-q_{L-2}x}{q_{L-1}x-p_{L-1}}.$$

Finalment, si substituïm a'_L a (6) i fem una sèrie de manipulacions algebraiques obtenim una equació de la forma $ax^2+bx+c=0$ amb coeficients enters. Per tant, com que x és irracional tenim que $b^2-4ac \neq 0$. □

Ara, el següent lema ens mostra la implicació contrària.

Lema 7.6. *Una fracció contínua que representa un irracional quadràtic és periòdica.*

Demostració. Suposem que x és un irracional quadràtic que satisfà

$$ax^2+bx+c=0, \quad a,b,c \in \mathbb{Z}, \quad a \neq 0 \tag{7}$$

i que pot ser representat per la fracció contínua

$$x=[a_0;a_1,\ldots].$$

Aleshores $\forall n>0$:

$$x=\frac{a'_np_{n-1}+p_{n-2}}{a'_nq_{n-1}+q_{n-2}},$$

on a'_n és l'-nèsim quocient complet de la fracció contínua. Si substituïm aquesta última expressió de x a (7) obtenim una equació que depèn de n:

$$A_n a'^2_n + B_n a'_n + C_n,$$

on

$$A_n = ap^2_{n-1} + bp_{n-1}q_{n-1} + cq^2_{n-1},$$
$$B_n = 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2},$$
$$C_n = ap^2_{n-2} + bp_{n-2}q_{n-2} + cq^2_{n-2} = A_{n-1}.$$

Notem que $A_n \neq 0\ \forall n > 0$ ja que si $ap^2_{n-1} + bp_{n-1}q_{n-1} + cq^2_{n-1} = 0$ aleshores

$$a\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^2 + b\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) + c = 0.$$

Per tant, l'equació té l'arrel racional $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ que és contradicció perquè x és irracional.

L'objectiu de la prova és elaborar uns càlculs que demostraran que A_n, B_n i C_n només poden prendre un nombre finit de valors.

Observem que $A_n \neq 0$ i $A_n y^2 + B_n y + C_n = 0$ és una equació tal que una de les arrels és a'_n. Fent una sèrie de càlculs obtenim que

$$B^2_n - 4A_nC_n = b^2 - 4ac. \tag{8}$$

Ara, pel Lema 6.1 tenim que

$$p_{n-1} = xq_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} A_n &= a\left(xq_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^2 + bq_{n-1}\left(xq_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right) + cq^2_{n-1} \\ &= (ax^2 + bx + c)q^2_{n-1} + 2ax\delta_{n-1} + a\frac{\delta^2_{n-1}}{q^2_{n-1}} + b\delta_{n-1} \\ &= 2ax\delta_{n-1} + a\frac{\delta^2_{n-1}}{q^2_{n-1}} + b\delta_{n-1}, \end{aligned}$$

i llavors

$$|A_n| < 2|ax| + |a| + |b|.$$

Com que $C_n = A_{n-1}$ aleshores

$$|C_n| < 2|ax| + |a| + |b|$$

Finalment per (8) notem que

$$\begin{aligned} B^2_n &\leq 4|A_nC_n| + |b^2 - 4ac| \\ &< 4(2|ax| + |a| + |b|)^2 + |b^2 - 4ac| \end{aligned}$$

En conseqüència, els valors absoluts de A_n, B_n i C_n són menors que uns nombres independentment de n. Per tant, hi ha un nombre finit de diferents triplets (A_n, B_n, C_n). Notem que podem considerar un triplet (A, B, C) tal que aparegui almenys tres cops, anomenem-lo:

$$(A_{n_1}, B_{n_1}, C_{n_1}), (A_{n_2}, B_{n_2}, C_{n_2}), (A_{n_3}, B_{n_3}, C_{n_3}).$$

Per tant, a'_{n_1}, a'_{n_2} i a'_{n_3} són totes tres arrels de $Ay^2 + By + c = 0$ i almenys dues d'elles han de ser iguals. Per exemple si $a'_{n_1} = a'_{n_2} \Longrightarrow a_{n_2} = a_{n_1}, a_{n_2+1} = a_{n_1+1}, \ldots$ i veiem que la fracció contínua és periòdica. □

En conclusió, obtenim el que es coneix com *Teorema de Lagrange.*

Teorema 7.7 (Teorema de Lagrange)**.** *Sigui $x \in \mathbb{R}$. La fracció contínua de x és eventualment periòdica si i només si x és un irracional quadràtic.*

7.2 Fraccions contínues purament periòdiques

Les fraccions contínues purament periòdiques són un tipus especial de fraccions contínues periòdiques. De manera intuïtiva, es tracta de fraccions que són periòdiques des d'un principi. A més, com veurem a continuació, qualsevol fracció contínua purament periòdica representa un irracional quadràtic d'un tipus especial anomenat irracional quadràtic reduït i, a la vegada, tot irracional quadràtic reduït representa una fracció contínua purament periòdica. Per tal de demostrar aquesta doble implicació, procedim a demostrar dos lemes de forma independent.

Comencem introduint les definicions d'aquests nous conceptes.

Definició 7.8 (Fracció contínua purament periòdica)**.** *Diem que una fracció contínua és purament periòdica si és de la forma*

$$[\overline{a_0; a_1, \ldots, a_n}],$$

on $a_0, \ldots, a_n$ és el període de la fracció contínua el qual es repeteix indefinidament.

Definició 7.9 (Irracional quadràtic reduït)**.** *Diem que α és un irracional quadràtic reduït si i només si $\alpha > 1$ i $-1 < \bar{\alpha} < 0$ on $\bar{\alpha}$ és el conjugat de α.*

El lema que ve a continuació el necessitarem posteriorment per a una de les implicacions.

Lema 7.10. *Si*

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n],$$

aleshores

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0] = \frac{p'_n}{q'_n}$$

i

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1] = \frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}},$$

on p'_n/q'_n i p'_{n-1}/q'_{n-1} representen, respectivament, la n-èsima i $(n-1)$-èsima convergent de la fracció contínua $[a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0]$.

Demostració. Sabem que $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$, aleshores

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}}.$$

Ara com que $p_{n-1} = a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3}$, tenim que

$$\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{1}{\frac{p_{n-2}}{p_{n-3}}}.$$

De manera semblant,

$$\frac{p_{n-2}}{p_{n-3}} = a_{n-2} + \frac{1}{\frac{p_{n-3}}{p_{n-4}}}$$

$$\ldots$$

$$\frac{p_2}{p_1} = a_2 + \frac{1}{\frac{p_1}{p_0}} = a_2 + \frac{1}{a_1}\frac{1}{+a_0}.$$

Per tant, veiem que resultat s'obté a partir d'aquestes equacions mitjançant successives substitucions. El resultat per a q_n/q_{n-1} es demostra de manera similar. □

Després d'això, ja podem demostrar que qualsevol fracció contínua purament periòdica representa un irracional quadràtic reduït.

