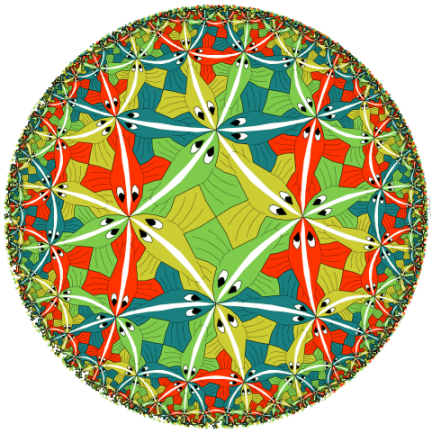


Visualització i axiomàtica del pla hiperbòlic

Treball Final de Grau

Andrea Gonzalez Gifra
Sota la tutorització de Dr. Roberto Rubió

Grau de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Juny 2022

Agraïments

A la Berta, en Damià, en Marc, les Maries i la Marta;
a aquelles persones qui lluny m'han tingut present;
i a aquelles qui a prop han fet que tot fos més lleuger;
gràcies, de tot cor.

Resum

A partir del context històric de la descoberta de la geometria hiperbòlica, i motivats per donar resposta a l'artista M.C. Escher, presentem l'axiomàtica de Hilbert. Al *Capítol 2*, veurem de forma exhaustiva la consistència de la geometria hiperbòlica en el pla a partir del model del semiplà de Poincaré. Per fer-ho, utilitzarem el concepte d'inversió, relacionant-lo amb la simetria hiperbòlica. Al *Capítol 3*, introduirem les transformacions de Möbius, presentarem la mètrica hiperbòlica i la relacionarem amb la raó doble. Al *Capítol 4*, ens traslladarem al disc de Poincaré, protagonista de sèrie *Circle Limit* d'Escher. Finalment, al *Capítol 5*, coneixerem les tessel·lacions regulars del pla de l'artista; fent una breu introducció al cas euclidià i citant correspondències que justifiquen la motivació del mateix a aconseguir representar el concepte d'infinit.

Abstract

Based on the historical context of the discovery of hyperbolic geometry, and motivated to respond to the artist M.C. Escher, we introduce Hilbert's axiomatics. In the *Chapter 2*, we will look at the consistency of the hyperbolic geometry in the plane using the Poincaré half-plane model. In order to do this, we will use the concept of inversion, relating it to hyperbolic symmetry. In *Chapter 3*, we will get familiarized with the Möbius transformations, introduce the hyperbolic metric and relate it to the cross ratio. In the *Chapter 4*, we will move to Poincaré disk model, protagonist of the series *Circle Limit* of Escher. Finally, in *Chapter 5*, we will show the regular tessellations of the plane by the artist; making a brief introduction to the Euclidean case and citing correspondences that justify its motivation to be able to represent the concept of infinity.

Índex

1 Introducció

1.1 Motivació

Diferents obres de M.C. Escher han estat presents al llarg de la meva experiència acadèmica. Obres com *Hand with Reflecting Sphere* o el conjunt de tessel·lacions del pla amb animals fantàstics ja m'havien captivat quan, a segon curs del grau, Jaume Aguadé va presentar-nos la geometria hiperbòlica a partir de l'obra *Circle Limit III*.

La curiositat augmentà en conèixer que el conjunt d'obres de *Circle Limit* de l'artista es van elaborar a partir d'una figura d'una publicació matemàtica, i que, amb l'anàlisi pròpia de l'artista, lluny dels resultats sobre la geometria hiperbòlica que la comunitat matemàtica havia elaborat fins aleshores, aquest va ser capaç d'elaborar obres artístiques utilitzant tessel·lacions hiperbòliques.

Nogensmenys, al *Capítol 4* veurem que M.C. Escher va buscar respostes en correspondències amb Coexeter; tot i això, aquestes no van resultar ser una vàlua per l'artista. El present treball també busca donar una resposta a Escher; aproximant-nos al pla hiperbòlic des dels fonaments teòrics més purs i fins a definir la relació d'aquests amb el disc de Poincaré: el qual l'artista havia considerat com a candidat per representar el concepte d'infinit.

1.2 El context històric

La cèlebre ciutat d'Alexandria fou fundada al 331 a.C. pel conqueridor Alexandre Magne a territori egipci. És reconeguda per ser llar referent de la ciència, la cultura i l'art. El Rei Ptolomeu I Sòter pren el càrrec de governador després de la mort d'Alexandre i impulsa iniciatives per reclutar els millors acadèmics de l'era. El coneixement matemàtic elaborat durant el període hel·lenístic té una importància rellevant i reconeguda en la història de les matemàtiques. Com indica Netz [19], la matemàtica grega reflecteix la importància de la persuasió: alimentada pel caràcter discursiu de les demostracions, l'ús de fórmules i les referències a objectes visuals.

Euclides, actiu al voltant de 330 a.C. a Alexandria, fou una de les figures il·lustres i influents en la creació de la matemàtica com a coneixement sistemàtic basat en principis. Recordem la definició

d'aquest mètode, conegut com a mètode axiomàtic, que fa Aguadé [1]. Sigui un conjunt d'objectes i relacions entre aquests, aleshores definim

Definició 1.1 (Axioma). *Els axiomes són un conjunt relativament petit de normes d'obligat compliment per als nostres objectes i les nostres relacions.*

Definició 1.2 (Mètode axiomàtic). *A partir d'un petit nombre d'axiomes, es van deduint, de manera encadenada, sistemàtica, lògica i elegant, els diversos resultats de la geometria clàssica sobre rectes, angles, triangles, àrees, volums i políedres i també sobre nombres primers, ternes pitagòriques, nombre irracionals, etc.*

L'obra més famosa d'Euclides és els *Elements*. Considerar una traducció de l'obra original no és possible. Hernández [10], proposa com una bona aproximació a l'original l'edició en llatí de J.L. Heiberg i H.Menge (*Euclidis opera omnia*, 1883-1916). Els *Elements* es constitueix en 13 llibres, 5 postulats, 5 nocions comunes, 130 definicions i 465 proposicions. Euclides confecciona l'obra sense una noció de moviment. Per tant, les demostracions de les diferents proposicions i teoremes esquiven el desplaçament dels diferents objectes de la geometria. Exposem una traducció pròpia de la versió de Heiber i Menge dels postulats:

(I). Postuli el traçar una línia recta des d'un punt qualsevol fins a un punt qualsevol.
(II). I el perllongar contínuament una recta finita en línia recta.
(III). I el descriure una circumferència amb qualsevol centre i distància.
(IV). I el ser tots els angles rectes iguals entre si.
(V). I que si una recta en incidir sobre dues rectes fa que els angles interns del mateix costat (siguin) menors que dues rectes, les dues rectes perllongades indefinidament es trobaran al costat en què hi ha els (angles) menors que dues rectes.

I de les nocions comunes:

(1). Les coses iguals a una mateixa cosa són també iguals entre si.
(2). I si s'afegeixen coses iguals a coses iguals, els totals són iguals.
(3). I si de coses iguals es treuen coses iguals, les restes són iguals.
(4). I les coses que poden superposar-se entre si són iguals entre si.
(5). I el tot és major que la part.

L'obra d'Euclides, a part del valor històric i com a referent en el mètode axiomàtic, obre dos fronts, que veurem a continuació, i que seran desencadenants de pròxims treballs i discussions matemàtiques al llarg dels anys.

De l'axioma de les paral·leles a la geometria no euclidiana

Observem que si considerem els postulats d'Euclides com a abstraccions de la realitat física, neix una clara diferència entre els quatre primers i l'últim. Els dos primers estan relacionats amb la

mateixa experiència amb un regle i el tercer, amb un compàs. El quart, potser d'una forma no tan evident, es pot relacionar amb la mateixa experiència amb el transportador d'angles. El cinquè és aquell que no podem comprovar empíricament. Ja que el concepte de paral·lelisme està implícitament relacionat amb el concepte d'infinit. A més, Euclides va desenvolupar una quantitat considerable d'obra abans d'utilitzar el postulat V: l'axioma de les paral·leles.

D'aquí neix el *problema del postulat de les paral·leles*: la voluntat de demostrar el cinquè axioma a partir dels altres quatre. Observem que la prova d'aquest no alterava els resultats lògics que se'n deriven al llarg de tota l'obra. La insatisfacció de la comunitat matemàtica derivada de la sospita que el postulat V era en realitat un Teorema va conduir a descobrir un nou concepte de geometria, així com a determinar-ne enunciats equivalents.

D'aquesta manera, no és un cas aïllat l'intent de, entre els segles III a.C. i XIX, demostrar el cinquè postulat d'Euclides. En aquest període, matemàtics com Khayyam, Saccheri, Lambert provaren resultats que conduïren a la geometria no-euclidiana. Es reconeix importància en el treball que va fer Saccheri.

Aquest va aplicar la reducció a l'absurd per provar el cinquè postulat. L'objecte d'estudi, com Khayyam, foren quadrilàters $ABCD$ tals que els costats AB i DC eren congruents i els angles en els vèrtexs A i D eren rectes. Sota aquestes hipòtesis hi ha tres casos possibles:

- Els angles B i C són rectes, o bé
- són obtusos, o bé
- són aguts.

En les condicions de la geometria absoluta, on es verifiquen els quatre primers postulats d'Euclides, es pot provar que la suma dels angles interiors del quadrilàter de la hipòtesi és menor o igual a quatre rectes. D'aquesta manera, el segon cas no és possible. Ara bé, Saccheri no va trobar una contradicció en suposar com a cert el tercer cas. Va anomenar a aquest últim cas com *hipòtesis de l'angle agut* i va provar molts resultats de la geometria no-euclidiana a partir d'aquesta. En particular, va veure que sota la hipòtesi de l'angle agut i donada una recta l i un punt B que no pertany a l, existeixen dues rectes incidents en B tals que divideixen el feix de rectes incidents en B en dos conjunts: les rectes que tallen l i les rectes que no tallen l.

La fe a prendre com a cert el cinquè postulat el va portar a autodestruir els resultats que havia obtingut. Argumentant *"sota la hipòtesi de l'angle agut es poden construir dues rectes paral·leles diferents que tindrien una perpendicular comuna en el punt infinit, contrari a la naturalesa de la línia recta"*. Aquesta reticència en acceptar l'existència d'una altra geometria no és un cas particular de Saccheri, els treballs posteriors de Lobatxevski van ser molt criticats i poc reconeguts.

El concepte de la geometria no-euclidiana va emergir entre els segles XVIII i XIX. Els protagonistes d'aquesta descoberta són Gauss, Lobatxevski i Bolyai. Hernández et al. [11], afirmen que Saccheri va ensopegar amb la geometria hiperbòlica, Gauss la va descobrir i Bolyai i Lobatxevski en van determinar la seva consistència, de forma independent. Aquests últims van determinar que el cinquè postulat no podia deduir-se de la resta d'axiomes d'Euclides, ja que es podia fer una construcció

lògica amb una proposició contradictòria i desenvolupar una nova geometria coherent amb el nou grup d'axiomes.

El buit en la rigorositat matemàtica

Tot i la importància matemàtica i històrica dels *Elements*, Euclides assumeix relacions d'ordre i congruència en demostracions dels diferents teoremes que semblen obvies des d'un punt de vista gràfic; així, per exemple, assumeix l'existència d'interseccions en certes figures formades per rectes i circumferències. Davant d'un creixent rigor matemàtic, aquestes omissions foren notades i criticades.

A finals del segle XIX, Pash (*Vorlesungen über nuere Geometrie*, 1882), Peano (*I principi di goemetria, logicamente esposti*, 1889) i Pieri (*Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo*, 1899) desenvolupen quasi paral·lelament treballs on el mètode axiomàtic compleix el creixent rigor matemàtic. Ara bé, el mètode axiomàtic més acceptat fou el treball de David Hilbert (*Grundlagen der Geometrie*, 1899). Hilbert caracteritza la seva obra per la seva formalitat. Defineix tres tipus d'elements, que anomena punts, rectes i plans; però incideix en el fet que no importa la naturalesa dels objectes, sinó les relacions que s'estableixen entre ells. Els axiomes de Hilbert estan dividits en cinc grups diferents: incidència, ordre, congruència, continuïtat i paral·lelisme.

El sistema axiomàtic de Hilbert no diferencia nocions comunes i postulats i no inclou definicions. Inclou el conflictiu *axioma de les paral·leles*, però en la versió equivalent popularitzada per John Playfair:

(V.). Per un punt donat que no està a una recta donada només es pot traçar una única línia recta paral·lela.

1.3 L'axiomàtica de Hilbert

Gorgorió [8], referint-se al concepte de visualització, manifesta la necessitat d'introduir la definició dels conceptes que s'utilitzaran abans d'un estudi; indicant que són moltes vegades les que es coneix un concepte sota diferents noms o s'utilitza un nom per referir-se a més d'un concepte diferent. Per aquest motiu, es considera important desenvolupar aquesta secció.

Suposem que tenim dos conjunts d'objectes: el de punts i el de rectes. Entre els elements d'aquests conjunts, i entre subconjunts d'aquests, existeixen les relacions d'incidència, de congruència i d'ordre. Així, considerarem per la seva pròpia naturalesa les relacions de *pertànyer a*, *estar entre* i *ésser congruent* [20]. Passem a recordar els enunciats dels diferents grups d'axiomes. La redacció d'aquest capítol correspon a la lectura de [9, 1, 6]. Aquest contingut es veu al curs de *Geometria lineal* de la titulació.

