Topología algebraica

Aniceto Murillo

El primer problema que surge al organizar y confeccionar lo que ahora leen es el tradicional tópico de acotar de forma certera el campo de acción de la materia bajo estudio, en este caso, la topología algebraica. La consabida definición “topología algebraica es el estudio de objetos algebraicos que constituyen invariantes de aspectos cualitativamente intrínsecos de espacios topológicos” serviría en cualquier foro menos éste si pretende ser un análisis conciso pero pormenorizado de las posibilidades de la topología. Sirva esto a la vez de introducción y de excusa para adelantarles que me situaré también en estas tierras de lindes difusas y que espero sean piadosos con cualquier error que procuraré no sea de omisión. A pesar de que las fronteras de esta materia no están trazadas con finas líneas, sí lo está el incuestionable trabajo, en cantidad y calidad, que en ella se desarrolla en España. Me propongo pues dar un corto paseo por la topología algebraica actual prestando especial atención a las líneas de investigación más representativas en nuestro país.

Comencemos por los cimientos algebraicos, incluso categóricos, de la topología algebraica donde caben el álgebra homológica con claros tintes topológicos, el álgebra homotópica y la teoría de categorías puestas al servicio de una visión general de la topología algebraica. No cabe duda de que el marco algebraico introducido por Quillen a finales de los 60 vuelve a ser hervidero de problemas fundamentales. De forma escueta, la idea es analizar cuáles son las herramientas imprescindibles para hacer homotopía y acabar en el contexto abstracto de categoría de modelos, una categoría dotada con tres clases de morfismos, fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles, que verifican los axiomas necesarios (no son ni muchos ni sofisticados) para que tenga sentido establecer en esta categoría desde la noción básica de homotopía hasta los más complicados objetos cuyo hábitat natural se reservaba en un principio a la categoría de espacios topológicos. Pues bien, hay importantes núcleos de investigadores en nuestro país, concretamente en las universidades de Barcelona, Granada, La Laguna y La Rioja, que trabajan en estos temas: Desde desproveer a las categorías de modelos de muchos de sus axiomas iniciales y seguir conservando propiedades homotópicas, hasta el estudio de categorías de modelos enriquecidas con ciertas estructuras adicionales (estructuras simpliciales, espacios exteriores). Motivos para que sea ésta una línea en vanguardia de la topología algebraica no le faltan. Como muestra sirva percatarse de que la teoría de homotopía estable, la mayoría de las teorías de cohomología conocidas asociadas a objetos topológicos, geométricos o incluso algebraicos, incluso la cohomología motívica asociada a un esquema, provienen de una estructura adecuada de categoría de modelos.

Una de estas categorías que nos sirve para enlazar con otra fuente de investigación, y no sólo en nuestro país, es la categoría de homotopía propia. Inicialmente esta teoría fue creada a finales de los 60 para contestar cuestiones tan naturales como ésta: ¿Dada una variedad abierta, podemos encontrar una variedad compacta cuyo borde sea homeomorfo a la variedad inicial? Pues bien, el primer obstáculo para su resolución es la incapacidad de la teoría de homotopía tradicional para preservar ciertas propiedades geométricas de espacios no compactos. Estas dificultades se aminoran si se consideran en la categoría de espacios topológicos los morfismos propios, esto es, aplicaciones continuas donde la imagen inversa de un compacto sigue siendo un compacto. Así, la teoría de homotopía propia puede entenderse como el estudio de invariantes de espacios no compactos bajo la equivalencia de homotopía propia. En la Universidades de La Rioja y Sevilla, podemos encontrar punteros y productivos grupos de investigación en este terreno que compiten en calidad, y colaboran en realidad, con otros grupos de primera fila de nuestro continente.

Además de contestar problemas parecidos al antes mencionado, la teoría de homotopía propia puede ser sumergida en otra con profundas implicaciones en sistemas dinámicos, estadística, computación... Nos referimos a la teoría de la forma: de nuevo, la homotopía ordinaria es un excelente tratado para el estudio de espacios que tienen buenas propiedades locales (variedades, complejos celulares, CW-complejos) pero no tanto para aquellos espacios que carecen de estas propiedades pero no son ni han de ser considerados por ello inhabituales. De hecho aparecen de forma natural en multitud de situaciones que a todos nos resultan familiares como conjuntos de puntos fijos de una acción, fibras de aplicaciones entre espacios “razonables”, atractores de flujos de sistemas dinámicos, etc. Resulta entonces que estos espacios pueden ser aproximados por un “sistema inverso” de poliedros de manera que la “forma” del espacio en cuestión sea la “forma” del límite de ese sistema. Se desarrolla pues una teoría de homotopía de estos sistemas que da lugar a lo que hoy es la teoría de la forma que para espacios “buenos” coincide con la teoría de homotopía usual. Es particular e internacionalmente representativo el equipo de investigación en esta materia de la Universidad Complutense de Madrid.