Lema 7.11. *Si $\alpha = [\overline{a_0; a_1, \ldots, a_n}]$, aleshores α és un irracional quadràtic reduït. En particular, si $\beta = [\overline{a_n; a_{n-1}, , \ldots, a_0}]$, aleshores $\bar{\alpha} = -\frac{1}{\beta}$ és l'arrel conjugada de l'equació quadràtica que satisfà α tal que $-1 < \bar{\alpha} < 0$.*

Demostració. Suposem que $\alpha = [\overline{a_0; a_1, \ldots, a_n}]$ i veiem que α és un irracional quadràtic reduït. Observem que pel Lema 7.10 tenim que

$$p'_n = p_n, \quad p'_{n-1} = q_n, \tag{9}$$
$$q'_n = p_{n-1}, \quad q'_{n-1} = q_{n-1}. \tag{10}$$

Com que α és purament periòdic podem escriure'l en la forma

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 +} \cdots \frac{1}{+a_n} \frac{1}{+\alpha},$$

i, tenint en compte que a més

$$\alpha = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}},$$

on p_n/q_n i p_{n-1}/q_{n-1} estan definits, respectivament, com l'n-èsim i $(n-1)$-èsim convergents de $[\overline{a_0; a_1, \ldots, a_n}]$. L'equació anterior és equivalent a l'equació quadràtica

$$q_n \alpha^2 - (p_n - q_{n-1})\alpha - p_{n-1} = 0. \tag{11}$$

Revertint el període a α, obtenim que

$$\beta = a_n + \frac{1}{a_{n-1} +} \cdots \frac{1}{+a_0} \frac{1}{+\beta},$$

i de nou, veiem que

$$\beta = \frac{\beta p'_n + p'_{n-1}}{\beta q'_n + q'_{n-1}},$$

on p_n/q_n i p_{n-1}/q_{n-1} estan definits, respectivament, com l'n-èsim i $(n-1)$-èsim convergents de $[\overline{a_n; a_{n-1}, \ldots, a_0}]$. Utilitzant (9) i (10) podem substituir la segona expressió de β per

$$\beta = \frac{\beta p_n + q_n}{\beta p_{n-1} + q_{n-1}},$$

i en conseqüència β satisfà l'equació

$$p_{n-1}\beta^2 - (p_n - q_{n-1})\beta - q_n = 0,$$

que és equivalent a l'equació

$$q_n \left(-\frac{1}{\beta}\right)^2 - (p_n - q_{n-1}) \left(-\frac{1}{\beta}\right) - p_{n-1} = 0. \tag{12}$$

Ara, comparant les equacions (11) i (12), concloem que l'equació quadràtica

$$q_n x^2 - (p_n - q_{n-1})x - p_{n-1} = 0$$

té dues arrels. L'arrel $x_1 = \alpha$, i l'arrel $x_2 = -1/\beta$. Notem que β correspon a la fracció contínua purament periòdica $[\overline{a_n; a_{n-1}, \ldots, a_0}]$, on $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ són tots enters positius; per tant, obtenim que $\beta > 1, 0 < 1/\beta < 1$ i, conseqüentment, $-1 < -1/\beta < 0$. És a dir, l'arrel $\alpha' = -1/\beta$ es troba entre -1 i 0. □

Tot seguit, provem la implicació contrària. Abans però, citem el següent resultat que necessitarem per a la demostració.

Lema 7.12. *[C.D63, Section 4.4] Si α és un irracional quadràtic reduït, aleshores pot ser expressat com*

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_1},$$

on a_1 és el major enter menor que α i α_1 és un irracional quadràtic reduït associat a D.

Lema 7.13. *Si α és un irracional quadràtic reduït, aleshores la fracció contínua de α és purament periòdica.*

Demostració. Suposem ara que α és un irracional quadràtic reduït i veiem que la fracció contínua per α és purament periòdica. Primer estudiarem l'expansió de la fracció contínua de α i posteriorment demostrarem que aquesta és necessàriament periòdica pura.

En primer lloc, pel Lema 7.12 tenim que l'irracional quadràtic α pot ser expressat de la forma següent:

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{D}}{Q} = a_1 + \frac{1}{\alpha_1},$$

on a_1 és el major enter menor que α i $\alpha_1 = \frac{P_1+\sqrt{D}}{Q_1} > 1$ és un irracional quadràtic reduït associat a D. Observem que repetint el procés a α_1 obtenim:

$$\alpha_1 = \frac{P_1 + \sqrt{D}}{Q_1} = a_2 + \frac{1}{\alpha_2},$$

on a_2 és el major enter menor que α_1 i $\alpha_2 = \frac{P_2+\sqrt{D}}{Q_2} > 1$ és un irracional quadràtic reduït. D'aquesta manera, tenim que

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_1},$$
$$\alpha_1 = a_2 + \frac{1}{\alpha_2},$$

on $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ són quadràtics irracionals reduïts i $\alpha = a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{\alpha_2}}$.

Continuant aquest procés generem la següent sèrie d'equacions:

$$\alpha_0 = a_1 + \frac{1}{\alpha_1},$$
$$\alpha_1 = a_2 + \frac{1}{\alpha_2},$$
$$\dots$$
$$\alpha_{n-1} = a_n + \frac{1}{\alpha_n},$$
$$\dots$$

on $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ són tots quadràtics irracionals reduïts associats a D i on

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \dots \frac{1}{+a_n +} \dots$$

Donat que α és irracional aquest procés mai acaba i, per tant, estem generant una quantitat infinita de quadràtics irracionals reduïts $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$, tots ells associats a D. Per tant, en algun moment hem d'arribar a un irracional quadràtic reduït que ja hagi aparegut abans.

Suposem que en la seqüència

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \dots, \alpha_{l-1}, \alpha_l, \dots$$

tenim que $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}$ són tots diferents i que α_l és el primer tal que el seu valor ja ha aparegut anteriorment, per tant, $\alpha_l = \alpha_k$, $0 \leq k < l$. Aleshores, és possible demostrar que:

(i) Si $\alpha_k = \alpha_l \Rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_{l+1}, \alpha_{k+2} = \alpha_{l+2}, \ldots$

(ii) La successió $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ és purament periòdica.