1.3.1 Axiomes d'incidència

Axioma d'incidència 1.1. Siguin A i B dos punts diferents, existeix una única recta l tal que A pertany a l i B pertany a l.

Direm que la recta l és la recta determinada per A i B i utilitzarem la notació $\overleftrightarrow{AB}$.

Axioma d'incidència 1.2. Tota recta l té com a mínim dos punts.

Axioma d'incidència 1.3. Existeixen tres punts diferents A, B i C amb la propietat que A no pertany a la recta determinada per B i C.

1.3.2 Axiomes d'ordre

Notació. Per expressar que el punt B està entre el punt A i C utilitzarem la notació $A * B * C$.

Axioma d'ordre 1.1. Si $A * B * C$, aleshores A, B i C són tres punts diferents que estan sobre una mateixa recta i es compleix $C * B * A$.

Axioma d'ordre 1.2. Donats dos punts diferents B i D, existeixen tres punts A, C i E tal que $A * B * D$, $B * C * D$ i $B * D * E$.

Axioma d'ordre 1.3. Si A, B i C són tres punts diferents sobre la mateixa recta, aleshores n'hi ha com a màxim un que està entre els altres dos.

Definició 1.3 (Segment). *Siguin dos punts diferents A i B i l la recta que determinen. Anomenem segment d'extrems A i B o simplement segment AB, equivalentment segment BA, el conjunt de punts de la recta l format per A, B i tots els punts que estan entre A i B.*

Teorema 1.1. *Tota recta l divideix els punts del pla que no són incidents en ella en dues classes no buides, que anomenem semiplans. Dos punts qualssevol A i B de classes diferents determinen un segment AB que talla la recta l. Dos punts qualssevol C i D de la mateixa classe determinen un segment CD que no talla la recta l.*

Demostració. Vegeu pàgina 45 de [6].

Axioma d'ordre 1.4 (Axioma de Pasch). Siguin A, B i C tres punts diferents no-alineats i l una recta que no passa per cap d'ells i talla el segment AB. Aleshores, l talla el segment AC o talla el segment BC.

1.3.3 Axiomes de congruència

Definició 1.4 (Semirecta). *Siguin O, A i B tres punts d'una recta l. Si O no està entre A i B direm que A i B estan sobre l a un mateix costat del punt O. El conjunt de punts de la recta l que estan al mateix costat de O que el punt A es diu semirecta d'origen O determinada per A.*

Definició 1.5 (Angle). *Anomenem angle un parell de semirectes h i k amb el mateix origen O que no pertanyen a una mateixa recta. El denotem per $\widehat{hk}$, equivalentment $\widehat{kh}$, o bé per $\widehat{AOB}$, equivalentment $\widehat{BOA}$, amb A i B punts de h i k respectivament. Les semirectes h i k s'anomenen costats de l'angle i O el seu vèrtex.*

La relació de congruència està definida entre parelles de segments i d'angles.

Notació. Per expressar que dos objectes són congruents utilitzem la simbologia $\cong$.

Axioma de congruència 1.1. Si A i B són punts diferents i A' és un punt qualsevol, aleshores per qualsevol semirecta r amb punt origen A' existeix un únic punt B' sobre r tal que B'$\neq$A' i AB$\cong$A'B'.

Axioma de congruència 1.2. Si $AB \cong CD$ i $AB \cong EF$, aleshores $CD \cong EF$.

Axioma de congruència 1.3. Si $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ i $BC \cong B'C'$, aleshores $AC \cong A'C'$.

Axioma de congruència 1.4. Sigui un angle $\widehat{kh}$, una semirecta k' i un semiplà H dels dos que defineix k', existeix un únic angle $\widehat{k'h'}$ tal que $\widehat{kh} \cong \widehat{k'h'}$ i h' és semirecta que pertany al semiplà H.

Axioma de congruència 1.5. Siguin A, B i C tres punts no-alineats, A', B' i C' tres punts més tampoc alineats. Si $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ i $\widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'}$, aleshores $\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$ i $\widehat{ACB} \cong \widehat{A'C'B'}$.

1.3.4 Axiomes de continuïtat

Axioma de continuïtat 1.1 (Arquimedes). Si CD és un segment qualsevol, A un punt qualsevol i r una semirecta qualsevol amb origen A, aleshores per tot punt $B \neq A$ incident a r existeix un nombre natural n tal que si col·loquem CD n vegades sobre r començant en A, trobem un punt E tal que $n\dot{C}D \cong AE$ i es compleix que o bé $B = E$ o bé B està entre A i E.

Axioma de continuïtat 1.2 (Principi de la continuïtat C-C). Si una circumferència γ passa per un punt interior i per un punt exterior a una altra circumferència γ', aleshores les dues circumferències es tallen en dos punts.

Aquests dos teoremes es poden resumir en un únic axioma:

Axioma de continuïtat 1.3 (Principi de Dedekind). Si expressem el conjunt de punts d'una recta com a unió disjunta de dos conjunts de manera que cap punt de cada conjunt estigui entre dos punts de l'altre conjunt, aleshores hi ha un únic punt O de la recta tal que un dels conjunts és la semirecta de vèrtex O.

1.3.5 Axioma de paral·lelisme

Axioma de paral·lelalisme 1.1. Per tota recta l i per tot punt A no incident en l existeix com a màxim una recta m incident a A tal que m es paral·lela a l.

1.4 Geometries

Sabem que si s'accepten diferents conjunts d'axiomes s'obtenen diferents geometries. En el cas de la geometria en el pla, definim els casos principals:

Definició 1.6 (Pla de Hilbert). *Un pla de Hilbert és una geometria on es compleixen els axiomes d'incidència, ordre i congruència.*

Definició 1.7 (Pla pitagòric). *Un pla pitagòric és un pla de Hilbert on, a més, es compleix l'axioma de les paral·leles.*

Definició 1.8 (Pla euclidià). *Un pla euclidià és un pla pitagòric on, a més, es compleix l'axioma* ***Principi de la continuïtat C-C****.*

2 El pla hiperbòlic: consistència

Considerem ara un cas particular de geometria absoluta. Suposem que es compleixen els axiomes d'incidència, d'ordre, de congruència i de continuïtat. Si pensem en la negació de l'axioma del paral·lelisme, tenim l'axioma de Lobatxevski.

Axioma de paral·lelalisme 2.1 (Axioma de Lobatxevski). Existeixen una recta l i un punt A que no pertany a la recta tals que per A passen almenys dues rectes que no tallen l.

Acceptem aquest últim axioma, juntament amb els del pla de Hilbert, i definim aquest cas com el pla hiperbòlic. Per donar un model de la geometria euclidiana que representi el pla hiperbòlic, cal definir la noció de punt, recta, pertànyer a, estar entre i congruència de segments i d'angles. Utilitzant aquest model, i prenent com a certa la consistència de la geometria euclidiana, veurem la consistència del pla hiperbòlic.

2.1 Model del semiplà de Poincaré

Els **punts** del pla hiperbòlic en el model del semiplà de Poincaré són els elements del conjunt

$$\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

Les **rectes** del pla hiperbòlic en el model del semiplà de Poincaré són

- Les semirectes ordinàries de $\mathbb{R}^2$ de la forma $x = c \in \mathbb{R}$.
- Les semicircumferències euclidianes amb centre sobre la recta $y = 0$.

Per no fer distinció entre els diferents tipus de rectes hiperbòliques podem pensar les semirectes com a semicircumferències de radi infinit.

La relació de **pertànyer a** és la mateixa que hi ha a la geometria ordinària de $\mathbb{R}^2$. Veurem la relació d'**estar entre** a partir d'una bijecció entre la recta hiperbòlica i la recta real. Per definir la relació de **congruència de segments i d'angles** ens cal introduir el concepte d'inversió respecte d'una circumferència o una recta en el pla euclidià.

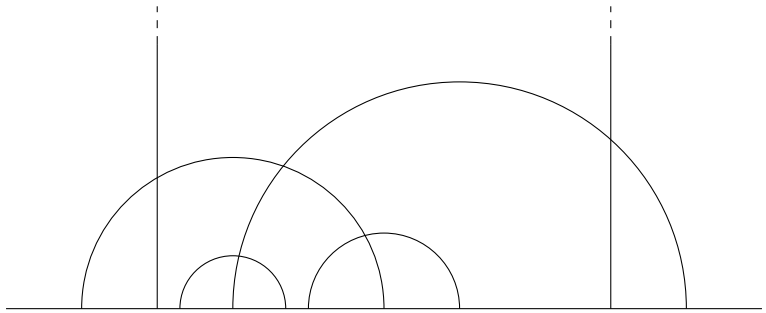


Figura 2.1: Exemple de visualització del pla hiperbòlic segons el model del semiplà de Poincaré.

2.2 La inversió

Per tal de veure la consistència del model del semiplà de Poincaré introduïm el concepte d'inversió respecte d'una circumferència i respecte d'una recta; ambdues euclidianes. Veurem com aquests conceptes es relacionen amb la congruència en el pla hiperbòlic. A més, recuperarem aquest contingut a la secció 4.0.2.

2.2.1 La inversió respecte d'una circumferència

Definició 2.1 (Raig). *El raig $\overrightarrow{AB}$ és el conjunt de punts sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$ tal que pertanyen al segment AB i els punts C sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$ tals que $A * B * C$.*

Observació. Per denotar la distància euclidiana entre dos punts A i B, i doncs la longitud euclidiana del segment AB, utilitzem $\overline{AB}$.

Definició 2.2 (Punt invers respecte una circumferència). *Sigui λ una circumferència de radi r i centre O. Per qualsevol punt $A \neq O$ definim el punt invers A' de A respecte λ com l'únic punt A' sobre el raig $\overrightarrow{OA}$ tal que $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$.*

Proposició 2.1. Es verifica:

(I). $A = A'$ si i només si A pertany a la circumferència d'inversió λ.
(II). Si A és un punt interior a γ, aleshores A' és exterior a λ. Si A és un punt exterior a λ, aleshores A' és interior a λ.
(III). $(A')' = A$.
(IV). La inversió de O, centre de la circumferència λ, respecte de la circumferència λ no està definida.

A partir d'aquest punt pensarem tot punt del pla euclidià com un nombre complex. Així, si les coordenades cartesianes del nostre punt A són (x, y), fem una correspondència entre aquest punt A i el nombre $z = x + yi$. Anem a buscar una expressió per l'aplicació invers d'un punt respecte

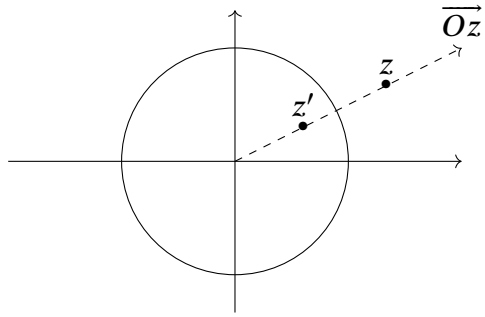


Figura 2.2: Inversió de z respecte la circumferència λ.

d'una circumferència en l'expressió complexa.

Sigui λ una circumferència amb centre O, origen de coordenades cartesianes, i radi r. Siguin z i z' inversos respecte de λ (Figura 2.2). Observem que podem expressar ambdós nombres en forma polar

$$z = |z|e^{i\alpha} \qquad z' = |z'|e^{i\alpha}$$

on θ és l'argument principal de z i z'. Prenent aquestes expressions de z i z' realitzem el producte

$$z' \cdot \overline{z} = |z|e^{i\theta} \cdot |z|e^{-i\theta} = |z||z'| = r^2.$$

D'aquí obtenim una expressió per la inversió respecte d'una circumferència centrada a l'origen de coordenades

$$z' = \frac{r^2}{\overline{z}} \tag{2.1}$$

Des d'aquest punt és fàcil obtenir una expressió per a la inversió respecte d'una circumferència centrada a un punt Q arbitrari i amb radi r. Si pensem en els eixos de coordenades amb centre Q, podem pensar qualsevol punt A amb coordenades w en aquest sistema d'eixos. Hem vist que el seu punt invers serà $w' = \frac{r^2}{\overline{w}}$. De manera que l'expressió del punt invers de A respecte els eixos de coordenades cartesianes és

$$z' = Q + w' = Q + \frac{r^2}{\overline{w}} = Q + \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{Q}} = \frac{Q\overline{z} - Q\overline{Q} + r^2}{\overline{z} - \overline{Q}} \tag{2.2}$$

Teorema 2.1. *La inversió d'una circumferència és una circumferència.*

Demostració. Sense pèrdua de generalitat, considerem la circumferència d'inversió λ_1 amb centre O i radi r. A partir de (2.1)

$$z' = r^2 \cdot \frac{1}{x - yi} = r^2 \cdot \frac{x + iy}{x^2 + y^2}$$

sabem que les coordenades de l'invers d'un punt A amb correspondència al nombre complex z' tindrà coordenades cartesianes

$$x' = r^2 \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad y' = r^2 \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Del punt (III) de la *Proposició* 2.1 segueix

$$x = r^2 \cdot \frac{x'}{x'^2 + y'^2} \qquad y = r^2 \cdot \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \tag{2.3}$$

Sense pèrdua de generalitat, considerem que el punt A pertany a una circumferència λ_2 d'equació

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \tag{2.4}$$

Substituïm a l'equació l'expressió de les coordenades definida a (2.3)

$$A\left[r^4 \cdot \frac{x'^2}{(x'^2 + y'^2)^2} + r^4 \cdot \frac{y'^2}{(x'^2 + y'^2)^2}\right] + B \cdot r^2 \cdot \frac{x'^2}{(x'^2 + y'^2)^2} + C \cdot r^2 \cdot \frac{y'^2}{(x'^2 + y'^2)^2} + D = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ar^4 + Br^2x' + Cr^2y' + D(x'^2 + y'^2) = 0$$

Resulta que les coordenades del punt invers de A' compleixen l'equació general de la circumferència.

