

Topología general

Manuel Sanchis y Michail Tkatchenko

La topología general es una de las ramas más abstractas de las matemáticas en la que se estudia el concepto de continuidad, empezando con los espacios euclídeos, pasando a los espacios métricos y llegando después a espacios más generales que tienen su origen en análisis funcional, probabilidad, ecuaciones diferenciales, etc. Los objetos de estudio de la topología general son las propiedades de los espacios invariantes respecto a las transformaciones biyectivas continuas con inversa también continua, los denominados homeomorfismos. La sencilla pregunta de si la recta es homeomorfa al plano da origen a la teoría de dimensión, en la cual el primer paso importante fue la demostración de un teorema con un matiz filosófico: la dimensión topológica (cualquiera de las tres famosas) del espacio euclídeo (usual) coincide con su dimensión lineal. Así la topología general encontró la forma topológica (de hecho, por lo menos tres maneras distintas) de calcular el número maximal de vectores linealmente independientes sin recurrir a la estructura lineal del espacio euclídeo, sino usando sólo su estructura continua. Otra pregunta sencilla, la de si el cuadrado es homeomorfo a la esfera (en el espacio de dimensión tres) nos lleva a una rama tan vasta y profunda de las matemáticas como es la topología algebraica, donde el estudio de estructuras continuas se realiza con las herramientas provenientes del álgebra (grupos de homotopía, homología, etc., véase el artículo sobre esta disciplina en este mismo volumen).

Aparte del estudio de las propiedades invariantes respecto a homeomorfismos, las denominadas propiedades topológicas, también son de gran importancia las propiedades que se preservan bajo cualquier transformación continua. Este enfoque dio origen al programa de la clasificación mutua de espacios y aplicaciones continuas entre otros formulado por Pavel Aleksandrov, el fundador de la escuela rusa de la topología general, en los años 60 del siglo pasado. Son muy profundos y de gran generalidad muchos de los resultados obtenidos en el marco de este programa, siendo patente incluso hoy en día la influencia de los problemas e ideas formulados en este marco hace más de cuarenta años.

A partir de la segunda mitad de los años sesenta del siglo pasado, con la demostración por parte de Paul Cohen de la consistencia de la negación de la Hipótesis del Continuo, con los axiomas de la teoría de conjuntos (o, mejor dicho, con ZFC), y con la introducción del método de *forcing*, se aumenta la influencia de la teoría de conjuntos sobre la topología general de una forma sorprendente. Si bien es cierto que las dos ramas nunca se han divorciado, a partir de los años setenta esta unión se ha intensificado en una tendencia que dura por lo menos tres décadas. No sólo los topólogos, sino también un buen número de especialistas en análisis matemático y análisis funcional empiezan a estudiar lógica matemática y, en particular, *forcing* para atacar ciertos problemas para los que los métodos tradicionales no se habían mostrado eficaces. Recíprocamente, los especialistas en la teoría de conjuntos hacen incursiones en la topología general y, en particular, en la teoría de cardinales invariantes (una rama de la topología general muy en boga en los años 1960--1980). Los resultados de esta interrelación aparecen muy pronto. Una gran cantidad de problemas "añejos" se resuelven gracias a esta simbiosis. Nos consta que esta enriquecedora tendencia está poco representada en la investigación realizada en España, aunque durante los últimos años aparecen algunos signos que indican un cambio en esta tendencia.

Desde el nacimiento de la topología general al inicio del siglo veinte nunca se pierden los lazos estrechos de la rama con sus orígenes: el análisis matemático, la lógica matemática y el análisis funcional. No queda al margen de esta tendencia la rama más antigua de las matemáticas, el álgebra, con la cual la topología encuentra una interrelación sorprendentemente firme y profunda. Uno de los resultados más visibles de estos lazos es el nacimiento de la topología algebraica. Otro resultado de esta conexión es la aparición de lo que se denomina actualmente como álgebra topológica. Esta rama incluye el estudio de grupos topológicos, anillos y cuerpos topológicos y, en general, los sistemas algebraicos continuos. Entre las direcciones de investigación de mayor impacto se encuentra la dinámica topológica, donde se dan la mano ideas y conceptos algebraicos, geométricos y topológicos. Los orígenes del álgebra topológica se encuentran en la teoría de los grupos de transformaciones y de los grupos de Lie. En los años veinte del siglo pasado se introduce el concepto general de grupo topológico, campo en el que

los matemáticos (influidos por el quinto problema de Hilbert) se limitan, en un principio, a considerar los grupos localmente compactos. Muy pronto el estudio se extiende a toda la clase de los grupos topológicos y después se incluyen otros sistemas algebraicos continuos, en los que se exige que las operaciones algebraicas sean continuas respecto a una topología predeterminada. Anticipando las conclusiones que siguen, es preciso destacar las numerosas e internacionalmente reconocidas contribuciones en el campo del álgebra topológica hechas por los investigadores españoles.