D'una banda, per veure (i) recordem que:

$$\alpha_k = a_{k+1} + \frac{1}{\alpha_{k+1}} = \alpha_l = a_{l+1} + \frac{1}{\alpha_{l+1}}.$$

Com que a_{k+1} i a_{l+1} són els majors enters menors que $\alpha_k = \alpha_l$, podem concloure que $a_{k+1} = a_{l+1}$. Per tant, els inversos de α_{k+1} i α_{l+1} són iguals i, en conseqüència, $\alpha_{k+1} = \alpha_{l+1}$. Procedim de manera anàloga per $\alpha_{k+2} = \alpha_{l+2}, \alpha_{k+3} = \alpha_{l+3}, \ldots$

Per una altra, per demostrar (ii) hem de comprovar que si $\alpha_k = \alpha_l$ per $0 < k < l$, aleshores $\alpha_{k-1} = \alpha_{l-1}, \alpha_{k-2} = \alpha_{l-2}, \ldots, \alpha_0 = \alpha_{l-k}$. Utilitzarem els conjugats de α_k i α_l obtenint que $\overline{\alpha_k} = \overline{\alpha_l}$ i, per tant, $\beta_k = -\frac{1}{\overline{\alpha_k}} = -\frac{1}{\overline{\alpha_l}} = \beta_l$.

Si $k \neq 0$ tenim que:

$$\alpha_{k-1} = a_k + \frac{1}{\alpha_k} \quad \text{i} \quad \alpha_{l-1} = a_l + \frac{1}{\alpha_l};$$

prenent conjugats obtenim que:

$$\overline{\alpha_{k-1}} = a_k + \frac{1}{\overline{\alpha_k}} \quad \text{i} \quad \overline{\alpha_{l-1}} = a_l + \frac{1}{\overline{\alpha_l}}.$$

Per tant,

$$-\frac{1}{\overline{\alpha_k}} = a_k - \overline{\alpha_{k-1}} \quad \text{i} \quad -\frac{1}{\overline{\alpha_l}} = a_l - \overline{\alpha_{l-1}},$$

o el que és el mateix,

$$\beta_k = a_k + \frac{1}{\beta_{k-1}} \quad \text{i} \quad \beta_l = a_l + \frac{1}{\beta_{l-1}}. \tag{13}$$

Donat que α_{k-1} i α_{l-1} són reduïts tenim que

$$-1 < \overline{\alpha_{k-1}} < 0 \quad \text{i} \quad -1 < \overline{\alpha_{l-1}} < 0.$$

Per tant,

$$0 < -\overline{\alpha_{k-1}} = \frac{1}{\beta_{k-1}} < 1 \quad \text{i} \quad 0 < -\overline{\alpha_{l-1}} = \frac{1}{\beta_{l-1}} < 1.$$

Per tant, a_k i a_l en (13) són els majors enters menors que β_k i β_l, respectivament. Com que $\beta_k = \beta_l \Rightarrow a_k = a_l$. Per tant,

$$a_k + \frac{1}{\alpha_k} = a_l + \frac{1}{\alpha_l}.$$

Observem que l'esquerra d'aquesta equació és α_{k-1} i la dreta és α_{l-1}. Per tant, hem demostrat que $\alpha_k = \alpha_l$ implica que $\alpha_{k-1} = \alpha_{l-1}$.

Ara, si $k-1 \neq 0$, i.e., $\alpha_k \neq \alpha_0 = \alpha$, repetim l'argument k vegades per provar que efectivament $a_{k-2} = \alpha_{l-2}, a_{k-3} = \alpha_{l-3}$, etc., fins que arribem a α i obtinguem $\alpha_{k-k} = \alpha_0 = \alpha_{l-k} = \alpha_s$. D'aquesta manera,

$$\begin{aligned}
\alpha =& a_1 + \frac{1}{\alpha_1}, \\
\alpha_1 =& a_2 + \frac{1}{\alpha_2}, \\
& \ldots \\
\alpha_{s-2} =& a_{s-1} + \frac{1}{\alpha_{s-1}}, \\
\alpha_{s-1} =& a_s + \frac{1}{\alpha_s} = a_s + \frac{1}{\alpha},
\end{aligned}$$

on $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$ són tots diferents, $\alpha_s = \alpha$ i a partir d'aquest punt tots els α's es repeteixen. Com que per a cada $\alpha_k > 1$ existeix exactament un enter a_k més gran i menor que α_k, és evident que la seqüència $a_1, a_2, \ldots, a_s$ també es repetirà:

$$\alpha_s = a_{s+1} + \frac{1}{\alpha_{s+1}} = \alpha_0 = a_1 + \frac{1}{\alpha_1}.$$

Per tant, la fracció contínua per α té la forma següent:

$$\alpha = [\overline{a_1; a_2, \ldots, a_s}],$$

és a dir, es tracta d'una fracció contínua purament periòdica. □

Finalment, combinant el Lema 7.11 i Lema 7.13 arribem a la següent conclusió que caracteritza les fraccions contínues purament periòdiques.

Teorema 7.14. *Un irracional quadràticα és reduït si i només si*

$$\alpha = [\overline{a_0; a_1, \ldots, a_n}].$$

En particular, si

$$\beta = [\overline{a_n; a_{n-1}, , \ldots, a_0}],$$

aleshores $\bar{\alpha} = -\frac{1}{\beta}$ és l'arrel conjugada de l'equació quadràtica que satisfà α tal que $-1 < \bar{\alpha} < 0$.

7.3 La fracció contínua per $\sqrt{N}$

En aquest apartat estudiem la forma que té la fracció contínua de $\sqrt{N}$ amb $N > 0$ un enter que no és un quadrat perfecte. Observem que $\sqrt{N}$ és un irracional quadràtic, per tant, pel que hem vist anteriorment a la Secció 7.1 sabem que la seva fracció contínua haurà de ser eventualment periòdica. No obstant, com comprovarem tot seguit no és un irracional quadràtic reduït i, en conseqüència, pel punt 7.2 la seva expansió periòdica no pot ser pura.

Teorema 7.15. *Suposem que $N > 0$ és un enter que no és un quadrat perfecte, aleshores*

$$\sqrt{N} = \left[a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2a_0}\right],$$

on el període de la fracció contínua, excepte pel terme $2a_0$, és simètric (la part simètrica pot tenir un terme central).