2.2.2 La inversió respecte d'una recta

Definició 2.3 (Punt invers respecte una recta). *Sigui l una recta. Per qualsevol punt $A \notin l$ considerem la recta perpendicular s a l incident a A. Definim el punt invers A' de A respecte l com l'únic punt A' que pertany a la recta s i tal que A i A' equidisten de l.*

Observació. Aquest punt també es coneix com a punt simètric respecte una recta.

Considerem el punt A amb coordenades cartesianes (x, y) amb correspondència al nombre complex z. El seu punt invers respecte l'eix d'abscisses coincideix amb el conjugat de z. És a dir, $z' = x - iy = \overline{z}$. Suposem ara que tenim una recta l qualsevol que passa per l'origen de

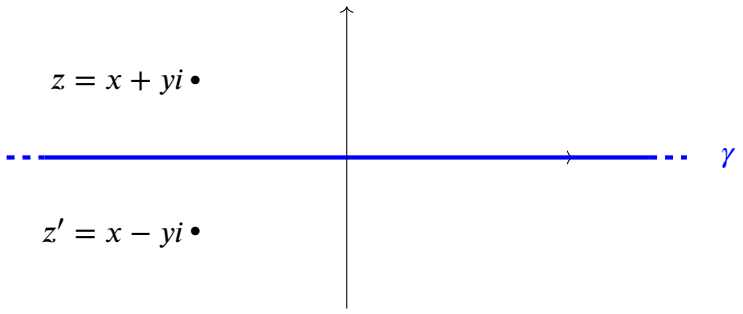


Figura 2.3: Inversió de z respecte la recta l.

coordenades, diferent de l'eix d'abscisses, i volem trobar el punt invers del punt A. Sigui α l'angle entre la recta l i el semieix positiu d'abscisses. Fem un gir sobre A i tots els punts de la recta l amb

centre de gir O i angle $-\alpha$. La recta l coincideix ara amb l'eix d'abscisses; així, l'invers de A és el conjugat. Revertim el gir inicial. El procediment descrit correspon a l'aplicació

$$z' = \overline{z \cdot e^{-\alpha i}} \cdot e^{\alpha i} = \overline{z} \cdot \overline{e^{-\alpha i}} \cdot e^{\alpha i} = \overline{z} \cdot e^{2\alpha i}$$

Finalment, si la recta l és arbitrària l'equació de la inversió és

$$z' = \overline{z} \cdot e^{2\alpha i} + w \tag{2.5}$$

amb $w \in \mathbb{C}$.

Podem reescriure l'equació general de les inversions com

$$z' = \frac{\alpha\overline{z} + \beta}{\gamma\overline{z} + \delta} \tag{2.6}$$

Observació. Observem que l'expressió obtinguda anteriorment correspon a

$$\alpha = Q; \qquad \beta = -Q\overline{Q} + r^2; \qquad \gamma = 1; \qquad \delta = -\overline{Q}$$

en el cas de la inversió respecte d'una circumferència i a

$$\alpha = e^{2\alpha i}; \qquad \beta = w; \qquad \gamma = 0; \qquad \delta = 1$$

en el cas de la inversió respecte d'una recta.

2.2.3 La inversió en el model del semiplà de Poincaré

Traslladem el concepte d'inversió respecte d'una circumferència i una recta al pla euclidià al model del semiplà de Poincaré presentat anteriorment. Farem inversions respecte rectes hiperbòliques.

- En el cas que la recta hiperbòlica és una semicircumferència euclidiana amb centre sobre la recta $y = 0$
$$\Delta := \beta\gamma - \alpha\delta = -Q\overline{Q} + r^2 + Q\overline{Q} = r^2 > 0$$
- En el cas que la recta hiperbòlica és una semirecta euclidiana de la forma $x = c$
$$\Delta := \beta\gamma - \alpha\delta = -e^{2\alpha i} = -(-1) = 1 > 0 \quad [1]$$

En ambdós casos es compleix

$$\Delta := \beta\gamma - \alpha\delta > 0 \tag{2.7}$$

[1] L'angle que formen aquestes rectes amb el semieix positiu de les x és $\alpha = \pi/2$ i $w = c$.

L'equació general de les inversions (2.6) en el model actual té $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Suposem que fem dues inversions successives respecte a rectes hiperbòliques arbitràries. Hem vist que particularment cada inversió tindrà l'expressió

$$z' = \frac{\alpha_1 \overline{z} + \beta_1}{\gamma_1 \overline{z} + \delta_1}$$

$$z'' = \frac{\alpha_2 \overline{z'} + \beta_2}{\gamma_2 \overline{z'} + \delta_2}$$

Si busquem una expressió de z'' respecte el punt inicial z tenim [6.1]:

$$z'' = \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\beta_2)z + (\beta_1\alpha_2 + \delta_1\beta_2)}{(\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\delta_2)z + (\beta_1\gamma_2 + \delta_1\delta_2)} \tag{2.8}$$

Si definim $\gamma = \alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\beta_2$, $\beta = \beta_1\alpha_2 + \delta_1\beta_2$, $\gamma = \alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\delta_2$ i $\delta = \beta_1\gamma_2 + \delta_1\delta_2$, resulta

$$z'' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{2.9}$$

De forma recursiva s'obté el següent resultat:

Proposició 2.2. Es verifica:

- El producte d'un nombre parell d'inversions té l'expressió (2.9).
- El producte d'un nombre senar d'inversions té l'expressió (2.6).

Lema 2.1. Sigui σ una composició d'inversions, aleshores es compleix (2.7).

Demostració. Veurem el resultat pel cas de dues inversions. De forma recursiva s'obté per les altres composicions de n inversions. Suposem que fem dues inversions amb

$$\Delta_1 := \alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 > 0; \qquad \Delta_2 := \alpha_2\delta_2 - \beta_2\gamma_2 > 0.$$

Hem vist que la composició d'aquestes dues aplicacions tindrà l'expressió (2.8) i es compleix (6.2):

$$\Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_2 > 0$$

Proposició 2.3. Les inversions transformen el semiplà euclidià superior en ell mateix.

Demostració. Suposem que tenim la correspondència d'un punt A en el nombre complex $z = x + yi$. Hem vist que la seva inversió respecte d'una recta hiperbòlica té l'expressió (2.6). Veurem que la part imaginària de l'equació de la inversió és estrictament positiva:

$$z' = \frac{\alpha\overline{z} + \beta}{\gamma\overline{z} + \delta} = \frac{\alpha(x - yi) + \beta}{\gamma(x - yi) + \delta} = \frac{\alpha x + \beta - \alpha yi}{\gamma x + \delta - \gamma yi} \cdot \frac{\gamma x + \delta + \gamma yi}{\gamma x + \delta + \gamma yi} = \frac{(\alpha x + \beta - \alpha yi)(\gamma x + \delta + \gamma yi)}{(\gamma x + \delta)^2 + (\gamma y)^2}$$

$$Im(z') = \frac{\beta\gamma y - \alpha\delta y}{(\gamma x + \delta)^2 + (\gamma y)^2} = \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)y}{(\gamma x + \delta)^2 + (\gamma y)^2} \tag{2.10}$$

De (2.10) segueix que el signe de $Im(z')$ depèn de $\beta\gamma - \alpha\delta$; estrictament positiu (2.7).

Teorema 2.2. *Sigui σ una aplicació producte d'un nombre parell d'inversions tal que deixa tres punts fixos en el pla. Aleshores, l'aplicació deixarà tots els punts del pla fixos. L'anomenem aplicació identitat.*

Demostració. Hem vist que l'aplicació tindrà l'expressió $\sigma(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$. Els punts fixos de l'aplicació compleixen $\varphi(z) = z$:

$$z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \Leftrightarrow \gamma z^2 + (\delta - \gamma)z - \beta = 0$$

Per hipòtesis l'equació té 3 solucions. Observem que només és possible si $\gamma = 0$, $\delta = \gamma$ i $\beta = 0$. D'aquesta manera $\sigma(z) = z$, l'aplicació identitat.

Teorema 2.3. *Sigui σ una aplicació producte d'un nombre imparell d'inversions tal que deixa tres punts fixos en el pla. Aleshores, l'aplicació correspon a la inversió respecte a la circumferència que passa pels punts fixos.*

Demostració. Anomenem φ la inversió respecte de la circumferència γ que passa pels punts fixos de σ. Si fem $\varphi(\sigma(z))$ tenim una aplicació producte d'un nombre parell d'inversions que deixa fixes tres punts. Aquests corresponen als mateixos punts fixos de σ ja que pertanyen γ. Per tant, pel teorema anterior, $\varphi(\sigma(z))$ és l'aplicació identitat i es compleix

$$\varphi(\sigma(z)) = z.$$

Hem vist que z i $\sigma(z)$ són inversos respecte γ.

2.2.4 Congruència en el model del semiplà de Poincaré

Definició 2.4 (Congruència de segments). *Un segment hiperbòlic AB és congruent al segment hiperbòlic $A'B'$ si existeix una successió d'inversions realitzades respecte rectes hiperbòliques tal que aplica l'arc de semicircumferència euclidià AB, equivalentment el segment hiperbòlic AB, a l'arc de semicircumferència euclidià $A'B'$, equivalentment al segment hiperbòlic $A'B'$.*

Definició 2.5 (Congruència d'angles). *Un angle hiperbòlic $\widehat{kh}$ és congruent a l'angle hiperbòlic $\widehat{k'h'}$ si existeix una successió d'inversions respecte a les rectes hiperbòliques tal que aplica els costats del primer angle sobre els costats del segon.*

2.2.5 La simetria en el model del semiplà de Poincaré

Sigui AB un arc de circumferència, i doncs un segment hiperbòlic. Sigui P, si existeix, el punt intersecció entre la recta $\overleftrightarrow{AB}$ i $y = 0$. Tracem la recta tangent l a AB que passa per P i definim C el punt tangent. Es compleix $PA \cdot PB = PC^2$.

Sigui γ la semicircumferència amb centre P i radi $\overline{PC}$. La inversió respecte γ aplica A a B i B a A.

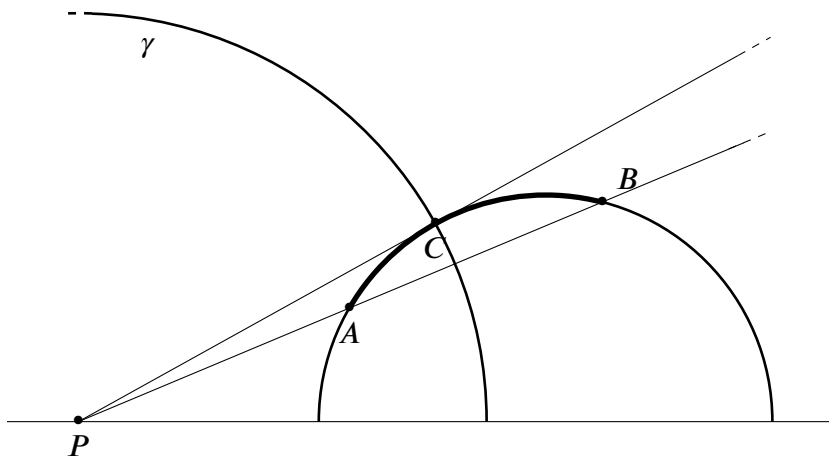


Figura 2.4: Construcció de congruència de segments.

El punt $C \in \gamma$, per tant, és fix. Així, l'arc AB s'aplica a ell mateix: AC s'aplica a BC i BC s'aplica a AC. Obtenim que AC i BC són segments hiperbòlics congruents i C és el punt mig hiperbòlic del segment hiperbòlic AB.

El segment hiperbòlic AB és ortogonal a la semicircumferència γ. Per tant, γ és la perpendicular en el punt mig hiperbòlic del segment hiperbòlic AB i A i B són simètrics hiperbòlics respecte γ.

Si no existeix el punt P, i doncs l és paral·lela a $y = 0$. Redefinim el punt P com el punt mig del segment AB i definim γ com a la semirecta que passa per M. El punt d'intersecció entre el segment hiperbòlic AB i γ és el punt mig M del segment hiperbòlic AB. Observem que aquest cas particular és una simetria euclidiana.

Observació. Utilitzarem el terme mediatriu hiperbòlica per designar les rectes hiperbòliques γ que hem construït en aquest apartat. Així, la mediatriu hiperbòlica d'un segment hiperbòlic AB és l'eix de simetria en el sentit hiperbòlic.

2.3 Consistència del model del semiplà de Poincaré

Davant d'una nova teoria matemàtica cal considerar la seva consistència; i doncs direm que un sistema d'axiomes és consistent quan a partir dels axiomes no es poden arribar a demostrar mai dues afirmacions contradictòries. Així, hem de veure que el model construït a partir dels objectes i relacions definits compleix els axiomes. Tota teoria deduïda d'aquests axiomes serà certa en aquest model.