Así, la topología general suministra los conceptos, herramientas e ideas relacionadas con la continuidad a todas las ramas de las matemáticas, hasta algunas de las más alejadas de la propia topología general. También es muy fructífera la interrelación de métodos e ideas entre la lógica matemática y la topología general, donde el concepto de compacidad juega el papel de puente entre ambas ramas, siendo en muchas ocasiones absolutamente imposible trazar la frontera entre ésta y la teoría de conjuntos. Cabe mencionar que métodos topológicos se aplican con mucha eficacia en el procesamiento y reconocimiento de imágenes, la compresión de información (especialmente en casos multidimensionales), el estudio de algoritmos, y en la programación teórica.

Realizaremos a continuación una breve incursión en algunas de las líneas de investigación más representativas (a nuestro modesto entender) en España, con la esperanza de no pecar por omisión. Numerosos ejemplos clásicos en topología (como la recta o el plano de Sorgenfrey, el plano de Niemytzki, la recta de Michael o el espacio de Pixley-Roy sobre los reales) son espacios dotados de una estructura topológica no simétrica, es decir, se enmarcan en el contexto de la topología asimétrica que nace al suprimir en la definición de uniformidad (espacios casiuniformes) o en la definición de espacio pseudométrico (espacios casi pseudométricos) la condición de simetría. Distancias asimétricas fueron ya consideradas por Hausdorff en su clásico libro de teoría de conjuntos de 1914. La denominación casimétrica fue introducida por Wilson en 1931 y la de casiuniformidad por Császár en 1960. La investigación en topología asimétrica es actualmente abundante e importante en la comunidad internacional y en particular, en España, en parte motivada por sus aplicaciones a teoría de la ciencia de la computación, a biología y a economía, interrelacionando conceptos como, por ejemplo, la recta de Kalinsky, espacios de complejidad y funciones de utilidad. Las líneas de investigación abarcan desde el estudio de las extensiones naturales de los espacios casiuniformes (compleciones, bicompleciones, etc.) en el que han jugado un papel no desdeñable las herramientas de la teoría de categorías y en el que aparece de forma natural la relación de esta rama con la teoría de los espacios bitopológicos, hasta sus aplicaciones a los campos mencionados anteriormente, pasando por el estudio de los espacios casinormados o de las casiuniformidades naturales de los grupos paratopológicos. España cuenta con un potente grupo de investigación en este campo radicado en la Universitat Politècnica de Valencia y con miembros también en la Universidad de Almería, la Universitat de les Illes Balears y la Universitat Jaume I de Castelló.

La investigación en grupos paratopológicos enlaza con uno de los campos, el álgebra topológica, en el que, como hemos indicado anteriormente, la investigación en España es muy activa y relevante. A grandes rasgos, la investigación en álgebra topológica que realizan los topólogos españoles la podemos enmarcar en dos áreas: los grupos topológicos y las álgebras de funciones. La teoría de los grupos topológicos nace como un intento de enlazar dos ramas de las matemáticas: la teoría (algebraica) de grupos y la topología. La convergencia de éstas fue el resultado de la influencia de la teoría de los grupos de Lie y de varias clases de grupos de transformaciones. En la Universidad Complutense de Madrid, la Universitat Jaume I de Castelló y la Universidad de Navarra se encuentran los grupos más representativos de esta línea de investigación en España. Entre los temas que incluyen sus investigaciones podemos citar la teoría de la compactación de Bohr de los grupos maximalmente casiperiódicos en el sentido de von Neumann, la teoría de dualidad de Pontrjagin (resaltamos que un hecho fundamental en el desarrollo de esta teoría es que todo grupo topológico abeliano y localmente compacto es maximalmente casiperiódico), los grupos nucleares, la teoría de la dimensión y los grupos (localmente) pseudocompactos.

La investigación en álgebras de funciones ha tenido en nuestro país varias líneas conductoras. En 1968 Hager y Jonson probaron que si la realcompactación de Hewitt de X es un espacio de Lindelöf, entonces todas las álgebras en X son completas (es decir, isomorfas a un $C(Y)$ para algún espacio Y , planteando la cuestión de si el recíproco es cierto). En la Universitat de València se han obtenido importantes avances a este problema (todavía abierto) y en el problema general

de caracterizar las álgebras completas. También las subálgebras intermedias entre $C(X)$ y $C^*(X)$ (el anillo de las funciones reales continuas y acotadas en X) han sido objeto de investigación. Los grupos de la Universidad de Extremadura, de la Universidad de León y de la Universidad de Valladolid han obtenido interesantes y profundos resultados en este campo.

Los problemas anteriores podemos enmarcarlos en un problema más general: el problema de encontrar condiciones algebraicas (o algebraico-topológicas) sobre un anillo, retículo, etc. para que sea isomorfo (como anillo, retículo, etc.) a un $C(X)$, cuestión de gran relevancia por sus implicaciones en diversas áreas de la matemática como el análisis funcional o el álgebra. Recordemos, entre otros, el Teorema de Yosida sobre retículos vectoriales arquimedianos, el teorema de Kohls sobre anillos o el teorema de Henriksen-Johnson para espacios sobre f -álgebras unitarias y arquimedianas. Esta línea de investigación ha sido desarrollada en la Universidad de Extremadura donde se han obtenido fructíferos resultados. Un campo de investigación en el que también el grupo de la Universidad de Extremadura ha obtenido resultados de hondo calado es el que podíamos calificar de teoremas de Stone-Weierstrass. De forma genérica podríamos decir que el objetivo es encontrar caracterizaciones de la clausura uniforme (o para alguna otra topología) de subfamilias de $C(X)$ o de $C^*(X)$.