Demostració. En primer lloc, notem que $\sqrt{N} > 1$, per tant, el seu conjugat $-\sqrt{N}$ no pot trobar-se entre -1 i 0. En conseqüència, $\sqrt{N}$ no és un irracional quadràtic reduït i la seva expansió

$$\sqrt{N} = a_0 + \frac{1}{a_1+} \cdots \frac{1}{+a_{n-1}} \frac{1}{+a_n+} \cdots \tag{14}$$

no pot ser purament periòdica. Per una altra banda, com que a_0 és l'enter més gran tal que és menor que $\sqrt{N}$, el nombre $\sqrt{N} + a_0 > 1$ i el seu conjugat $-\sqrt{N} + a_0$ sí que es troba entre -1 i 0. Per tant, $\sqrt{N} + a_0$ és un irracional quadràtic reduït. Sumant a_0 a banda i banda de (14) obtenim que

$$\sqrt{N} + a_0 = 2a_0 + \frac{1}{a_1} \frac{1}{+a_2+} \cdots$$

Observem que aquesta expressió ha de ser purament periòdica, per tant:

$$\alpha := \sqrt{N} + a_0 = 2a_0 + \frac{1}{a_1} \frac{1}{+a_{2+}} \cdots \frac{1}{+a_n} \frac{1}{+2a_0} \frac{1}{+a_1+} \cdots \tag{15}$$

Conseqüentment, l'expansió per $\sqrt{N}$ és la següent:

$$\begin{aligned}\sqrt{N} &= a_0 + \frac{1}{a_1}\frac{1}{+a_2+}\cdots\frac{1}{+a_n}\frac{1}{+2a_0}\frac{1}{+a_1+}\cdots \\ &= \left[a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_n, 2a_0}\right]\end{aligned} \tag{16}$$

on $a_1, a_2, \ldots, a_n, 2a_0$ és el període de la fracció contínua.

Veiem que efectivament aquest període és simètric. Recordem pel Teorema 7.14 de la Secció 7.2 que si $\overline{\alpha} := -\sqrt{N} + a_0$ és el conjugat de $\alpha := \sqrt{N} + a_0$, llavors l'expansió de $-\frac{1}{\overline{\alpha}}$ és la mateixa que la de α però amb el període revertit. Per tant, si revertim el període a (15) obtenim que:

$$-\frac{1}{\overline{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{N} - a_0} = a_n + \frac{1}{a_{n-1}+}\cdots\frac{1}{+a_1}\frac{1}{+2a_0+}\cdots \tag{17}$$

Per altra banda, podem obtenir l'expansió per $(\sqrt{N} - a_0)^{-1}$ fàcilment de (16), i extraient a_0 de les dues bandes de l'equació tenim que:

$$\sqrt{N} - a_0 = 0 + \frac{1}{a_1}\frac{1}{+a_2+}\cdots\frac{1}{+a_n}\frac{1}{+2a_0}\frac{1}{+a_1+}\cdots$$

Per tant,

$$\frac{1}{\sqrt{N} - a_0} = a_1 + \frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{+a_n}\frac{1}{+2a_0}\frac{1}{+a_1+}\cdots \tag{18}$$

No obstant, hem vist que les expansions de les fraccions contínues són úniques; per tant, comparant (17) i (18) concloem que:

$$a_n = a_1, \qquad a_{n-1} = a_2, \ldots, a_2 = a_{n-1}, \qquad a_1 = a_n.$$

En conseqüència, la fracció contínua per $\sqrt{N}$ necessàriament té la forma

$$\sqrt{N} = \left[a_0; \overline{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_3, a_2, a_1, 2a_0}\right].$$

□

8 La raó àuria

En aquesta secció parlem sobre el famós nombre conegut com a nombre auri, raó àuria, secció àuria o divina proporció. Expliquem per què és un nombre d'especial interès a través de les fraccions contínues i per què, tal com es detalla a [Num], se'l considera el "nombre més irracional".

Abans de parlar sobre aquest nombre, analitzem un dels nombres irracionals més famosos: el nombre π. Per la Secció 5 sabem que la fracció contínua d'aquest nombre és necessàriament infinita. A continuació, examinem els primers termes de la seva expansió:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, \ldots]$$

Recordem que les aproximacions racionals obtingudes trucant la fracció contínua del nombre s'anomenen les convergents. Per exemple, si ens aturem just abans de 15 obtenim la bona aproximació coneguda com $\pi \approx 22/7$. De la mateixa manera, si ens detenim just abans de 292 aconseguim una molt bona aproximació $\pi \approx 355/113 = 3.1215929\ldots$ Així doncs, notem que per a obtenir *bones* aproximacions racionals del nombre π hem hagut d'aturar-nos just abans d'un valor gran de a_n. Això es deu al fet que com més gran sigui el quocient parcial a_n, l'aproximació empitjora ja que s'afegeix una quantitat pràcticament negligible que es semblant a zero. D'aquesta manera, es desestima una quantitat (per petita que sigui) i l'aproximació és menys precisa.

Dit això, podríem preguntar-nos quin és el nombre tal que la seva fracció contínua infinita no conté cap nombre gran. És a dir, partint del nombre en qüestió x i considerant 1's tots els quocients parcials de la seva fracció contínua:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

Per a determinar aquest nombre x procedim de la següent manera:

$$x = 1 + \frac{1}{x} \Longleftrightarrow x^2 = x + 1 \Longleftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0 \Longleftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Longleftrightarrow$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

El quocient d'aquestes dues quantitats és un nombre irracional conegut com a nombre auri (entre d'altres denominacions) i designat habitualment per la lletra grega Φ o també ϕ.

Observem que al quocient anterior tenim dos signes:

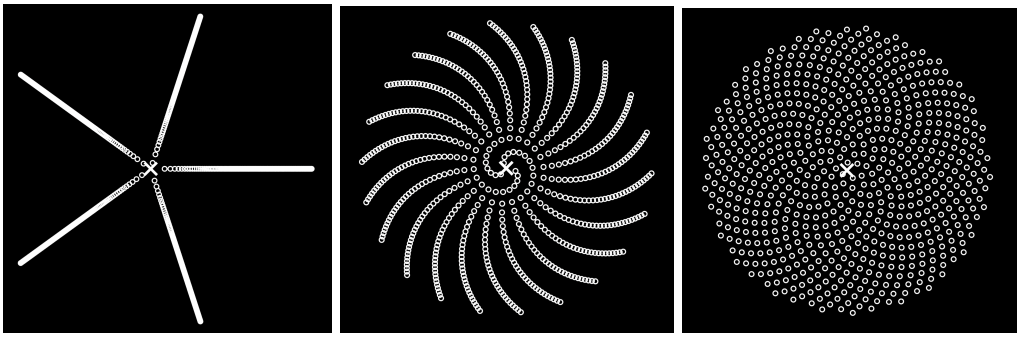
$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339\ldots \quad \text{i} \quad \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0.6180339\ldots$$

No obstant, es tracta de la mateixa expansió decimal però amb signes oposats. Aquest fet és degut a una de les propietats principals del nombre auri: si li restem una unitat al nombre auri, obtenim l'invers del nombre auri, és a dir:

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.6180339\ldots$$

La raó àuria es troba present en diversos fenòmens naturals, com a exemple, en la disposició de les llavors d'una flor. Per a observar aquest fenomen, fem servir un model matemàtic basat en flors per mostrar com el nombre auri s'ajusta millor al creixement de les llavors en una flor en comparació amb altres nombres racionals i irracionals. De fet, és per aquest motiu pel qual se'l considera el "nombre més irracional".

