

Singularidades

Juan José Nuño Ballesteros

Antes de comenzar, quizá sería conveniente explicar un poco qué son las singularidades, ya que este término se utiliza en ocasiones para designar conceptos distintos. En la Mathematics Subject Classification (MSC) de 2000, las singularidades aparecen de una forma fundamental en tres lugares:

En diversos epígrafes del área de Geometría Algebraica (14-XX).

Todo el apartado 32S, dentro del área de Varias Variables Complejas (32-XX).

Por último, todo el apartado 58K, ésta vez bajo el título "Teoría de Singularidades y Teoría de Catástrofes", dentro del área de Análisis Global, Análisis en Variedades (58-XX).

Estos tres apartados delimitan de una forma más o menos completa el conjunto de problemas relacionados con el término singularidades, desde una perspectiva algebraica, analítica o diferencial. En el primer caso, nos encontramos con las singularidades que aparecen al estudiar conjuntos definidos como los ceros de polinomios, en donde se estudian tanto cuestiones de tipo local (por ejemplo, deformaciones de singularidades) como de tipo global (resolución de singularidades). El mayor avance de estas teorías vino de la mano de matemáticos de la talla de Zariski o Hironaka, siendo las técnicas utilizadas de tipo algebraico principalmente.

El segundo apartado tiene un carácter parecido al primero, aunque en este caso se estudian singularidades de conjuntos analíticos, que son aquéllos definidos por los ceros de funciones analíticas de varias variables complejas. Se estudian problemas fundamentalmente de tipo local y las técnicas utilizadas incluyen no sólo herramientas algebraicas o analíticas, sino también de tipo topológico. Así pues, teoremas como el de la fibración de Milnor muestran una profunda y estrecha relación entre el álgebra y la topología. Entre los principales matemáticos que han contribuido a esta parte de la teoría de singularidades podemos citar a Milnor, Zariski, Brieskorn, etc.

Finalmente, la parte más diferencial de las singularidades proviene principalmente del estudio de las singularidades o puntos críticos de aplicaciones diferenciables entre variedades. Basada en los trabajos pioneros de Whitney, se trata principalmente de clasificar puntos críticos de aplicaciones diferenciables por A-equivalencia, es decir, por cambios de variable (difeomorfismos) en el dominio y el codominio de las aplicaciones. Esta noción de equivalencia da lugar a otros conceptos relacionados, como por ejemplo, estabilidad, determinación finita, A-equivalencia topológica, estabilidad topológica, etc. El mayor avance de la teoría se produjo con los trabajos de Thom, y posteriormente de Mather y Arnold. Las técnicas utilizadas incluyen herramientas algebraicas, analíticas y topológicas. La mayoría de resultados en esta área son de tipo local, aunque también encontramos ciertos aspectos globales de la teoría de singularidades, las cuales utilizan de una forma mucho más acentuada las técnicas topológicas.

No obstante, esta separación resulta muchas veces confusa, especialmente entre la parte algebraica y la analítica o entre la parte analítica y la diferencial. Además, recientemente han aparecido otros grupos de trabajo en temas transversales relacionados principalmente con los aspectos computacionales de las singularidades.

En la actualidad, podemos destacar a nivel mundial los siguientes grupos de trabajo en singularidades:

-
- Universidad de Liverpool (Inglaterra). Este es quizá uno de los principales grupos de referencia en el área, liderado inicialmente por C.T.C. Wall y más recientemente por J.W. Bruce. Sus líneas de investigación más recientes tratan sobre el problema de la clasificación y la geometría de las singularidades de aplicaciones, aunque también encontramos trabajos sobre la monodromía y la topología de familias, singularidades de ecuaciones diferenciales binarias, así como aplicaciones de las singularidades a la geometría diferencial, la robótica o la visión computacional. En la década de los 90 fue el centro de coordinación de la European Singularity Network, un proyecto financiado por fondos de la Unión Europea y que aglutinó a

un gran número de universidades de distintos países. Gracias a este proyecto se financiaron numerosos encuentros de gran relevancia. También se creó una página web mantenida por A. du Plessis desde Dinamarca con información relativa a las singularidades (investigadores, servicio de preprints, eventos, etc.). El proyecto finalizó a principios de 2000 y la web ha quedado sin actualizar desde entonces.

-
- El seminario de V.I. Arnold en las universidades de Moscú y París IX. Este es también uno de los seminarios clásicos en singularidades que comienza en 1960 en Moscú y a partir de 1993 tiene una rama parisina en el Jussieu Mathematical Institute. Los trabajos de Arnold y sus colaboradores incluyen resultados en prácticamente todos los temas de singularidades, especialmente en la parte analítica y diferencial. Son de destacar también las recientes aportaciones de V.A. Vassiliev, en las cuales se hace uso de técnicas de singularidades al estudio de invariantes topológicos en determinadas situaciones (como por ejemplo la teoría de nudos).

-
- Otro punto de referencia en París VII es el seminario de singularidades dirigido por B. Teissier. Principalmente las líneas de investigación son sobre geometría algebraica y sobre singularidades complejas e incluyen temas como equisingularidad, invariantes analíticos y topológicos, multiplicidades, conjuntos estratificados, etc. Otro investigador remarcable relacionado con este grupo (aunque en la actualidad se encuentra en Trieste) es Lê Dung Tráng. Además, en el resto de Francia existen muchos otros grupos también importantes como son los de Marsella, Niza, Burdeos, Grenoble o Toulouse.