Axiomes d'incidència

Per veure el primer axioma, prenem dos punts A i B. Si tenen la mateixa abscissa, la recta hiperbòlica que determinen és de la forma $x = c$. Si tenen diferent abscissa, construïm el segment

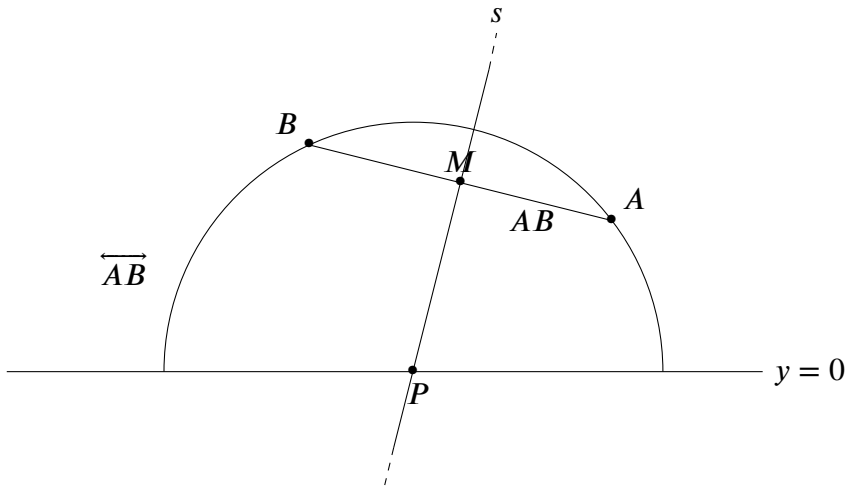


Figura 2.5: Construcció de la recta hiperbòlica que passa pels punts A i B.

euclidià AB i en determinem el punt mig M. Tracem la recta euclidiana s perpendicular a AB que passa per M. Aquesta talla la recta $y = 0$ en el punt P, que és el centre de la semicircumferència euclidiana, i doncs recta hiperbòlica $\overleftrightarrow{AB}$, que passa per A i B.

El segon axioma es veu de forma trivial. Finalment, comprovem que es compleix el tercer axioma. Si B i C tenen la mateixa abscissa, la recta euclidiana que passa per B i C és de la forma $x = c$. Prenem A un punt (x, y) amb $x \neq c$. Si considerem el cas que B i C tenen abscissa diferent. Considerem el segment euclidià BC i el seu punt mig M. Aquest punt no pertany a la recta hiperbòlica $\overleftrightarrow{BC}$ que passa per B i C.

Axiomes d'ordre

Per veure els tres primers axiomes definirem una bijecció entre les rectes hiperbòliques i la recta real $\mathbb{R}$ que conservi l'ordre euclidià i utilitzem el fet que la geometria euclidiana és consistent. Considerem dos casos, segons el tipus de recta hiperbòlica:

- La recta hiperbòlica és una semicircumferència euclidiana γ al semiplà euclidià superior. Si γ té centre $(a, 0)$, amb $a \in \mathbb{R}$, i radi r, podem parametritzar-la com:

  $$x = a + r\cos\beta$$
  $$y = r\sin\beta$$

  amb $\beta \in (0, \pi)$. Definim la funció bijectiva entre γ i $\mathbb{R}$

  $$f(x, y) = \tan\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right).$$

  Observem que

  $$f'(x, y) = \frac{1}{\cos^2\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)} > 0; \quad \lim_{\beta\to 0} f(x, y) = -\infty; \quad \lim_{\beta\to\pi} f(x, y) = +\infty$$

- La recta hiperbòlica és una semirecta euclidiana γ al semiplà euclidià superior. El punts d'aquesta recta són (c, y) amb $c \in \mathbb{R}$ fixat i $y \in (0, +\infty)$. Definim la funció bijectiva entre γ i $\mathbb{R}$
$$f(x, y) = \ln(y).$$
Observem que
$$f'(x, y) = \frac{1}{y} > 0; \quad \lim_{y \to 0} f(x, y) = -\infty; \quad \lim_{y \to +\infty} f(x, y) = +\infty$$

Finalment, provarem que es verifica l'axioma de Pasch. Observem que es compleix de forma intuïtiva:

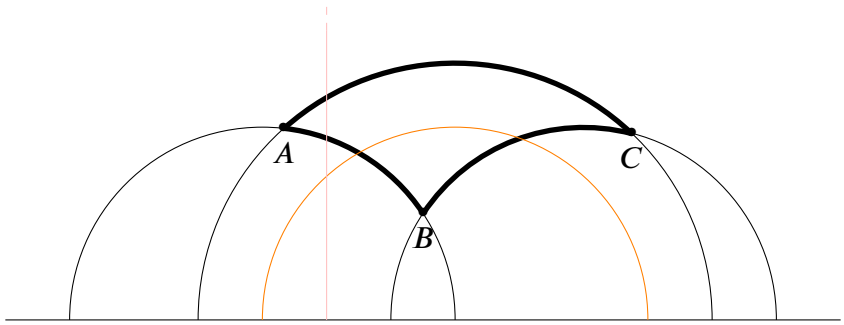


Figura 2.6: Hipòtesis de l'axioma de Pash.

Siguin A, B i C tres punts diferents no-alineats i l una recta que no passa per cap d'ells i talla el segment AB. Suposem que l talla AB en el punt P: $A * P * B$. Llavors, A i B estan en costats diferents de l. Tota recta determina dos semiplans (1.1); així, A pertany en un semiplà definit per l i B en l'altre. C està en un dels dos semiplans. Si C no està al mateix semiplà que A, aleshores AC talla l. En cas contrari, si C no està al mateix semiplà que B, aleshores BC talla l. l no pot tallar simultàniament ambdós segments AC i BC perquè A i B no estan al mateix costat de l.

Axiomes de congruència

Per facilitar la comprensió d'ara en avant utilitzarem els termes *recta i segment* per designar recta hiperbòlica i segment hiperbòlic respectivament. Si es vol fer referència al cas euclidià, es farà de forma explícita.

En primer lloc, veurem el primer axioma. Siguin A i B dos punts sobre la recta r i A' un punt sobre la recta r'. Fixem una de les dues semirectes que defineix A' sobre r' i l'anomenem s. Tracem la mediatriu m del segment AA' (Figura 2.7).

Construïm la recta $\overleftrightarrow{A'C}$, on C és l'invers de B respecte m. Sigui Q_1 un punt qualsevol incident en s, definim la circumferència hiperbòlica amb centre A' i radi $\overline{A'Q_1}$. Aquesta talla $\overleftrightarrow{A'C}$ en el punt Q_2 (Figura 2.8).

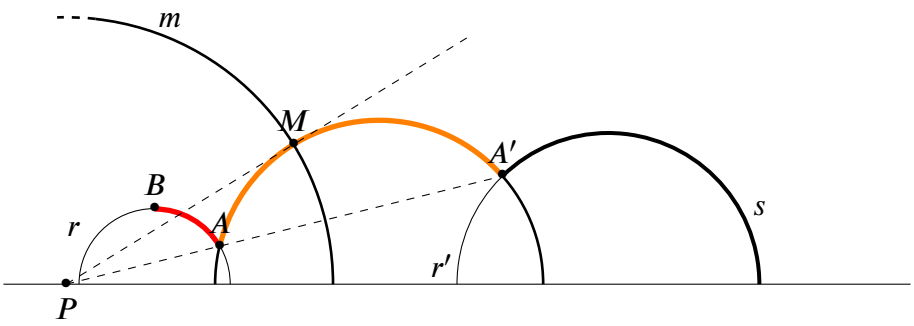


Figura 2.7: Prova de l'axioma 1 de congruència (I).

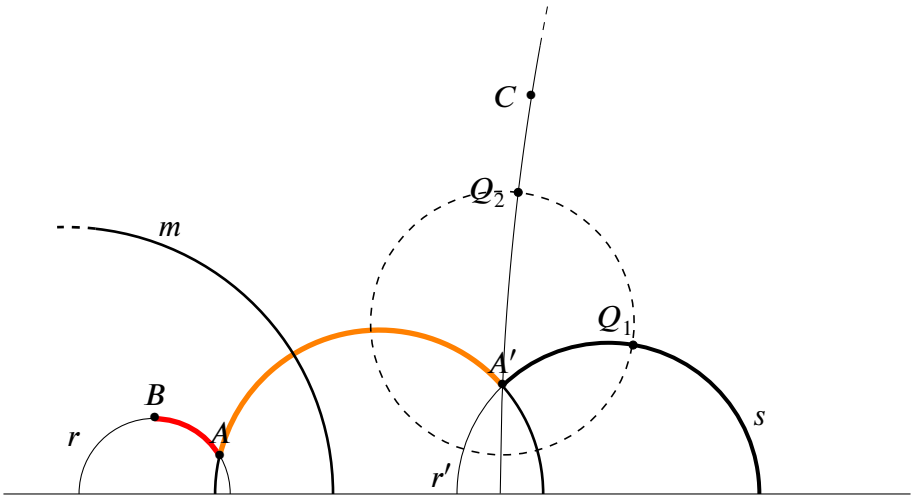


Figura 2.8: Prova de l'axioma 1 de congruència (II).

Tracem la mediatriu del segment Q_1Q_2, que coincideix amb la bisectriu b de l'angle format per $\overrightarrow{A'C}$ i s. Determinem el punt B' invers de C respecte b. La inversió respecte b aplica $A'C$ sobre $A'B'$ (Figura 2.9). Per tant, obtenim que $AB \cong A'B'$ ja que el segment $A'B'$ s'obté mitjançant el producte de dues reflexions del segment AB.

Per veure la unicitat de B' suposem que existeix un altre punt B'_2 que pertany a s i $AB \cong A'B'_2$. Podem aplicar $A'B'$ a $A'B'_2$ a través d'una successió d'inversions. Aquest producte d'inversions té A' i els punts intersecció de r' amb $y = 0$ com a punts fixos. Així, pels *Teoremes* 2.2 i 2.3, $B' = B'_2$.

Finalment, veurem $AB \cong BA$. Aquest resultat segueix del concepte de simetria. Tracem la mediatriu hiperbòlica del segment AB i l'anomenem γ. La inversió respecte de γ aplica el segment AB al segment BA. Així, $AB \cong BA$.

En segon lloc, veurem el segon axioma. Si $AB \cong CD$ i $AB \cong EF$, existeixen un producte d'inversions σ_1 tal que AB aplica sobre CD i un altre producte d'inversions σ_2 tal que AB aplica sobre EF. Partint del segment CD i realitzem el producte σ_1 en ordre invers i seguidament el producte σ_2, obtenim un producte d'inversions que aplica CD sobre EF, i doncs $CD \cong EF$.

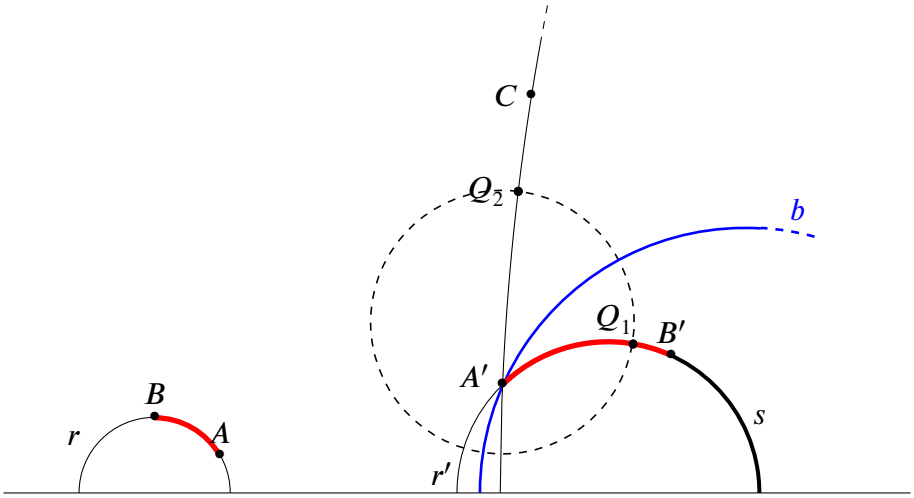


Figura 2.9: Prova de l'axioma 1 de congruència (III).

En tercer lloc, veurem el tercer axioma. Si $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ i $BC \cong B'C'$, existeix una successió d'inversions σ que apliquen AB sobre $A'B'$. El punt C de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ tindrà imatge un punt D sobre la recta $\overleftrightarrow{A'B'}$. A més, el punt D està sobre el mateix costat de B' que C'. Els segments $B'D$ i $B'C'$ estan al mateix costat de B' i són congruents a BC. Pel segon axioma, han de ser congruents entre si. Pel primer axioma, els punts D i C' no poden ser diferents. Per tant, σ aplica AC sobre $A'C'$.

En quart lloc, veurem el quart axioma. Aquest exigeix que a cada semirecta es pugui aplicar un angle congruent a un angle arbitrari donat. Sigui $\widehat{kh}$ un angle de vèrtex R i k' una semirecta amb origen R'. Tracem la mediatriu m del segment RR'.