Aquest model matemàtic es basa en el següent procediment: comencem amb una llavor inicial i, mitjançant les fraccions de rotació, determinem l'angle al voltant de la llavor inicial per a la ubicació de la següent llavor de la flor. De fet, en cada pas apliquem una rotació segons la fracció de rotació corresponent, al mateix temps que ens allunyem una mica de la llavor inicial. Les imatges de la Figura 1 han estat generades utilitzant [Geo] i representen tres casos particulars d'aquestes fraccions de rotacions. Observem la Figura 1a, que correspon a un nombre racional, on es poden veure clarament raigs. Pel que fa a la figura del centre, quan utilitzem $1/\pi$, un nombre irracional, els raigs són menys evidents. Això ens porta a preguntar-nos si existeix un nombre irracional que millor eviti la formació de raigs. La resposta a això es troba quan considerem la fracció de rotació associada al nombre auri. Si observem la Figura 1c podem adonar-nos que aquesta disposició de les llavors en la flor és la que millor s'ajusta a la realitat ja que no hi ha raigs visibles. Així doncs, el nombre auri és considera el "nombre més irracional" donat que és el que millor aproxima el comportament de les llavors en una flor.



(a) Fracció de rotació $\frac{1}{5}$. (b) Fracció de rotació $\frac{1}{\pi}$ (c) Fracció de rotació Φ

Figura 1: Fraccions de rotacions [Geo].

9 L'escala musical des d'una perspectiva matemàtica

9.1 Introducció

Recordem que l'escala de do major està formada per les notes do, re, mi, fa, sol, la i si. Les distàncies entre aquestes notes es mesuren mitjançant intervals. L'interval fonamental és l'octava justa, que es produeix entre una nota i la següent amb el mateix nom, és a dir, de do a do'. Així doncs, en l'àmbit d'una octava, s'estableixen una sèrie d'intervals interns entre les notes. En l'escala de do major, les distàncies entre totes les notes consecutives són d'un to, excepte en els intervals mi-fa i si-do, on és d'un semitò.

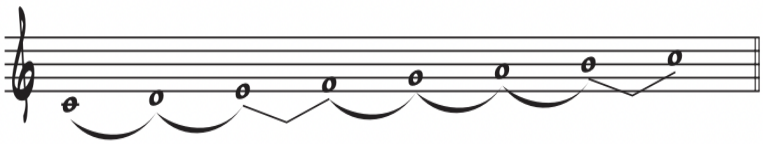


Figura 2: Escala de do major [dC].

En realitat, la distància entre dues notes qualssevol forma un continu, el qual implica que hi ha un nombre infinit de notes entre elles. Per a poder percebre tots els sons intermedis, és necessari realitzar un *glissando*, com ara utilitzant un violí. La possibilitat de tenir un nombre infinit de notes entre dues notes qualssevol representa un desafiament a l'hora d'afinar una escala ja que aquestes podrien tenir unes proporcions difícils de reproduir amb l'instrument.

Cada una de les formes de seleccionar els sons que utilitza la música constitueix un sistema d'afinació. Per tant, es tracta de seleccionar dins del conjunt de freqüències de tots els sons aquells amb els quals farem música i descartar la resta. Els sons admesos pel sistema d'afinació es denominaran sons afinats o notes musicals.

En aquesta secció, explorarem tres enfocaments diferents d'afinació en música: l'afinació pitagòrica, el temperament igual de 12 notes i, com a curiositat final, el temperament igual de 53 notes. Començarem analitzant l'afinació pitagòrica, un sistema que es basa en relacions matemàtiques i proporcions de freqüències. A continuació, estudiarem el temperament igual de 12 notes, que ofereix una distribució equidistant de les notes a l'escala i soluciona el principal inconvenient del sistema pitagòric. Per acabar, presentarem un tipus de temperament igual menys conegut el qual implica l'ús de 53 notes en una escala. Per aquesta part del treball ens hem basat principalment en les notes de [Ben06], [dC], [Ord22b], [Ord22a], [Her] i [Wik].

9.2 L'escala pitagòrica

Els conceptes de consonància i dissonància fan referència a la percepció de dos o més sons que es toquen simultàniament i a la relació entre les notes que els produeixen. La consonància fa referència a una harmonia agradable entre notes que es toquen a la vegada, mentre que la dissonància indica una tensió o falta d'acomodament entre elles. Es tracta de conceptes que han anat variant juntament amb els cànons, les regles i els estils per compondre música.

Pitàgores va descobrir una connexió entre les matemàtiques i la música que permetia relacionar la consonància dels sons amb els nombres racionals. Per dur a terme les seves investigacions musicals, va inventar el monocordi, un instrument d'una sola corda amb una caixa de ressonància, un canó o regla graduada i un pont variable, que permetia fer sonar diferents longituds de corda. Amb el monocordi podia mesurar les relacions numèriques entre les diferents longituds de corda que emetien sons consonants.

Figura 3: Pitàgores i el monocordi [Ben06].

Pitàgores va constatar que dos o més sons eren consonants quan les longituds de les cordes que els emetien es podien expressar com a quocient de dos nombres enters "petits": $1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$ En canvi, si la relació entre les longituds era un "nombre extrany" (per exemple 129/47 o 97/43), era més probable que aquests sons emesos junts resultessin dissonants. Evidentment, el fonament físic és bastant més complex, però els pitagòrics van aconseguir veure que dos sons eren consonants si la raó entre les seves longituds era senzilla, per exemple, 2:1 (octava), 3:2 (quinta), 4:3 (quarta) i 5:4 (tercera).

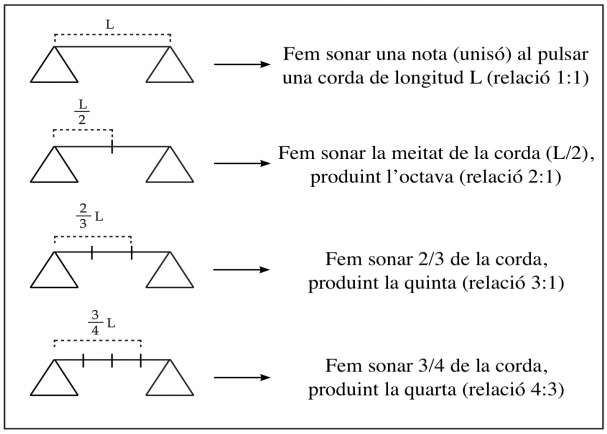


Figura 4: Proporcions en una corda [dC].