¿Y qué ha sido de la topología algebraica con acento más clásico? Pues bien, el nuevo impulso que ha experimentado, tanto en nuestro país como fuera de nuestras fronteras, está en gran medida motivado por la revolución en los métodos utilizados así como un moderno y radicalmente distinto enfoque de sus cimientos. Citemos ejemplos muy ilustrativos.

Desde los trabajos de Bousfield y Kan, Quillen y Sullivan, a principios de los 70, ha sido fundamental en temas clave de la teoría de homotopía (como el descubrimiento de nuevas pautas en los grupos de homotopía de las esferas) el concepto de localización y completación de un espacio y que podemos, a modo de símil, observar como la estructura genética de un espacio. La idea original consiste en, dado un espacio, obtener para cada primo p y para los racionales, espacios que contengan toda la información del tipo de homotopía módulo p ó racional. Este es el “genoma” de nuestro espacio y puede ser utilizado no sólo para extraer consecuencias geométricas sobre su comportamiento p-primario sino también para que el propio espacio original pueda ser ensamblado a partir de estas piezas. Esta idea original ha sido generalizada a cualquier categoría donde una teoría de localización no es más que un funtor idempotente que satisface una cierta propiedad universal. A partir de este sencillo concepto se ha desarrollado una potente teoría, de la que se obtienen importantes resultados en muy diversos contextos homotópicos y homológicos (particularmente innovadora es la aplicación de estos resultados en teoría de homotopía estable). En esta teoría trabajan equipos de reconocido prestigio internacional formados por investigadores de las universidades de Almería, Autònoma de Barcelona y Barcelona. Es más, si lo que se trata es de estudiar la parte de la estructura genética del espacio que porta la información racional del tipo de homotopía del mismo, la denominada teoría de homotopía racional ha desarrollado toda una batería de técnicas algebraicas muy precisas que caracterizan a la parte racional de un espacio de modo puramente algebraico. Esta teoría constituye hoy día un sólido núcleo de investigación con importantes aplicaciones a la geometría diferencial, a la topología de cuerdas, al álgebra local. Por otra parte, las herramientas propias de la homotopía racional han sido también aplicadas con éxito al estudio de la parte de torsión de un espacio. Las universidades de Málaga y Santiago cuentan con investigadores activos en los fundamentos y aspectos más homotópicos de esta teoría.

Sin embargo, y como antes decíamos, son numerosos y no menos importantes los métodos propios desarrollados específicamente para estudiar desde un punto de vista homotópico objetos con estructuras más rígidas. Citemos dos ejemplos: Por un lado, la representabilidad de clases de homotopía de aplicaciones entre esferas mediante funciones polinómicas, o más generalmente, holomorfas entre variedades complejas. Por otro lado, hay elementos de ciertas variedades diferenciables (simplécticas, nilvariedades, solvariedades) que sorprendentemente sólo dependen del tipo de homotopía, a menudo racional, de la variedad en cuestión. Importantes resultados de esta índole son obtenidos por investigadores de las Universidades de Málaga, País Vasco, Politècnica de Catalunya, Santiago de Compostela, Zaragoza y Autónoma de Madrid.

Otro ejemplo que da muestras inequívocas de la rápida evolución de la teoría de homotopía en nuestro país despega de una teoría tan clásica como la de grupos de Lie. También clásico fue el estudio desde un punto de vista homotópico de los grupos de Lie vía el concepto de H-espacio o H-grupo, a saber, un espacio que admite una operación interna cuyas propiedades (asociatividad y/o existencia de elemento neutro y/o existencia de inverso) son dadas salvo homotopía. Sin embargo, a finales de los años ochenta, métodos sustancialmente distintos se usaron para el estudio de aquellos espacios de lazos, ejemplos tipo de H-espacios, que a la vez poseen propiedades de finitud cuando se analiza su “genoma” respecto de un determinado número primo p, y que dio lugar a los llamados grupos p-compactos. El desarrollo de esta teoría donde caben conceptos homotópicos reservados hasta entonces a los grupos de Lie (toros maximales, grupo de Weyl, centralizadores,...) ha necesitado de potentes herramientas cohomológicas a la par que ha desarrollado un análisis minucioso del espacio clasificador de un grupo finito. Tanto es así que, independientemente del origen homotópico de esta teoría pero con claras implicaciones en el mismo, se ha desembocado en un nuevo marco para el estudio de los grupos finitos con claro sabor topológico. Estas interesantes líneas de investigación son llevadas a cabo, en colaboración con otros investigadores internacionales de primera fila, por equipos de las universidades Autónoma de Barcelona y Málaga.

Y si nos interesamos por elementos clásicos de la topología algebraica que han conocido un fuerte impulso por la obtención de importantes y novedosos resultados a la vez que por la renovación total de los métodos que les eran habituales, hemos de hablar de invariantes numéricos del tipo de homotopía de espacios, más concretamente los relacionados con la categoría de Lusternik-Schnirelmann de un espacio. Definida simplemente como el menor número de abiertos contráctiles en el espacio necesarios para recubrir al mismo, los métodos utilizados para su cálculo así como sus implicaciones en numerosas y muy diversas ramas de la matemática, le ha servido para ser de nuevo fuente de investigación. Investigadores de las universidades de La Laguna, Málaga, Santiago y Zaragoza trabajan en este invariante con decorados de fondo tan distintos como la topología de foliaciones, el álgebra homotópica o la complejidad algorítmica.