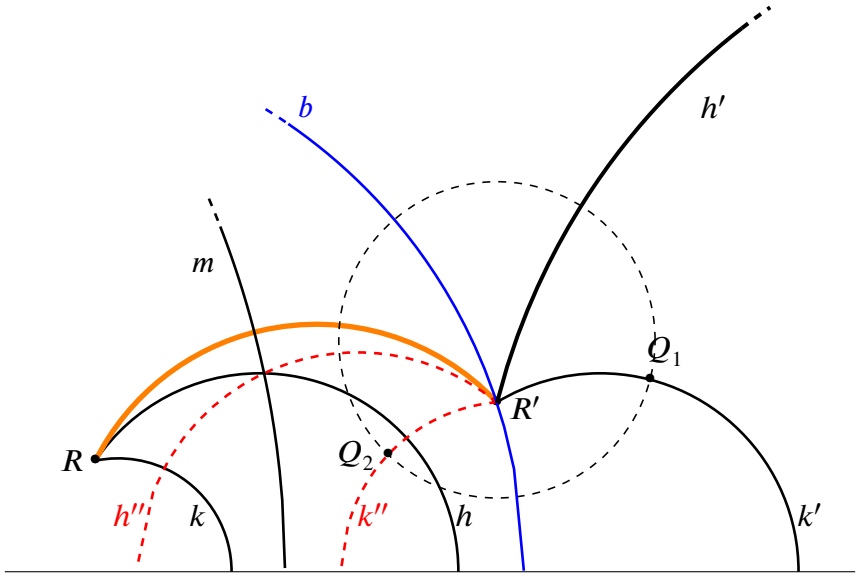


Figura 2.10: Prova de l'axioma 4 de congruència.

La inversió respecte de m aplica $\widehat{kh}$ a un angle $\widehat{k''h''}$ amb vèrtex R'. Sigui Q_1 un punt qualsevol sobre k'. Considerem la circumferència hiperbòlica amb centre R' i radi $\overline{R'Q_1}$. Aquesta talla k'' al punt Q_2. Determinem la mediatriu del segment Q_1Q_2, que coincideix amb la bisectriu b de l'angle $\widehat{k'k''}$. La inversió respecte de$b$ aplica $\widehat{k''h''}$ a $\widehat{k'h'}$. Per construcció, $\widehat{k'h'} \cong \widehat{kh}$. Si h' està al costat dels dos que determina k' que hom volia, ja hem acabat. Si no, fem una inversió respecte k' de la semirecta h' i obtenim el resultat que buscàvem.

En cinquè lloc, veurem el cinquè axioma. Siguin A, B, C no-alineats, A', B', C' no-alineats tals que es compleix $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ i $\widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'}$. Existeix un producte d'inversions σ que aplica $\widehat{BAC}$ a $\widehat{B'A'C'}$. Així, σ porta A a A'. Pel primer axioma, σ aplica C a C' i B a B'. D'aquí resulta que $\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$ i $\widehat{ACB} \cong \widehat{A'C'B'}$.

Axioma de Lobatxevski

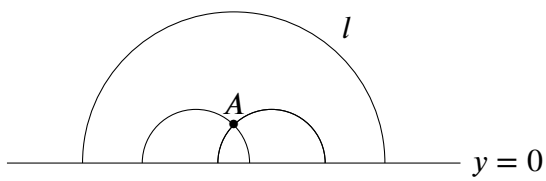


Figura 2.11: Prova de l'axioma de Lobatxevski

Hem de veure que existeix una recta l i un punt A tal que A no és incident en l i per A passen com a mínim dues rectes que no tallen l. Construïm un cas particular que provi l'axioma. Sigui la recta l parametritzada en el sentit euclidià com

$$l = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4, y > 0\right\}$$

i el punt $A \in D$ de coordenades cartesianes $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Definim les rectes

$$l_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2}, y > 0\right\}$$

$$l_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2}, y > 0\right\}$$

que no tallen l i $A \in l_1, l_2$.

3 El pla hiperbòlic: mètrica

L'objectiu d'aquest capítol és determinar una mètrica en el pla hiperbòlic. Per fer-ho, introduïm les transformacions de Möbius; que ja han aparegut de forma implícita al capítol anterior. Desenvoluparem una funció distància a partir de la longitud hiperbòlica d'una corba diferenciable i les geodèsiques del model del semiplà. Finalment, relacionarem aquesta funció amb la raó doble.

3.1 Les transformacions de Möbius

Considerem el pla complex completat $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Definició 3.1 (Transformació de Möbius). *Diem que una funció de la forma*

$$\tau(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}; \qquad \tau : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

amb $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, és una transformació de Möbius.
En particular, si $\gamma \neq 0$ es defineix $\tau\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) = \infty$ i $\tau(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma}$; si $\gamma = 0$ es defineix $\tau(\infty) = \infty$.

A cada transformació τ li associem la matriu complexa i determinant

$$M_\tau = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \Delta_\tau := det(M_\tau) = \alpha\delta - \beta\gamma$$

Podem considerar les transformacions de Möbius com una acció $\phi : GL(2, \mathbb{C}) \times \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ i d'aquí segueix

$$M_\tau z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \tau(z)$$

A més, si prenem $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es compleix

$$(\lambda M_\tau)z = \begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{pmatrix} z = \frac{\lambda\alpha z + \lambda\beta}{\lambda\gamma z + \lambda\delta} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} z = M_\tau z \tag{3.1}$$

Per definició $\Delta_\tau \neq 0$, per tant, la matriu M_τ és invertible amb inversa

$$M_\tau^{-1} = \frac{1}{\Delta_\tau}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Del resultat anterior i l'expressió (3.2) definim la inversa de la transformació τ com

$$\tau^{-1}(z) = \frac{\delta z - \beta}{-\gamma z + \alpha}$$

Les transformacions de Möbius són holomorfes en $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-\delta}{\gamma} \right\}$ amb derivada

$$\tau'(z) = \frac{\alpha(\gamma z + \delta) - \gamma(\alpha z + \beta)}{(\gamma z + \delta)^2} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2} = \frac{\Delta_\tau}{(\gamma z + \delta)^2} \tag{3.3}$$

Per definició de les transformacions de Möbius sabem que $\Delta_\tau \neq 0$; d'aquí i de (3.3) obtenim que són funcions no constants.

Observació. Podem escriure cada transformació de Möbius τ amb determinant $\Delta_\tau = k$ com

$$\tau(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\frac{\alpha}{\sqrt{k}} z + \frac{\beta}{\sqrt{k}}}{\frac{\gamma}{\sqrt{k}} z + \frac{\delta}{\sqrt{k}}}$$

Si calculem el determinant segons aquesta nova expressió tenim

$$\Delta_\tau = \frac{\alpha}{\sqrt{z}} \cdot \frac{\delta}{\sqrt{z}} - \frac{\beta}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{k}} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{k} = 1$$

Per tant, sense pèrdua de generalitat podem considerar les transformacions de Möbius com una acció $\phi : PSL(2, \mathbb{C}) \times \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$.

3.2 La mètrica hiperbòlica

Definició 3.2 (Funció distància). *Definim funció distància en un conjunt X com*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que per a tots els elements $x, y, z \in X$ es compleix

(I). $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(II). $d(x, y) = d(y, x)$
(III). $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Pensem en la parametrització d'una corba diferenciable $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{H}$, on $I = [0, 1]$, com

$$\gamma(t) = \{z(t) = x(t) + y(t)i \in \mathbb{H} \mid t \in I\}$$

Sabem que en el cas euclidià, l'element de longitud d'arc és expressada per $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ i, integrant, la longitud euclidiana de la corba segueix l'expressió següent:

$$|\gamma| := \left|\frac{dz}{dt}\right| = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

En el cas del semiplà de Poincaré, la longitud hiperbòlica segueix l'expressió:

$$|\gamma|_H := \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|}{y(t)} dt \tag{3.4}$$

Seguint l'objectiu de la secció, ens interessa determinar la corba de longitud més petita entre dos punts: la geodèsica entre dos punts A, $B \in \mathbb{H}$. Per això, i de forma directa, ens cal discutir la distància hiperbòlica entre dos punts de $\mathbb{H}$.

Definició 3.3 (Distància hiperbòlica). *Siguin $A, B \in \mathbb{H}$ i Γ el conjunt de totes les corbes γ diferenciables tal que $\gamma(0) = A$ i $\gamma(1) = B$. Sigui $\Lambda = \left\{|\gamma|_H \quad | \gamma \in \Gamma\right\}$. Definim la distància hiperbòlica entre els punts A i B com*

$$d_H(A, B) = \inf \Lambda$$

Teorema 3.1 ([4]). *$d_H(A, B)$ és una funció distància en $\mathbb{H}$.*

3.2.1 Isometries hiperbòliques

Teorema 3.2. *Tota transformació de Möbius aplica $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{H}$.*

Demostració. Sigui $\tau(z) = \tau(x+yi)$ una transformació de Möbius, aleshores podem desenvolupar la seva expressió com

$$\tau(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{(\alpha z + \beta)(\gamma \overline{z} + \delta)}{(\gamma z + \delta)(\gamma \overline{z} + \delta)} = \frac{\alpha\gamma|z|^2 + \alpha\delta z + \beta\gamma\overline{z} + \beta\delta}{\mid \gamma z + \delta \mid^2}$$

En particular, la part imaginària de la imatge de la transformació té l'expressió

$$\mathrm{Im}(\tau(z)) = \frac{\alpha\delta(\mathrm{Im}(z)) + \beta\gamma(\mathrm{Im}(\overline{z}))}{\mid \gamma z + \delta \mid^2} = \frac{\alpha\delta y - \beta\gamma y}{\mid \gamma z + \delta \mid^2} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)y}{\mid \gamma z + \delta \mid^2} = \frac{y}{\mid \gamma z + \delta \mid^2}$$

D'aquí obtenim $\tau(z) \in \mathbb{H}$, ja que $y > 0$ i $\mid \gamma z + \delta \mid^2 > 0$.

Teorema 3.3. *Tota transformació de Möbius sobre $\mathbb{H}$ preserva la distància hiperbòlica.*

Demostració. Sigui $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{H}$ una corba diferenciable en $\mathbb{H}$. Veurem que per tota transformació de Möbius τ es compleix $|\tau(\gamma)|_H = |\gamma|_H$. Parametritzem la corba γ per $z(t) = x(t) + y(t)i$ i la corba $\tau(\gamma)$ per $w(t) = u(t) + v(t)i$. Per (3.3) es compleix

$$\tau'(z) := \frac{dw}{dz} = \frac{1}{(\gamma z + \delta)^2}$$

Utilitzant l'expressió desenvolupada en la demostració anterior tenim

$$\mathrm{Im}(w) = v = \frac{y}{|\ \gamma z + \delta\ |^2} \Leftrightarrow \frac{1}{|\ \gamma z + \delta\ |^2} = \frac{v}{y}$$

Utilitzant aquests resultats es compleix

$$|w|_H = |\tau(\gamma)|_H = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dw}{dt}\right|}{v(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dw}{dz}\frac{dz}{dt}\right|}{v} dt = \int_0^1 \frac{\frac{v}{y}\left|\frac{dz}{dt}\right|}{v} dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|}{y(t)} dt = |\gamma|_H$$

Hem vist que la longitud hiperbòlica d'una corba és invariant sota una transformació de Möbius; la distància hiperbòlica entre dos punts és invariant sota una transformació de Möbius. ▌

3.2.2 Les geodèsiques en el semiplà de Poincaré

Lema 3.1. Sigui l una recta hiperbòlica que talla l'eix d'abscisses a $x = \alpha$. Considerem la transformació de Möbius d'expressió $\tau(z) = \frac{-1}{z-\alpha} + \beta$ amb $\beta \in \mathbb{R}$. Aleshores, $\tau \in PSL(2, \mathbb{C})$ i, amb una definició específica de β, es compleix que τ transporta l sobre el semieix imaginari positiu.

Demostració. En primer lloc, desenvolupem l'expressió de $\tau(z)$

$$\tau(z) = \frac{-1}{z-\alpha} + \beta = \frac{\beta z - (1 + \alpha\beta)}{z - \alpha}$$

que té determinant $\Delta_\tau = -\alpha\beta - (-1 - \alpha\beta) = 1$. Per tant, $\tau \in PSL(2, \mathbb{C})$.

En segon lloc, definim les transformacions $\tau_1(z) = z - \alpha$, $\tau_2(z) = -\frac{1}{z}$ i $\tau_3(z) = z + \beta$. Es compleix $\tau(z) = (\tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1)(z)$. En el cas que l sigui una semirecta euclidiana, τ_1 transporta l a l'eix imaginari.τ_2 transforma el segment euclidià d'extrems $z_1 = 0$ i $z_2 = i$ en el raig vertical d'origen z_2, i viceversa. En aquest cas prenem $\beta = 0$ i doncs $\tau_3(z) = z$: transformació identitat.