•

Otro grupo significativo es el de la Universidad de Kaiserslautern (Alemania), especializado en álgebra computacional y liderado por G.M. Greuel. Son los responsables del desarrollo de un potente paquete de cálculo simbólico denominado Singular, el cual permite realizar cálculos con polinomios con especial énfasis en las necesidades del álgebra conmutativa, la geometría algebraica y la teoría de singularidades. En el resto de Alemania encontramos otros grupos importantes de singularidades, de entre los cuales podemos destacar el de la Universidad de Bonn (encabezado por E. Brieskorn) o la Universidad de Hannover (con W. Ebeling).

Por lo que respecta al resto de Europa, en la Universidad Católica de Lovaina (Bélgica), encontramos un grupo liderado por J. Denef, cuyas investigaciones son de una naturaleza más algebraica y tratan temas como resolución de singularidades, funciones zeta topológica y motivica, monodromía o espectros de Hodge. También podemos destacar un grupo importante en la Universidad de Utrecht (Holanda), con D. Siersma, que trabaja en singularidades complejas y en aplicaciones a geometría computacional. Otros grupos relevantes los encontramos en Dinamarca, Polonia o Hungría.

En Estados Unidos, los investigadores en singularidades se encuentran más dispersos y por tanto, los grupos son más reducidos (aunque no por ello menos relevantes). Así pues, podemos citar el grupo de A. Libgober en la Universidad de Illinois en Chicago, que trabaja principalmente en la topología de las variedades algebraicas. El grupo de la Universidad de North Carolina en Chapel Hill, con J. Damon, trabaja en singularidades de aplicaciones diferenciables y holomorfos además de aplicaciones a la visión computacional. Otro equipo destacable es el de T. Gaffney en Boston en la Northeastern University también especializado en singularidades reales y complejas de aplicaciones. Otro grupo significativo es el de S. Abhyankar en Purdue.

En Japón, en la Universidad Metropolitana de Tokio tenemos el seminario de singularidades de M. Oka. Las líneas de investigación de este grupo tratan principalmente sobre singularidades de las hipersuperficies complejas y sus propiedades topológicas, grupo fundamental, monodromía, etc. También en Japón, podemos destacar otro grupo de singularidades en la Universidad de Hokkaido en Sapporo, que trabaja principalmente en singularidades de aplicaciones diferenciables con aplicaciones a geometría diferencial, geometría simpléctica o ecuaciones diferenciales. El grupo está liderado por S. Izumiya. En 1997 se creó la Japanese Singularity Network, una red temática en singularidades coordinada desde esta universidad.

Por último, también hay que mencionar el grupo de singularidades de la Universidad de Sao Paulo en Sao Carlos (Brasil). El equipo está dirigido por M.A.S. Ruas y las líneas de investigación incluyen temas de singularidades de aplicaciones diferenciales y holomorfos, con aplicaciones

también a geometría diferencial y al estudio de ecuaciones diferenciales implícitas. Este grupo organiza desde 1990 un workshop bianual que ya se ha convertido en un clásico punto de encuentro de los singularistas de todo el mundo.

Dentro de España, encontramos un grupo bastante significativo de singularidades en la Universidad de Valladolid, con un enfoque más algebraico. Sus líneas de investigación más recientes están relacionadas con el estudio de arcos, valoraciones y aspectos combinatorios de las singularidades. También en esta misma universidad existe otro grupo dedicado al estudio de singularidades de foliaciones complejas, el cual está relacionado con el grupo de la Universidad Autónoma de Madrid.

Otro grupo importante de singularidades lo encontramos en la Universidad Complutense de Madrid y la Universidad de Zaragoza. Las líneas de investigación de este grupo están relacionadas con las singularidades de las hipersuperficies complejas, con especial énfasis en las propiedades topológicas, monodromía de trenzas, grupo fundamental, así como en el estudio de arcos, integración motivica y funciones zeta. Este grupo, junto con el de Valladolid, fueron los encargados de coordinar el nodo español de la European Singularity Network.

En la Universitat de Barcelona existe un grupo relacionado con singularidades, también con un enfoque bastante algebraico, dirigido principalmente al estudio de métodos cohomológicos de las variedades algebraicas. En esta misma universidad hay otro grupo de investigación sobre teoría de curvas polares, transformaciones de Cremona y espacios de moduli de curvas.

El grupo de singularidades de la Universidad de Sevilla tiene también un carácter fundamentalmente algebraico y sus líneas de investigación incluyen principalmente temas como cohomología de variedades algebraicas y D-módulos.

Finalmente, encontramos otro grupo de singularidades en la Universidad de Valencia. Las líneas de investigación se encuadran en las singularidades de aplicaciones diferenciales, estudio de invariantes analíticos y topológicos, aplicaciones a la geometría diferencial, así como aspectos globales de las singularidades. También en Valencia hay un grupo de sistemas dinámicos con un claro carácter topológico en el cual se estudian enlaces de órbitas periódicas de sistemas Morse-Smale y sistemas hamiltonianos.

En conclusión, podemos afirmar que el nivel de las singularidades en España es bastante bueno, con una participación importante de nuestros investigadores a nivel mundial, en lo que se refiere a congresos o publicaciones, y con conexiones con los principales grupos de investigación. No obstante, observamos que la mayoría de grupos españoles tiene un carácter algebraico, probablemente debido a la influencia de la escuela francesa. Así pues, la parte diferencial es la que menos representada está en nuestro país. También se echa en falta alguna línea de investigación sobre las recientes aplicaciones de las singularidades a otros campos, como la visión computacional, o bien en los aspectos más computacionales de las singularidades.