Una escala diatònica és una escala musical de set notes, separades per cinc tons i dos semitons. Segons la manera en què s'ordenen aquests intervals, s'obtenen diferents tipus d'escales, essent l'escala major i l'escala menor les principals. Per exemple, per construir l'escala diatònica de do major, s'adopta la següent progressió de quintes iniciant amb la nota fa i posteriorment reordenant-les:

$$fa - do - sol - re - la - mi - si.$$

Pitàgores va observar que el so d'una cinquena justa, amb una relació de freqüència de 3:2, és particularment consonant quan sona juntament amb la tònica, que és la nota que defineix la tonalitat de l'escala. A partir d'aquest fet va concloure que es podia construir una escala convincent utilitzant només les relacions 2:1 i 3:2. Aleshores, per exemple, si utilitzem la proporció 3:2 dues vegades, obtenim un interval amb ràtio 9:4 que és una mica més gran que una octava. Per tant, si reduïm una octava dividirem aquesta relació per la meitat, obtenint 9:8. Utilitzant la proporció 3:2 una altra vegada ens portarà a 27:16, i així successivament. A continuació, es mostra la taula de l'escala de do major amb les corresponents relacions de freqüència.

nota	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
ràtio	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1

Taula 1: Relacions de freqüència a l'escala de do major.

En aquest sistema, els intervals entre dues notes successives són un to major de ràtio 9:8 i un semitò menor de 256:243 o 2^8:3^5 en el cas dels intervals mi-fa i si-do. Observem que el semitò no és exactament la meitat d'un to en aquest sistema: dos semitons menors donen una relació de freqüència de 2^{16}:3^{10} en lloc de 9:8. No obstant, com bé els pitagòrics van veure aquests eren gairebé iguals:

$$2^{16}:3^{10} = 1.10985715\ldots$$

$$9:8 = 1.125$$

D'aquesta manera, seria natural pensar que l'encadenament successiu de quintes (relació 3:2) dona una freqüència que es correspon amb un encadenament d'octaves (relació 2:1). És a dir, si pugéssim 12 cinquenes i després baixéssim 7 octaves retornaríem exactament al punt de partida. No obstant, això no és completament cert com podem veure a continuació:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 \approx \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \Longleftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 2^7 \Longleftrightarrow \frac{3}{2} \approx 2^{7/12} \Longleftrightarrow log_2\left(\frac{3}{2}\right) \approx \frac{7}{12}.$$

Amb això volem dir que, per molt que avancem en el cicle de cinquenes mai arribarem a un nombre exacte d'octaves. En altres paraules, una potència de 1/2 no serà mai igual a una potència de 2/3. Les dotze quintes justes necessàries per completar el cicle no són equivalents a set octaves, sinó que les superen per una quantitat relativament petita. Aquesta diferència és coneguda com a coma pitagòrica i es pot calcular de forma numèrica:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 2^7 \Longrightarrow \frac{3^{12}}{2^{19}} = 1.013643265\ldots \text{ és la coma pitagòrica.}$$

Per tant, seria raonable considerar que per resoldre aquest conflicte de la coma pitagòrica el que estem buscant són dos nombres enters positius, p i q, que satisfacin l'equació $\frac{3}{2} = 2^{p/q}$, on p representa el nombre de particions de l'escala i q fa referència al nombre de particions corresponent a una quinta. No obstant això, tal com es demostrarà de nou en el Lema 9.1 de la Secció 9.5, resoldre aquest problema matemàticament no és possible. Per tant, més endavant, explorarem altres maneres de solucionar-ho.

9.3 El cicle de quintes

A la secció anterior hem introduït l'inconvenient principal que hi ha en el sistema de l'afinació pitagòrica. El problema està en què encadenant quintes justes cap amunt o cap avall, no és possible tancar el cicle de quintes i això fa aparèixer el que es coneix com a coma pitagòrica.

La següent figura mostra que si, per exemple, anem en sentit horari una volta completa, aleshores ens porta de la nota C a una que denotem B♯. En canvi, anar en sentit contrari ens portaria a D♭♭. En el primer dels casos, veiem que es tracta d'una afinació amb una coma pitagòrica més alta, mentre que en el segon cas correspon a una coma pitagòrica més baixa. En conseqüència, el que obtenim és efectivament una espiral de quintes on cap de les notes que apareixen són iguals.

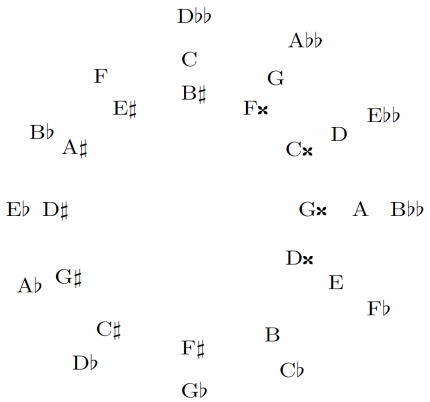


Figura 5: Espiral de quintes [Ben06].

Per a resoldre aquest problema que té el sistema pitagòric l'objectiu està en ser capaços d'afinar un cicle de quintes en una octava a través de la coma pitagòrica.

Per exemple, en el diagrama següent, si considerem el sentit horari, observem que en cada pas estem pujant una quinta (anàlogament podríem haver considerat el sentit antihorari i el que faríem seria baixar quintes). En aquest cas, la coma pitagòrica apareix com la diferència entre les notes A♭ i G♯:

$$\frac{6561/4096}{128/81} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288}$$

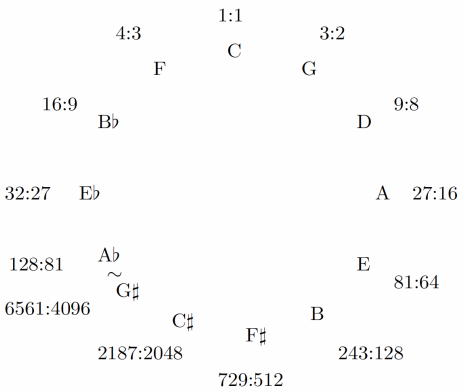


Figura 6: Coma pitagòrica en el cicle de quintes [Ben06].