En el cas que l sigui una semicircumferència euclidiana de radi r, considerem, sense pèrdua de generalitat, que $(\alpha, 0)$ queda a l'esquerra de l'origen de la semicircumferència. Les coordenades de l'altre punt on la semicircumferència talla l'eix d'abscisses és $(\alpha + 2r, 0)$. Aquests dos punts sota τ_1 son $(0, 0)$ i $(2r, 0)$ respectivament. En particular, l sota τ_1 és una nova semicircumferència l_1 euclidiana amb centre $(r, 0)$ i radi r. τ_2 porta l_1 a la recta euclidiana l_2 que talla l'eix d'abscisses a $x = \frac{-1}{2r}$. En aquest cas prenem $\beta = \frac{1}{2r}$; així, τ_3 transporta l_2 a l'eix imaginari. ▌

Observació. Entenem segment hiperbòlic com un arc de circumferència euclidiana amb centre sobre $y = 0$ o un segment euclidià d'una recta euclidiana que talla $y = 0$ ortogonalment. ▌

Teorema 3.4. *Siguin $A, B \in \mathbb{H}$. Aleshores, la geodèsica entre ambdós punts és un segment hiperbòlic.*

Demostració. En primer lloc, suposem que $A = ai$ i $B = bi$, amb $b > a$. Sigui Γ el conjunt de corbes diferenciables que uneixen A a B i $\Lambda = \left\{|\gamma|_H \quad | \gamma \in \Gamma\right\}$. Per a qualsevol $\gamma \in \Gamma$, que parametritzem per $\gamma(t) = x(t) + y(t)i$, amb $\gamma(0) = A$ i $\gamma(1) = B$, es compleix

$$|\gamma|_H = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{y(t)} dt = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

D'altra banda, si considerem el segment euclidià $\gamma_1 \in \Gamma$ que uneix A i B, parametritzat per

$$\gamma_1(t) = (a + (b-a)t)i$$

i calculem la seva longitud hiperbòlica

$$|\gamma_1|_H = \int_0^1 \frac{\sqrt{(b-a)^2}}{a + (b-a)t} dt = \int_0^1 \frac{(b-a)}{a + (b-a)t} dt = \ln(a + b - a) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Es compleix $|\gamma_1|_H = \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \inf \Lambda$. Així, $d_H(A, B)$ és la longitud del segment hiperbòlic (que forma part d'una semirecta euclidiana vertical).

En segon lloc, suposem que A i B són dos punts arbitraris de $\mathbb{H}$ i l és l'única semicircumferència euclidiana que talla ortogonalment $y = 0$ i passa per A i B; la recta $\overleftrightarrow{AB}$ del model. Aleshores, pel *Lema* 3.1 sabem que existeix una transformació de Möbius, que conserva distàncies pel *Teorema* 3.3, que transporta l a l'eix imaginari positiu i podem aplicar el cas anterior. Hem vist doncs que les rectes hiperbòliques són les geodèsiques; mínimes en longitud localment.

3.2.3 La raó doble

Proposició 3.1. Sigui τ una transformació de Möbius que deixa tres punts fixos en $\mathbb{C}$, aleshores $\tau = id$, on id és la transformació identitat $id(z) = z$.

Demostració. La demostració d'aquest resultat segueix de la demostració del *Teorema* 2.2.

Teorema 3.5. *Siguin tres nombres diferents $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Aleshores existeix una única transformació de Möbius τ que porta z_1, z_2, z_3 a tres nombres específics diferents $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$.*

Demostració. Sigui $\tau_1(z) = \frac{z-z_2}{z-z_3} \cdot \frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}$. En particular, τ_1 és una transformació de Möbius i τ_1 porta z_1 a 1, z_2 a 0 i z_3 a ∞. Sigui $\tau_2(z) = \frac{z-w_2}{z-w_3} \cdot \frac{w_1-w_3}{w_1-w_2}$. En aquest cas τ_2 porta w_1 a 1, w_2 a 0 i w_3 a ∞.

Aleshores, $\tau = \tau_2^{-1} \circ \tau_1$ porta z_1 a w_1, z_2 a w_2 i z_3 a w_3.

Vegem ara la unicitat. Suposem que existeix una transformació de Möbius τ' diferent a τ que porta z_1 a w_1, z_2 a w_2 i z_3 a w_3. En aquest cas, $\tau^{-1} \circ \tau'$ té tres punts fixos. Per la Proposició (3.1) es compleix $\tau^{-1} \circ \tau' = id \Leftrightarrow \tau' = \tau$.

Definició 3.4 (Raó doble). *Siguin $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ quatre nombres complexos diferents. Definim la raó doble, i la denotem per (z_0, z_1, z_2, z_3), com el valor*

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \tag{3.5}$$

Podem generalitzar aquesta definició a $\widehat{\mathbb{C}}$; si un dels quatre punts és ∞, definim la raó doble com

$$(z_0, z_1, z_2, \infty) = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2}; \tag{3.6}$$

$$(z_0, z_1, \infty, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_0 - z_3}; \tag{3.7}$$

$$(z_0, \infty, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3}; \tag{3.8}$$

$$(\infty, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \tag{3.9}$$

Hem vist que podem fer una correspondència entre qualsevol punt del pla euclidià P amb coordenades cartesianes (x_P, y_P) i el nombre complex $x_P + y_P i$. Introduïm una notació per a aquest darrer cas:

Notació. Sigui un punt P del pla. Utilitzem la notació z_P per referir-nos al nombre complex associat a P.

Teorema 3.6. *Siguin A i B dos punts. Siguin P i Q els punts d'intersecció de la recta euclidiana $y = 0$ i la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Aleshores, (A, B, P, Q) és un nombre real estrictament positiu.*

Demostració. Observem, en primer lloc, que si z_A i z_B tenen la mateixa part real, les rectes es tallen en un únic punt. En aquest cas considerem P com el punt d'intersecció i prenem $Q = \infty$. Sigui (x_A, y_A) les coordenades cartesianes de A, (x_B, y_B) les de B i $(x_P, y_P) = (x_P, 0)$ les de P. Hem vist a (3.6) que la raó doble en aquest cas té l'expressió

$$(A, B, P, \infty) = \frac{z_A - z_P}{z_B - z_P} = \frac{(y_A - y_P)i}{(y_B - y_P)i} = \frac{(y_A - y_P)}{(y_B - y_P)} = \frac{y_A}{y_B} \in \mathbb{R}$$

La condició d'estrictament positiu segueix del fet que les coordenades y dels punts en el model del semiplà de Poincaré són estrictament positives.

En el cas que z_A i z_B tenen diferent part real, determinem els nombres complexos $z_A - z_P$, $z_A - z_Q$, $z_B - z_P$ i $z_B - z_Q$ en forma polar

$$z_A - z_P = r_1 e^{w_1 i}; \qquad z_A - z_Q = r_2 e^{w_2 i}; \qquad z_B - z_P = r_3 e^{w_3 i}; \qquad z_B - z_Q = r_4 e^{w_4 i}.$$

Es compleix $\widehat{PAQ} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow w_2 - w_1 = w_4 - w_3 = \frac{\pi}{2}$. D'aquí,

$$\frac{z_A - z_P}{z_A - z_Q} = \frac{r_1}{r_2} e^{-\frac{\pi}{2} i}; \qquad \frac{z_B - z_Q}{z_B - z_P} = \frac{r_4}{r_3} e^{\frac{\pi}{2} i}$$

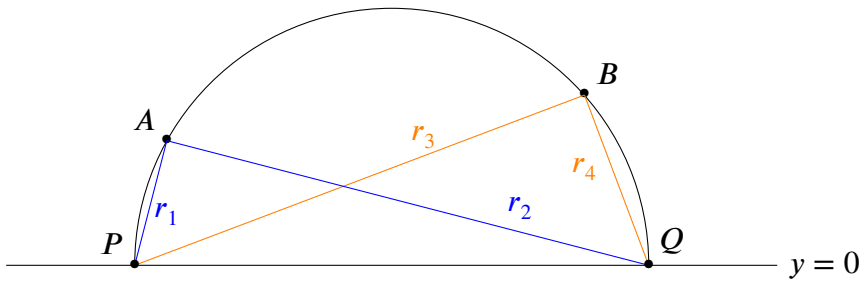


Figura 3.1

i en conseqüència

$$(A, B, P, Q) = \frac{r_1 \cdot r_4}{r_2 \cdot r_3}.$$

La condició que el valor numèric obtingut és un real estrictament positiu segueix del fet que $r_i > 0, r_i \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.7. *Siguin $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tres punts diferents i τ una transformació de Möbius. Aleshores $(z, z_1, z_2, z_3) = (\tau(z), \tau(z_1), \tau(z_2), \tau(z_3))$ per tot $z \in \widehat{\mathbb{C}}$.*

Demostració. Sota la hipòtesi de $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tres punts diferents i τ una transformació de Möbius, definim $\tau_2(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$, tal que envia z_1 a 1, z_2 a 0 i z_3 a ∞. Aleshores, $\tau_2 \circ \tau^{-1}$ porta $\tau(z_1)$ a 1 és una transformació de Möbius, $\tau(z_2)$ a 0 i $\tau(z_3)$ a ∞.

Observació. El darrer teorema ens diu que la raó doble és invariant sota les transformacions de Möbius.

Lema 3.2. Siguin $A, B \in \mathbb{H}$. Aleshores, per tota transformació de Möbius τ es compleix

$$\left|\frac{z_A - z_B}{z_A - \overline{z_B}}\right| = \left|\frac{\tau(z_A) - \tau(z_B)}{\tau(z_A) - \tau(z_B)}\right|$$

Demostració. Sigui τ una transformació de Möbius qualsevol i $A, B \in \mathbb{H}$. En primer lloc, recordem que hem vist a la demostració del *Teorema* 3.3 que $\tau'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$; a més, es compleix $|\tau'(z)| = \left|\frac{1}{(\gamma z+\delta)^2}\right| = |\tau'(\overline{z})|$. Així,

$$|\tau'(z_A)\tau'(z_B)|^{1/2} = \left|\frac{1}{(\gamma z_A + \delta)(\gamma z_B + \delta)}\right| = |\tau'(z_A)\tau'(\overline{z_B})|^{1/2}$$

i obtenim la següent igualtat

$$|\tau(z_A) - \tau(z_B)| = \left|\frac{\alpha\delta z_A + \beta\gamma z_B - \alpha\delta z_B - \beta\gamma z_A}{(\gamma z_A + \delta)(\gamma z_B + \delta)}\right| = \left|\frac{\alpha\delta(z_A - z_B) - \beta\gamma(z_A - z_B)}{(\gamma z_A + \delta)(\gamma z_B + \delta)}\right| =$$

$$= \left|\frac{z_A - z_B}{(\gamma z_A + \delta)(\gamma z_B + \delta)}\right| = |z_A - z_B||\tau'(z_A)\tau'(z_B)|^{1/2}$$

I d'aquí,

$$\left|\frac{z_A - z_B}{z_A - \overline{z_B}}\right| = \frac{|z_A - z_B|}{|z_A - \overline{z_B}|} = \frac{|\tau(z_A) - \tau(z_B)|}{|\tau'(z_A)\tau'(z_B)|^{1/2}} \cdot \frac{|\tau'(z_A)\tau'(\overline{z_B})|^{1/2}}{|\tau(z_A) - \tau(\overline{z_B})|} = \left|\frac{\tau(z_A) - \tau(z_B)}{\tau(z_A) - \tau(\overline{z_B})}\right|$$

∎

Lema 3.3. Siguin A i B dos punts. Siguin P i Q els punts intersecció de la recta euclidiana $y = 0$ i la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Aleshores, existeix una única transformació de Möbius tal que $\tau(P) = 0$, $\tau(Q) = \infty$, $\tau(A) = i$ i $\tau(B) = ri$, amb $r > 1$.

Demostració. Definim la transformació de Möbius $\tau_1(z) = \frac{z - z_Q}{z - z_P}$. Observem que es compleix $\tau_1(z_Q) = 0$ i $\tau_1(z_P) = \infty$. En particular, τ_1 transporta $\overleftrightarrow{AB}$ a l'eix imaginari. En el cas que $\tau_1(B) = ki$, aleshores prenem la transformació $\tau_2(z) = \frac{1}{k}\tau_1(z)$. Del *Teorema* REF sabem que aquesta transformació és única. Finalment, com que B pertany al segment hiperbòlic amb extrems A i Q, es compleix $i \in [0, \tau(z_A)]$ i doncs $\tau(z_A) = ri$ amb $r > 1$. ∎

De la definició de raó doble i dels resultats del *Teorema* 3.4 i el *Lema* 3.3 tenim

$$(A, B, P, Q) = (ri, i, \infty, 0) = \frac{i}{ri} = \frac{1}{r}$$

Del Teorema 3.4. i el Lema 3.2. tenim que $d_H(A, B) = \left|\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right| = |\ln(A, B, P, Q)|$.

4 El pla hiperbòlic: el disc de Poincaré

Els **punts** del pla hiperbòlic en el model del disc de Poincaré són els elements del conjunt

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

Les **rectes** del pla hiperbòlic en el model del disc de Poincaré són

- Les rectes ordinàries de $\mathbb{R}^2$ que passen per l'origen del disc unitat al pla real $\mathbb{R}^2$.
- Els arcs de circumferències ordinàries de $\mathbb{R}^2$ que tallen ortogonalment la circumferència

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

.

4.0.1 Del semiplà al disc de Poincaré

Transformació de Cayley

Considerem les matrius M_{τ_1} i M_{τ_2} definides per

$$M_{\tau_1} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \qquad M_{\tau_2} = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

i les seves transformacions de Möbius associades: τ_1 i τ_2 respectivament. Són invertibles, ja que $\Delta_{\tau_1} = \Delta_{\tau_2} = 2i \neq 0$. Se satisfà

$$M_{\tau_1} M_{\tau_2} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} = 2iI = M_{\tau_2} M_{\tau_1}$$

Sabem que les transformacions de Möbius es poden concebre com a l'acció del grup $GL(2, \mathbb{C})$ al conjunt $\widehat{\mathbb{C}}$. Pel resultat (3.1) tenim $M_{\tau_1} M_{\tau_2} z = M_{\tau_2} M_{\tau_1} z = (2iI)z = Iz$. Així, τ_1 i τ_2 són inverses una de l'altra. Considerem els dominis $\mathbb{H}$ i D per τ_1 i τ_2 respectivament. Observem que ambdues transformacions són holomorfes en aquests dominis.