Y por último, si citamos la complejidad computacional, problema inherente a la topología algebraica desde su nacimiento, hemos de mencionar los nuevos y sofisticados algoritmos, fundamentalmente provenientes del álgebra homológica diferencial, empleados por investigadores de las universidades de La Rioja y Sevilla para atacar y resolver problemas de complejidad algorítmica en topología algebraica computacional.

Como he tratado de poner de relieve, los resultados obtenidos y los teoremas que sin duda se demostrarán en topología algebraica en nuestro país son numerosos en cantidad, de amplio espectro matemático en general, y profundos y de peso en lo que a calidad se refiere. No obstante, existen a mi juicio campos de la topología algebraica que, aún siendo punteros, sólo son explorados de forma tangencial, en nuestros centros de investigación. Debiera comenzar por la sorprendente y magistral introducción de la teoría de homotopía, y más concretamente de la teoría de homotopía estable, en el mundo de la geometría algebraica llevado a cabo por Voevodsky y que desemboca en una teoría algebraica de homotopía de esquemas para, entre otras cosas, entender el carácter universal de la cohomología motívica. La teoría de homotopía estable, y muy particularmente su axiomática, es también fundamental para entender la versión homotópica en la que pueden traducirse importantes problemas relativos al grupo de clases de homotopía de automorfismos de una superficie orientada de género suficientemente grande. Es el llamado “mapping class group” estable. El entorno topológico en el que se han enmarcado problemas sobre este grupo que clásicamente eran estudiados con métodos más rígidos ha dado lugar a la resolución de antiguas conjeturas y constituye de hecho una interesante vía de investigación quizás no representada suficientemente en nuestro país en su vertiente topológica. Citar por último, sin pretender ser exhaustivo, los interesantes métodos y resultados aportados por el estudio de distintas teorías de cohomología generalizadas. Entre ellas quiero destacar a las llamadas teorías de cohomologías complejas orientadas, entre las que se encuentran las de cohomología elíptica, por situarse en un punto donde confluyen de la manera más sorprendente áreas tan diversas y tan en boga como la propia teoría de homotopía, teoría de cuerdas, curvas elípticas, formas modulares... Me consta no obstante que el plantel de investigadores en topología algebraica de nuestro país es consciente de la importancia de estas líneas de investigación a la vista de los seminarios que se imparten en nuestros centros.

Quisiera terminar situando muy brevemente el lugar de la topología algebraica en el momento actual, en relación con otras ramas de la matemática. Para ello es imprescindible recordar los añorados años sesenta, época dorada de la teoría de homotopía “per se”, cuando los avances en ésta y otras ramas de la topología algebraica eran espectaculares, en profusión y profundidad. También debiéramos no olvidar cómo a finales de los 70, este fulminante desarrollo entra en recesión, tanto por la desaceleración creciente en el progreso en líneas centrales hasta entonces de la topología algebraica, como por la idea que comienza a cundir entre los círculos mas potentes de investigadores, en ésta y en materias afines, que ven con pesimismo cómo las nuevas ideas no parecen ser lo suficientemente innovadoras, como para dar luz a teoremas de calado que constituyan una nueva punta de lanza. Así las cosas, y desde entonces, si hay un motor que ha sido capaz de la recuperación de la topología algebraica y del prometedor futuro que se le augura, ése podría ser precisamente la investigación en aquellas lindes difusas de las que hablábamos. La búsqueda de interrelaciones de la topología algebraica con otras materias ha dado, ofrecen, y éste que ahora escribe confía en que seguirán produciendo sorprendentes resultados en campos hasta ahora vedados a la topología y que redundan además en el enriquecimiento de la topología algebraica misma. Desde el uso incuestionable de la topología en la demostración del teorema del Índice de Atiyah-Singer, tan en boga estos días por el premio Abel otorgado a sus mentores, hasta la más actual de las ideas de Voevodsky que engarza la teoría de homotopía y la geometría algebraica moderna; desde las más clásicas aplicaciones de la topología a la cirugía de variedades hasta las más actuales en la topología de cuerdas, en teoría de categorías, en el estudio de los invariantes de 4-variedades, en la física teórica...Todos ellos son ejemplos de cómo la topología algebraica no sólo puede abonar terrenos hasta ahora inexplorados, sino que además, este mutuo trasvase de ideas sirve para encontrar nuevas líneas que ofrecen resultados en problemas clásicos. Sin embargo, creo necesario recalcar que la importancia de la topología algebraica no puede ni debe ser medida en función de su versatilidad para resolver cuestiones que nacen de foros geométricos, analíticos, algebraicos...Lo que ha hecho posible esta interrelación, esta aplicabilidad, es precisamente la masa crítica, la impecable teoría, la red tejida desde el Análisis Situs de Poincaré hasta nuestros días y que aún hoy se sigue apuntalando de manera firme con incuestionables resultados.