Observem que el que hem fet és identificar A♭ i G♯ amb dos noms diferents per a referir-se a la mateixa nota (notes enharmòniques). D'aquesta manera, evitem el problema de l'espiral mencionat anteriorment i estem aproximant per tal de tancar l'espiral i així poder obtenir un cercle de quintes. No obstant això, aquesta aproximació té un cost, ja que tenim un interval que no és una quinta perfecta.

9.4 Cents

Ja hem vist que afegir intervals musicals correspon a multiplicar les relacions de freqüència. En altres paraules, la nostra percepció de la distància musical entre dues notes és logarítmica en freqüència ja que els logaritmes converteixen els productes en sumes.

Tot seguit explicarem el sistema dels cents, introduït per primer cop per Alexander Ellis cap a l'any 1875 per a mesurar els ràtios de freqüència. Aquest és el sistema més utilitzat en la literatura moderna. Es tracta d'una escala logarítmica en la qual hi ha 1200 cents a l'octava.

D'una banda, per a convertir una freqüència de ràtio de r:1 a cents, el valor en cents es calcula de la següent manera:

$$1200 \log_2(r) = 1200 \ln(r)/ \ln(2).$$

Per una altra, per a convertir un interval de n cents a una freqüència de ràtio la fórmula és:

$$2^{\frac{n}{1200}} : 1.$$

La mesura en cents és útil per veure de forma directa si una relació de freqüències (és a dir, un interval) d'un determinat temperament o afinació s'allunya molt o no de l'interval just desitjable.

Tot seguit, veiem en termes del sistema dels cents com s'expressa la coma pitagòrica:

$$1200 \ln(128 : 81)/ \ln(2) \approx 792.1799965,$$

$$1200 \ln(6561 : 4096)/ \ln(2) \approx 815.6400069,$$

on 128:81 i 6561:4096 corresponen a les notes A♭ i G♯, respectivament. Per tant, la coma pitagòrica que és la diferència entre aquestes dues notes resulta ser:

$$815.6400069 - 792.1799965 \approx 23.4600104 \text{ cents}.$$

9.5 Temperaments

Com ja hem vist en seccions anteriors, el sistema pitagòric presenta l'inconvenient principal que és l'espiral infinita de quintes que es pot estendre tant cap amunt com cap avall. No obstant això, per solucionar aquest problema, es pot recórrer a l'ús del temperament. El temperament implica ajustar lleugerament l'afinació d'alguns intervals amb l'objectiu d'obtenir avantatges harmònics com eliminar dissonàncies intenses o tancar el cicle de quintes.

Hi ha diferents tipus de temperaments musicals utilitzats en la música. Els temperaments més comuns són els iguals i els irregulars, tots dos desenvolupats al llarg de la història per abordar les limitacions i avantatges harmònics de l'afinació. Cada temperament té les seves pròpies característiques i aplicacions específiques en la música. En particular, el temperament igual és un temperament musical en el qual cada parell de notes adjacents té una freqüència d'idèntica proporció. En aquest treball, ens centrarem solament en l'estudi d'un tipus de temperament igual: el temperament igual de 12 notes. No obstant això, existeixen altres divisions de l'octava en intervals iguals que s'han utilitzat per a afinacions experimentals però que no descriurem en aquest treball. Algunes d'aquestes divisions inclouen la de 19, 24, 31, 43 i 53 divisions per octava. A la Secció 9.6 es pot trobar una breu descripció de la divisió de 53 notes.

Dit això, l'escala que resulta prenent tots els dotze semitons amb la mateixa freqüència de ràtio s'anomena escala de 12 notes d'igual temperament. Com que una octava té un ràtio de 2:1, els ràtios per a aquest tipus d'escala per a tots els semitons és de $2^{\frac{1}{12}}$:1 i per als tons de $2^{\frac{1}{6}}$:1. En termes de cents tenim que cada to complet a l'escala moderna igualment temperada equival a 200 cents i cada semitò correspon a 100 cents.

$$r^{12} = 2 \Longrightarrow r = \sqrt[12]{2} \Longrightarrow 1.0594631\ldots = 100 \text{ cents}$$

La següent taula ens mostra l'escala de 12 notes d'igual temperament amb les relacions de freqüència i cents corresponents.

nota	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
ràtio	1:1	$2^{\frac{1}{6}}$:1	$2^{\frac{1}{3}}$:1	$2^{\frac{5}{12}}$:1	$2^{\frac{7}{12}}$:1	$2^{\frac{3}{4}}$:1	$2^{\frac{11}{12}}$:1	2:1
cents	0.000	200.000	400.000	500.000	700.000	900.000	1100.000	1200.000

Taula 2: Escala de dotze notes igualment temperada.

La manera més intuïtiva per tancar l'espiral de quintes és dividir la coma pitagòrica en 12 parts iguals i restar-les a cada quinta. És a dir, obtindríem 12 semitons exactament iguals tot i que es perdrien totes les consonàncies justes, desafinant lleugerament cadascuna de les quintes (i, en conseqüència, cada nota de l'escala) i temperant totes les quintes de manera igual. Es tracta d'un sistema que fa coincidir les notes enharmòniques i reparteix la coma pitagòrica per igual entre les 12 quintes. Conseqüentment, cadascuna de les 12 parts iguals és un semitò temperat. En efecte, si comparem la Taula 1 i la Taula 2 observem que en aquesta segona totes les quintes es troben lleugerament per sota que en la primera. De fet, a aquest petit interval musical que apareix en el sistema temperat com a resultat de la comparació entre la quinta temperada i la quinta perfecta se'l coneix com a *schisma*.

D'aquesta manera, l'escala moderna temperada de 12 semitons està basada en el fet que $7/12 = 0.58\widehat{3}$ és una bona aproximació a $log_2(3/2) = 0.5849625007\ldots$ És a dir, si dividim l'octava en dotze semitons iguals, la distància de cinc semitons, o equivalentment 7/12, representa una bona aproximació del que seria una quinta justa, o sigui, $log_2(3/2)$.

Recordem que $log_2(3/2)$ no es pot expressar com un quocient de dos enters m i n, $n \neq 0$. O equivalentment, donat que $log_2(3/2)$ i $log_2(3)$ difereixen d'una unitat, $log_2(3)$ és un nombre irracional.