Vegem-ne les imatges. En primer lloc, observem que la imatge de τ_1 compleix

$$1-\mid \tau_1(z)\mid^2 = 1-\frac{\mid z\mid^2 -2y+1}{\mid z\mid^2 +2y+1} = \frac{4y}{\mid z+i\mid^2} = \frac{4\mathrm{Im}(z)}{\mid z+i\mid^2}$$

En $\mathbb{H}$ tenim que per tot $z \in \mathbb{H}$ es compleix $\mathrm{Im}(z) > 0$. Així, $1-\mid \tau_1(z)\mid^2 > 0 \Leftrightarrow \mid \tau_1(z)\mid^2 < 1$. En segon lloc, la imatge de τ_2, donat $z = x+yi \in D$ es pot descriure com [1]

$$\mathrm{Im}(\tau_2(z)) = \mathrm{Im}\left(\frac{z+1}{-z+1}i\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z+1}{-z+1}i + \frac{\overline{z}+1}{\overline{-z+1}}i\right) = \frac{1-\mid z\mid^2}{\mid -z+1\mid^2};$$

$$\mathrm{Re}(\tau_2(z)) = \frac{1}{2}\left(\frac{z+1}{-z+1}i - \frac{\overline{z}+1}{\overline{-z+1}}i\right) = \frac{-2y}{\mid -z+1\mid^2}$$

Se satisfà $\mid z\mid < 1$. Aleshores, $\mathrm{Im}(\tau_2(z)) > 0$.

Tenim dues transformacions inverses una de l'altra, holomorfes en els seus dominis definides per

$$\tau_1(z) = \frac{z-i}{z+i}; \qquad \tau_1 : \mathbb{H} \longrightarrow D;$$

$$\tau_2(z) = \frac{z+1}{-z+1}i; \qquad \tau_2 : D \longrightarrow \mathbb{H}$$

4.0.2 Construcció de rectes en el disc de Poincaré

Recuperem 2.2. *La inversió* per desenvolupar la següent secció. Notem que les inversions i la transformació de Cayley definida anteriorment són casos particulars de transformacions de Möbius. Amb aquestes idees presents, i el *Teorema* 4.1, vegem característiques de les rectes en el model del disc.

Teorema 4.1 ([12]). *Les transformacions de Möbius conserven els angles; són aplicacions conformes.*

Teorema 4.2. *Siguin dues circumferències λ_1 i λ_2, aleshores la circumferència λ_1' inversa de λ_1 respecte λ_2 coincideix amb la circumferència original, λ_1, si i només si λ_1 i λ_2 són perpendiculars.*

Demostració. En primer lloc, suposem que es compleix λ_1 i λ_2 són perpendiculars. Siguin A i B els punts d'intersecció entre λ_1 i λ_2. Les rectes tangents a λ_1, respectivament λ_2 en A i B passen pel centre de la circumferència λ_2, respectivament λ_1. Una circumferència està definida pel seu centre i qualsevol punt d'ella mateixa, així només hi ha una circumferència que passa per A i B i és perpendicular a λ_1. Quan fem la inversa de λ_2 respecte de λ_1, sabem pel *Teorema* 4.1 que λ_2' és perpendicular a λ_1. A més, els punts inversos de A i B respecte de λ_1 són ells mateixos. Així doncs, λ_2' és una circumferència que passa per A i B i és perpendicular a λ_1.

En segon lloc, suposem que λ_1 i λ_2 no són perpendiculars. Veurem que la circumferència λ_2', inversa de λ_2 respecte de λ_1 no coincideix amb la circumferència original λ_2. La circumferència λ_2'

[1] Aquí utilitzem que donat $w \in \mathbb{C}$ es compleix $\mathrm{Im}(w) = \frac{w-\overline{w}}{2i}$ i $\mathrm{Re}(w) = \frac{w+\overline{w}}{2}$

conservarà els angles amb la circumferència λ_1; però l'orientació d'aquests angles és invertida. Així, λ_2' no pot coincidir amb λ_2.

Teorema 4.3. *Sigui C la frontera del disc de Poincaré. Sigui d una circumferència que talla C. Sigui A un punt de λ i A' el punt invers de A respecte de C. Aleshores, A' és un punt de λ si i només si λ talla perpendicularment C.*

Demostració. En primer lloc, suposem que λ talla perpendicularment C. Pel *Teorema* 4.2 sabem que la inversa de λ respecte C és ella mateixa. Així, A' serà un punt de λ.

En segon lloc, suposem que A' pertany a λ. Sigui M el centre de la circumferència λ i O el centre de C. Sigui P un punt intersecció de λ i C. Construïm el raig $\overrightarrow{OA}$. Considerem la recta que passa per M perpendicular al raig $\overrightarrow{OA}$ i definim B el punt intersecció.

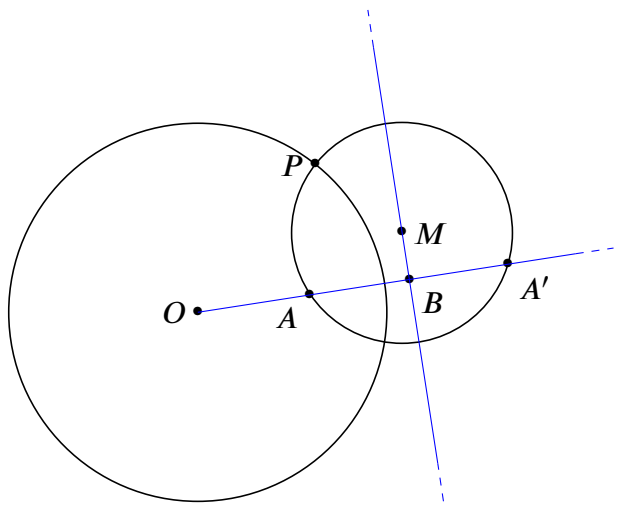


Figura 4.1

Veurem que $\widehat{OPM}$ és un angle recte.

$$\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = (\overline{OB} - \overline{AB})(\overline{OB} + \overline{AB}) = \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2 = (\overline{OM}^2 - \overline{MB}^2) - \overline{AB}^2 =$$

$$= \overline{OM}^2 - (\overline{MB}^2 + \overline{AB}^2) = \overline{OM}^2 - \overline{MA}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{MP}^2$$

5 El pla hiperbòlic: tessel·lacions regulars

El mot *tessel·lació* prové de la paraula llatina *tessella* que designa peces quadrades petites de fusta, vidre o pedra per construir mosaics.

Definició 5.1 (Tessel·lació regular del pla). *Una tessel·lació regular del pla és un cobriment d'aquest amb còpies d'un mateix polígon regular amb l'interior disjunt dos a dos, de manera que el mateix nombre de polígons es troben a cada vèrtex.*

En el cas euclidià, els únics polígons regulars que enrajolen el pla són triangles equilàters, quadrats i hexàgons. Veurem que en el cas hiperbòlic hi ha infinites tessel·lacions regulars diferents.

Notació. Per referir-nos a la tessel·lació regular on q polígons de p arestes es troben a cada vèrtex utilitzarem $\{p, q\}$, conegut com a símbol de Schläfli.

Teorema 5.1 ([16]). *Sigui un triangle al pla hiperbòlic amb angles θ_i per $i = 1, 2, 3$. Aleshores,*

$$\sum_{i=1}^{3} \theta_i < \pi$$

En el cas hiperbòlic, sigui un polígon regular $\boldsymbol{P}$ amb p arestes i angle θ. Es compleix

$$p\theta < \pi(p-2); \tag{5.1}$$

$$q\theta = 2\pi \tag{5.2}$$

Substituint (5.2) en (5.1) obtenim

$$p\frac{2\pi}{q} < \pi(p-2) \Leftrightarrow 2 < \frac{p-2}{p}q \Leftrightarrow 2-2\frac{p-2}{p} < \frac{p-2}{p}q-2\frac{p-2}{p} \Leftrightarrow \frac{2p-2p+4}{p} < \frac{p-2}{p}(q-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 < (p-2)(q-2) \tag{5.3}$$

5.1 Tessel·lacions de M.C. Escher

5.1.1 En el pla euclidià

Maurits Cornelis Escher (1898-1972, Països Baixos) és reconegut pel conjunt d'obres d'art [1] característiques per la representació d'il·lusions òptiques, figures impossibles i divisions regulars del pla amb, majoritàriament, il·lustracions de fauna. Aquest últim tipus d'obra artística correspon a l'ús de tessel·lacions; i seran l'objecte d'estudi de les següents pàgines.

El conjunt d'obres corresponents a l'inici de la carrera de l'artista, distingides per l'ús d'una gran tècnica, configura retrats, paisatges, imatges arquitectòniques i dissenys comercials. Es diu que l'art d'Escher va patir una transformació, i ell mateix descriu aquest canvi com:

"Vaig descobrir que el domini tècnic no era el meu únic objectiu, ja que va néixer en mi un altre desig, l'existència del qual mai havia sospitat. Idees alienes a l'art gràfic es van apoderar de mi, nocions que em van fascinar tant que em vaig sentir impulsat a comunicar-les als altres." [1959]

(a) Hexàgons (b) Triangles equilàters (c) Quadrats

Figura 5.1: Tessel·lacions regulars del pla en obres de M.C. Escher.

Inspirat pels mosaics de l'Alhambra de Granada, produeix nombroses obres de divisions regulars[2] del pla utilitzant il·lustracions d'éssers animats. A partir de la tessel·lació regular del pla euclidià, utilitza rotacions, reflexions i translacions per adaptar els polígons a una nova figura artística, de manera que s'aconsegueix un resultat enginyós que produeix curiositat a l'observador.[3]

[1] Vegeu la pàgina web oficial.

[2] Només mencionem el cas regular, ja que és el cas particular que estem estudiant. Tot i això, en el conjunt de les obres d'aquest període també trobem casos de tessel·lacions del pla euclidià amb polígons no regulars.

[3] Vegeu la secció dedicada a la simetria del recurs web oficial de l'artista per a més obres on s'utilitzen tessel·lacions del pla euclidià.

5.1.2 En el pla hiperbòlic

Les tessel·lacions del pla euclidià van conduir a Escher a preguntar-se com podia solucionar el fet de no tenir una frontera finita, condició que sí tenien els materials que utilitzava. En el context d'aquest nou impuls, deia buscar captar l'infinit: definint una nova lògica que el permetés col·locar infinits dels seus objectes artístics en una àrea finita.

El matemàtic H.S.M. Coxeter utilitzà una de les obres d'Escher en una de les seves publicacions, *Crystal Symmetry and its Generalizations* [1958], i envià una còpia d'aquesta a l'artista. Aquest va interessar-se per una de les figures (*Figura* (5.2)) de la publicació matemàtica.

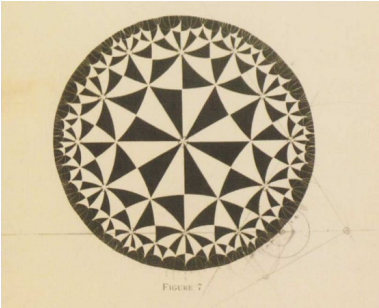


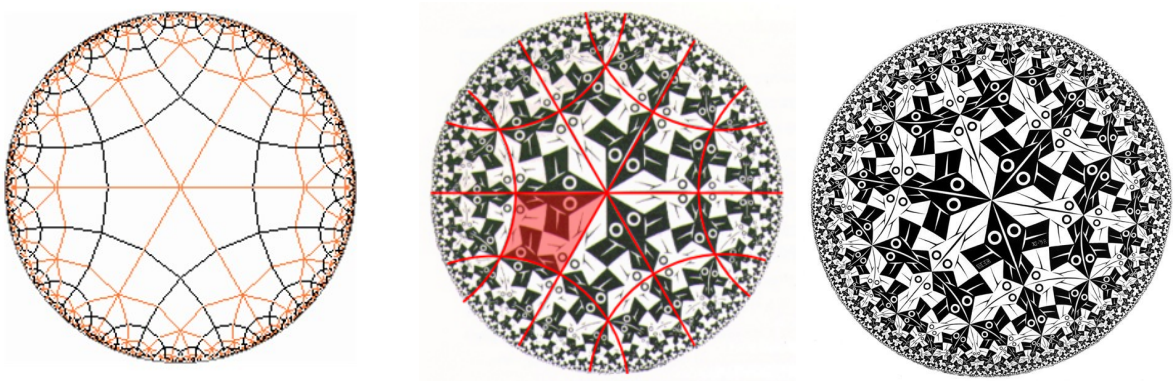
Figura 5.2: Figura 7 de *Crystal Symmetry and its Generalizations*.