Un campo de investigación de gran actividad en el contexto internacional es el de la topología difusa (topología *fuzzy*). La topología difusa puede considerarse como una rama de la teoría difusa de conjuntos que proporciona un marco de trabajo más general que el de la teoría clásica. Diversas estructuras matemáticas como, por ejemplo, las estructuras de orden o las estructuras métricas, pueden ser desarrolladas en la teoría. Esta rama de las matemáticas emerge de la teoría local propuesta por Ehresmann. Dos son los grupos principales que investigan en nuestro país en este campo, ambos con aportaciones relevantes: el grupo de la Universitat Politècnica de València y el grupo de la Universidad del País Vasco. El primero centra sus investigaciones en la teoría de los espacios métricos difusos (en el sentido de George y Veeramani) donde ha obtenido resultados en teoría del punto fijo, compleciones o grupos topológicos difusos. El segundo en la teoría de los $I(L)$ -espacios topológicos introducida por Kubiak en 1984, donde han obtenido resultados en teoría de funciones continuas, axiomas de separación, etc.

Las propiedades topológicas definidas a partir de funciones continuas y las extensiones de espacios topológicos (compactaciones, realcompactaciones, etc.) también son objeto de investigación en España. Además del estudio de los grupos (localmente) pseudocompactos ya indicada anteriormente, podemos resaltar las investigaciones realizadas en la Universitat de València y en la Universitat Jaume I de Castelló sobre pseudocompacidad (en tres direcciones diferentes: generalizaciones del concepto de pseudocompacidad, estudio de la clase de Frolík, y su relación con el preorden de Rudin-Keisler en el semigrupo de la compactación de Stone-ech de los naturales con la topología discreta), y de la compactación de Stone-ech y de la realcompactación de Hewitt (Universitat de València).

Como hemos indicado al principio de este artículo, es difícil delimitar la frontera entre la topología general y otras disciplinas próximas. Por ejemplo, algunas cuestiones planteadas en campos limítrofes pueden ser abordadas y resueltas con técnicas y conceptos que surgen de la topología general. Resaltemos que en España este fenómeno ha sido (y es) relevante y motivado, a nuestro entender, por el hecho de que muchos investigadores en topología general se han formado en áreas colindantes como el análisis funcional o la geometría, e incluso el álgebra. La investigación en la estructura de los homomorfismos en álgebras de funciones, en la extensión de operadores o en conjuntos K -analíticos llevadas a cabo en la Universitat de València y las investigaciones en aplicaciones lineales separadoras realizadas en la Universitat Jaume I de Castelló y en la Universidad de Cantabria son un ejemplo de este fenómeno. Enlazando con esta cuestión indicaremos dos campos de investigación muy activos en España que se benefician de las técnicas topológicas; nos referimos a la teoría de los sistemas dinámicos (discretos) con importantes grupos de investigación en, por ejemplo, la Universitat Autònoma de Barcelona, la Universitat Politècnica de Barcelona o la Universidad de Murcia, y la matemática económica con grupos representativos en la Universidad de Navarra, la Universidad de Zaragoza o la Universidad de Vigo entre otras.

Los investigadores españoles en el campo de la topología general y en las ramas colindantes mencionadas arriba desarrollan sus actividades en una estrecha colaboración con sus colegas en el extranjero. Se mantienen contactos con grupos de todos los continentes, pudiendo citar como más relevantes los grupos de topología general y los de grupos topológicos de: Universidad

Autónoma Metropolitana de México, Instituto de Matemáticas y Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, Universidad de Sao Paulo, Ehime University of Matsuyama, University of Ottawa, Wesleyan University (Connecticut), California State University, Ohio University, Universidad de Trieste, Universidad de Padova, Universidad de Udine, Vrije Universiteit of Amsterdam, University of Cape Town, Riga University, Durban University y University of Wollongong.

Además de los trabajos conjuntos, organización de congresos y jornadas científicas a los que estos contactos han dado lugar, también han propiciado estancias de investigadores españoles en centros de investigación extranjeros y viceversa. Por ejemplo, en el periodo 2001-2004 cuatro profesores extranjeros (de los grupos de la Universidad Autónoma Metropolitana, del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, de la University of Cape Town y de Ohio University) han realizado estancias correspondientes a su año sabático en España. Estancias inferiores a seis meses también han sido realizadas, entre otros, por profesores de la Universidad Autónoma Metropolitana de México, de la Universidad de Udine, de la University of Wollongong, del Instituto de Matemáticas de la UNAM, de University of Cape Town, de Ehime University y de la Universidad de Sao Paulo. Estas visitas demuestran la creciente influencia internacional y el nivel de la investigación española en topología general y sus aplicaciones.