Lema 9.1. *El nombre $log_2(3)$ és irracional.*

Demostració. Suposem que $log_2(3) = m/n$ amb m i n enters positius. Aleshores $3 = 2^{m/n}$, és a dir, $3^n = 2^m$. Tanmateix, 3^n és sempre imparell mentre que 2^m és sempre parell (ja que $m > 0$). Per tant, contradicció. □

Estudiem com són els primers termes de la fracció contínua de $log_2(3/2)$:

$$log_2(3/2) = \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5+}\frac{1}{2+}\frac{1}{23+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\ldots \tag{19}$$

Ara, la seqüència de convergents d'aquesta:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \frac{389}{665}, \frac{9126}{15601}, \ldots \tag{20}$$

Pel que fa a les convergents tenim que els denominadors d'aquestes fraccions ens indiquen el nombre de divisions de l'octava, mentre que els numeradors fan referència al nombre de notes que hem d'agafar d'aquesta octava per a obtenir una quinta.

Així doncs, pel que hem vist prèviament quan hem estudiat les fraccions contínues podem observar que l'aproximació de 7/12 és bona. De fet, notem que la convergent 7/12 correspon al quocient parcial $a_4 = 2$, i com hem argumentat quan ens referíem al desenvolupament de la fracció contínua de π a la Secció 8, obtenim millors aproximacions just abans de denominadors grans de la fracció contínua. A més, segons el Teorema 6.6 de la Secció 6, aquesta és la millor aproximació racional amb denominador no superior a 12.

En conclusió, en el temperament igual de 12 notes es busca aproximar una quinta justa utilitzant el racional 7/12. En aquest sistema, tots els intervals, excepte l'octava, estan lleugerament desafinats ja que són una mica més curts que els intervals justos naturals. Això té com a resultat la repartició de la coma pitagòrica, evitant que hi hagi un interval que sigui significativament més dissonant que els altres.

9.6 L'escala de 53 notes

En apartats anteriors, hem explorat diverses formes de sistemes d'afinació i temperaments. Especialment, hem dedicat atenció a l'estudi de l'escala pitagòrica i l'escala d'igual temperament de 12 notes. No obstant això, en el que es refereix a l'igual temperament, com ja s'ha mencionat a la Secció 9.5, s'han utilitzat altres divisions de l'octava en intervals iguals per a afinacions experimentals, cadascuna amb les seves pròpies avantatges i desavantatges. En aquesta secció, examinem un cas en concret que a més podem explicar matemàticament amb fraccions contínues.

En primer lloc, ens fixem en la seqüència de convergents de la fracció contínua de $\log_2(3/2)$ que es mostra a l'equació (20). Podem observar que hi ha dos punts clars on podem detenir-nos i obtenir una bona aproximació de $\log_2(3/2)$: 31/53 i 389/665. Això es deu al fet que, si analitzem la seva expansió com a fracció contínua a l'equació (19), veiem que aquests denominadors corresponen a punts just abans d'arribar a coeficients grans de la fracció contínua. Com ja vam discutir en la Secció 8 quan tractàvem l'expansió de la fracció contínua infinita de π, com més gran és el coeficient a_n, l'aproximació empitjora, ja que es descarta una quantitat significativa i la precisió disminueix.

En particular, l'interès teòric de la divisió de l'escala de 53 tons igualment temperats té origen en temps antics. El teòric de música Jing Fang (78 aC-37 aC) va observar que una sèrie de 53 quintes justes ($\left(\frac{3}{2}\right)^{53}$) és molt a prop de les 31 octaves (2^{31}). Aquesta observació va ser posteriorment realitzada pel matemàtic i músic Nicholas Mercator (1620–1687), qui va calcular amb precisió el valor numèric conegut com a coma de Mercator:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{53} \approx 2^{31} \Longrightarrow \frac{3^{53}}{2^{84}} = 1.002090314\ldots \text{ és la coma de Mercator.}$$

Recordem que el valor numèric de la coma pitagòrica és aproximadament 1.013643265. Si la comparem amb la coma de Mercator, podem observar que aquesta última és més petita. Això té com a conseqüència una millora en el problema del cicle de quintes descrit a la Secció 9.3.

A més, l'any 1876, Robert Bosanquet va crear un "harmonium de teclat generalitzat" amb cinquanta-tres notes per octava (veure la Figura 7). També, és interessant destacar que l'escala de 53 notes era l'estàndard a la música de l'Imperi Otomà (1299-1923). D'aquesta manera, podem observar que el nombre 53 té un llarg historial i que, de fet, la seva adopció es basa en l'observació de la bona aproximació entre les 31 octaves i les 53 quintes, més que en l'aplicació de fraccions contínues. En altres paraules, la divisió de l'escala en 53 notes és més una observació teòrica fonamentada en evidències empíriques, i les fraccions contínues donen suport a aquesta idea.

Observem que després del 53, el següent bon denominador en l'expansió de la fracció contínua de $\log_2(3/2)$ és 665. L'avantatge principal que s'obté en passar a una escala de 665 tons igualment temperada és una aproximació notablement bona de la quinta justa. No obstant això, l'inconvenient ara és que els tons adjacents estan tan a prop l'un de l'altre que gairebé no es poden distingir entre ells.

Figura 7: Bosanquet's harmonium [Lib].

Referències

[Ben06] Dave Benson. *Music: A mathematical offering.* Cambridge University Press, 2006.

[C.D63] C.D.Olds. *Continued fractions.* Random House, 1963.

[dC] Alfonso del Corral. *Apéndice: Afinaciones y temperamentos* . URL: https://dokumen.tips/documents/apendice-afinaciones-y-temperamentos-alfonso-del-corral-apendice-afinaciones.html?page=4.

[Geo] Geogebra. Flower (dark). URL: https://www.geogebra.org/m/YThycjQK#material/T8eKzDu5.

[Her] Víctor Arenzana Hernández. *Aproximación matemática a la escala musical pitagórica.* URL: https://vicmat.com/aproximacion-matematica-la-escala-musical-pitagorica/.

[Hua12] L-K Hua. *Introduction to number theory.* Springer Science & Business Media, 2012.

[HW79] G.H. Hardy and E.M. Wrigth. *An introduction to the theory of numbers.* Oxford university press, 1979.

[Kri16] Gautam Gopal Krishnan. *Continued fractions.* Cornell University, 2016.

[Lib] Science Society Picture Library. *Keyboard of Bosanquet's enharmonic harmonium, c 1876.* URL: https://www.scienceandsociety.co.uk/.

[Num] Numberphile. *The Golden Ratio (why it is so irrational).* URL: https://www.youtube.com/watch?v=sj8Sg8qnjOg.

[Ord22a] Javier Luque Ordóñez. *Música y Matemáticas. El temperamento igual y otros nuevos temperamentos.* Revista Digital de ACTA, 2022.

[Ord22b] Javier Luque Ordóñez. *Música y Matemáticas. Sistemas de afinación.* Revista Digital de ACTA, 2022.

[Wik] Wikipedia. *53 equal temperament.* URL: https://en.wikipedia.org/wiki/53_equal_temperament.