L'artista va intentar analitzar la figura amb regle i compàs; captivat per la idea d'infinit implícita en la vora i, conseqüentment, trobant resposta a la seva problemàtica en buscar una frontera finita. Escher va reconèixer que la figura estava composta per una circumferència frontera i infinits arcs de circumferència que tallaven la circumferència frontera ortogonalment. Fou capaç de determinar els centres de les circumferències, que coneixem com a rectes hiperbòliques del model del disc de Poincaré, menys properes a la circumferència frontera $\boldsymbol{C}$. Així, sense plena consciència, havia determinat els objectes del disc de Poincaré. Tot i això, en una primera temptativa d'anàlisis, no fou capaç d'extreure la lògica darrera la figura per determinar un mètode d'emplenament del disc des del centre a la frontera. Referint-se a la *Figura* 5.2 va escriure:

"Intento extreure'n un mètode per l'emplenament del pla amb un motiu que vagi del centre a la vora del cercle, on els motius estaran infinitament junts. El seu [referint-se a Coexeter] HOCUS-POCUS [referint-se a *Crystal Symmetry and its Generalizations*] *no em serveis de res, però la imatge probablement em pot ajudar a produir una divisió del pla que promet convertir-se en una variació completament nova de la meva sèrie de divisions del pla. Una divisió regular i circular del pla, delimitada lògicament en tots els costats per l'infinitesimal, és quelcom realment bonic."* [1958, [21]]

Escher va aconseguir traslladar la figura de Coxeter a una pauta pel seu primer (correspon a tessel·lació $\{4, 6\}$) gravat sobre fusta de la sèrie *Circle Limit* (CL). L'artista demanà ajuda a Coxeter per entendre la construcció d'aquest tipus de figures:

"[...]m'interessen els patrons amb motius que es fan cada vegada més petits fins que arriben al límit de la infinita petitesa. La pregunta és relativament simple si el límit és un punt en el centre d'un patró.



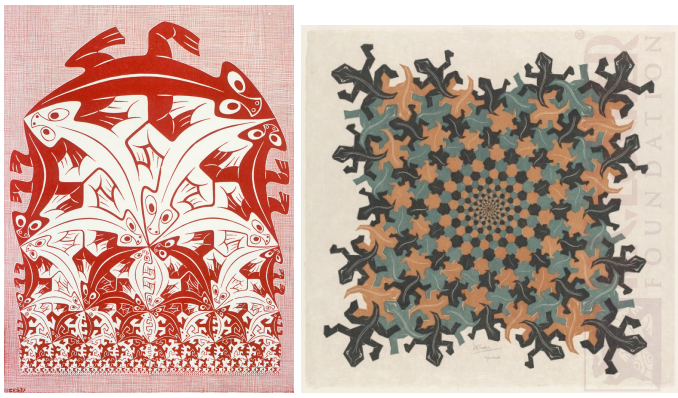
(a) Tesselacions $\{4,6\}$ en taronja i $\{6,4\}$ en negre (b) (c) CLI

Figura 5.3: De la tessel·lació $\{4,6\}$ a CLI.

A més, la recta límit no és nova per a mi, però mai he pogut fer un patró en el qual cada "taca" es faci més petita gradualment des d'un centre fins a l'exterior del cercle límit, com mostra la teva Figura 7.

[...] Si poguessis donar-me una explicació senzilla de com construir els següents cercles, els centres dels quals s'aproximen gradualment des de l'interior fins a arribar al límit, t'estaria immensament agraït. Existeixen altres sistemes a part d'aquest per assolir un cercle límit?" [1958,[21]]

Fixem-nos que Escher, al primer paràgraf de la cita anterior, deia haver resolt el cas d'una recta infinit (que podem pensar com el model del semiplà de Poincaré) i un punt infinit; suggereix que feia referència a obres com les de la *Figura* 5.4.



(a) Regular division of the plane VI (b) Development II

Figura 5.4: Casos d'una recta i un punt infinit.

La resposta del matemàtic no va resultar ser la desitjada per l'artista:

"Donant resposta a la seva pregunta [...] Dic sí, infinitament molts! Aquest model particular es denota per $\{4,6\}$ *perquè hi ha 4 triangles blancs i 4 ombrejats que s'uneixen en alguns punts, 6 i 6 en*

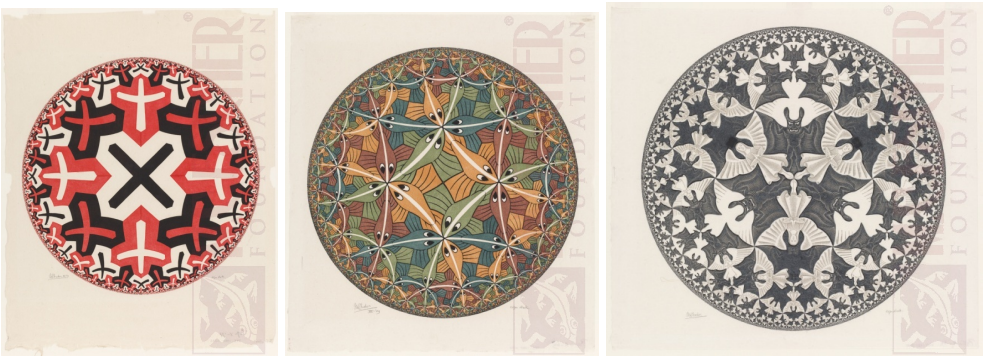
altres. Però tals models $\{p, q\}$ *existeixen per a tots els valors majors de* p *i* q*, i també per* $p = 3$ *i* $q = 7, 8, 9$*... [...] Adjunto una còpia extra de la* $\{3, 7\}$*... Si t'agrada aquest patró, amb els seus triangles i heptàgons alternats, pots derivar fàcilment de* $\{4, 6\}$ *l'anàleg* $\{6, 4\}$*, que consisteix en quadrats i hexàgons."* [1958,[21]]

La descontenta per part de l'artista de la resposta del matemàtic, on no va trobar la descripció d'una lògica que li permetés elaborar més obres de l'estil *CLI*, va portar-lo a escriure al seu fill:

[...] aquest 7 estrany no em serveix de res; desitjo el 2 i el 4 (o el 4 i el 8), perquè els puc utilitzar per omplir un pla de manera que totes les figures d'animals, els eixos corporals dels quals es troben en el mateix cercle, també tinguin el mateix color, mentre que, en l'altre exemple (CLI), 2 blancs i 2 negres s'alternen constantment. [...] Tot i que Coxeter podria ajudar-me dient només una paraula, prefereixo trobar-la jo mateix de moment, [...] A més, sembla molt difícil que Coxeter escrigui de manera intel·ligible per a un profà. Finalment, per molt difícil que sigui, sento encara més satisfacció per resoldre un problema com aquest a la meva forma maldestre. Però el fet trist i frustrant segueix sent que aquests dies començo a parlar una llengua que entén molt poca gent. Em fa sentir cada cop més sol. Després de tot, ja no pertanyo a cap lloc. " [1959,[21]]

Després d'uns mesos d'aquestes paraules l'artista va aprendre, de forma autodidàctica, a reproduir figures com la de la publicació de Coxeter i algunes amb petites variacions d'aquesta. Aquell mateix any, 1959, va elaborar el seu segon (correspon a tessel·lació $\{8, 3\}$) i tercer (correspon a tessel·lació $\{4, 6\}$) gravat sobre fusta dins la sèrie *Circle Limit*. Sobre el CLIII escriu:

"A mesura que totes aquestes cadenes de peixos s'alcen com coets des de la distància infinita en angle recte des del límit i tornen a caure d'on provenen, ni una sola component arriba a la vora."[1959,[21]]



(a) CLII (b) CLIII (c) CLIV

Figura 5.5: Gravats de la sèrie *Circle Limit*

Al 1960, l'artista conclou la seva sèrie amb l'últim (correspon a tessel·lació $\{6, 4\}$) gravat a fusta CLIV. Coxeter, referint-se a aquesta última obra, escriu:

"[...] prepara la ment de l'observador per veure, en el finit local, indicis de l'infinit global. És, de fet, una bella síntesi visual de la meditació d'Escher sobre l'infinit." [21]

6 Annex

S'inclou en aquest capítol detalls de dos càlculs tècnics que apareixen al la secció 2.2.3 *La inversió en el model del semiplà de Poincaré.*

Desenvolupament 6.1. *Busquem una expressió de z'' respecte el punt inicial z. Hem vist que les dues inversions successives tenen les expressions*

$$z' = \frac{\alpha_1 \overline{z} + \beta_1}{\gamma_1 \overline{z} + \delta_1}; \qquad z'' = \frac{\alpha_2 \overline{z'} + \beta_2}{\gamma_2 \overline{z'} + \delta_2} \tag{6.1}$$

amb α_i, β_i, γ_i, $\delta_i \in \mathbb{R}$ per $i = 1, 2$. Desenvolupem la segona per obtenir una expressió d'aquesta respecte z:

$$z'' = \frac{\alpha_2 \cdot \frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1} + \beta_2}{\gamma_2 \cdot \frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1} + \delta_2} = \frac{\alpha_2\alpha_1 z + \alpha_2\beta_1 + \beta_2\gamma_1 z + \beta_2\delta_1}{\gamma_2\alpha_1 z + \gamma_2\beta_1 + \delta_2\gamma_1 z + \delta_2\delta_1} = \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\beta_2)z + (\beta_1\alpha_2 + \delta_1\beta_2)}{(\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\delta_2)z + (\beta_1\gamma_2 + \delta_1\delta_2)}.$$

Desenvolupament 6.2. *La composició de dues inversions* (6.1) *tindrà expressió*

$$\sigma(z) = \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\beta_2)z + (\beta_1\alpha_2 + \delta_1\beta_2)}{(\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\delta_2)z + (\beta_1\gamma_2 + \delta_1\delta_2)}.$$

D'aquesta manera,

$$\Delta = (\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\beta_2)(\beta_1\alpha_2 + \delta_1\beta_2) - (\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\delta_2)(\beta_1\gamma_2 + \delta_1\delta_2) =$$

$$= \alpha_1\beta_1\alpha_2\gamma_2 + \alpha_1\delta_1\alpha_2\delta_2 + \beta_1\gamma_1\beta_2\gamma_2 + \gamma_1\delta_1\beta_2\delta_2 - \alpha_1\beta_1\alpha_2\gamma_2 - \alpha_1\delta_1\beta_2\gamma_2 - \beta_1\gamma_1\alpha_2\delta_2 - \gamma_1\delta_1\beta_2\delta_2 =$$

$$= \alpha_1\delta_1\alpha_2\delta_2 + \beta_1\gamma_1\beta_2\delta_2 - \alpha_1\delta_1\beta_2\gamma_2 - \beta_1\gamma_1\alpha_2\delta_2 = \alpha_2\delta_2(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1) + \beta_2\delta_2(\beta_1\gamma_1 - \alpha_1\delta_1) =$$

$$= \alpha_2\delta_2(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1) - \beta_2\gamma_2(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1) = \Delta_1(\alpha_2\delta_2 - \beta_2\delta_2) = \Delta_1 \cdot \Delta_2$$

Bibliografia

[1] Aguadé, J. 2021. *Un curs de geometria lineal.* Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.

[2] Bart, A., Clair, B., 2014.*Math and the Art of M.C. Escher*

[3] Brant, D., 2007. *Hyperbolic tessellations*

[4] Carlos, R., 2008 *Tessellations of the hyperbolic plane.* San Bernardino: California State University.

[5] De Lorenzo, J., *Poincaré, pensador de la matemàtica.* Barcelona: FME (Butlletí Digital).

[6] Efimov, N., 1978. *Geometria superior.* Moscu: Mir.

[7] Gray, J., 2006. *János Bolyai, non-Euclidean geometry, and the nature of space.* Cambridge, Mass.: Burndy Library.

[8] Gorgorió, N., 1998. *Exploring the Functionality of Visual and Non-Visual Strategies in Solving Rotation Problems.* Educational Studies in Mathematics, 35, pp 207-231.

[9] Greenberg, M., 2008. *Euclidean and non-euclidean geometries.* New York: Freeman.

[10] Hernández, L.J., *Sobre los principios fundamentales de la Geometría.* Universidad de La Rioja: Lección inaugural del curso 2000-2001

[11] Hernández, L.J. [et al.], 2021. *Geometría plana neutral* Universidad de La Rioja

[12] P. Hitchman, M., 2018. *Geometry with an Introduction to Cosmic Topology*. Oregon: Linfield College.

[13] Pla i Carrera, J., 2018. *Història de la matemàtica. Grècia IIa (els Elements d'Euclides, llibres I, II, III, IV, V i VI): resultats, textos i contextos.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans, Secció de Ciències i Tecnologia.

[14] Pla i Carrera, J., 2018. *Història de la matemàtica. Grècia IIb (els Elements d'Euclides, llibres VII, VIII, IX, X, XI, XII i XIII): resultats, textos i contextos.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans, Secció de Ciències i Tecnologia.

[15] Hvidsten, M., 2017. *Exploring Geometry* Textbooks in mathematics, chapter 17.

[16] Kelly, P. and Matthews, G., 1981. *The Non-Euclidean, Hyperbolic Plane*. New York, NY: Springer New York.

[17] Lucas, P, 1999. *Las otras geometrías*. Conferència pel curs "La Historia de las Matemáticas y su aplicación a la docencia en la Enseñanza Secundaria".

[18] Moreno, Luis. Elizondo, Rubén., 2017. *La Geometría al encuentro del aprendizaje*. Educación Matemática, vol. 29, núm. 1.

[19] Netz, R., 1999. *The shaping of deduction in Greek mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

[20] Reventós, A., 1993. *Geometria axiomàtica*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

[21] Wieting, T., 2010. *Capturing infinity*. Reed Magazine.

[22] Zaldívar, F., 2012. *Teoría de funciones de una variable compleja*. México.