Invariantes, laminaciones y foliaciones

Fernando Alcalde Cuesta y Marta Macho Stadler

De manera intuitiva, una variedad foliada es una variedad descompuesta en subvariedades débilmente embebidas, llamadas *hojas* al estar dispuestas localmente como las hojas de un libro, aunque su topología y comportamiento global pueden ser muy complicados. En el caso de foliaciones *regulares,* se requiere además que éstas tengan la misma dimensión y estén dispuestas de manera *compatible*.

Desde una perspectiva actual, el término *foliado* no se limita a tales variedades, sino que hace referencia a otros sistemas como grupos y pseudogrupos de transformaciones, relaciones de equivalencia, grupoides, laminaciones o espacios foliados más generales. Al tiempo, los métodos clásicos de la teoría de foliaciones se han diversificado a partir de la aplicación de técnicas provenientes de áreas muy diversas de la geometría, la topología, el álgebra, el análisis o la teoría de probabilidades. Lo que podría interpretarse como una creciente abstracción, supone de hecho una vuelta a los orígenes que liga de manera esencial foliaciones y sistemas dinámicos desde múltiples puntos de vista, relacionados con la dinámica topológica, la teoría ergódica o la geometría no conmutativa. De hecho, esta visión de las foliaciones y los sistemas dinámicos como un todo es bastante natural, ya que, si la teoría cualitativa clásica de los sistemas dinámicos diferenciables puede describirse como una teoría geométrica de ecuaciones diferenciales ordinarias, la teoría de foliaciones puede interpretarse como una teoría geométrica de ecuaciones en derivadas parciales. La simple sustitución de los enteros o de cualquier otro grupo discreto de transformaciones por un pseudogrupo enlaza la dinámica discreta con la teoría de foliaciones.

Durante la segunda guerra mundial, C. Ehresmann propone a su alumno G. Reeb el estudio de las propiedades globales de los campos de elementos de contacto completamente integrables de dimensión arbitraria. Precisamente la nota [C. Ehresmann et G. Reeb, *Sur les champs d'éléments de contact complètement intégrables dans une variété continûement différentiable*, C. R. Acad. Sci. Paris 218 (1944) 955-957] da nacimiento a lo que el propio Reeb llamaría más adelante la *teoría de variedades foliadas*. El resultado clave de este trabajo es el actual *teorema de estabilidad global de Reeb en codimensión 1*, que los autores demuestran haciendo intervenir resultados de I. Bendixon sobre curvas definidas por ecuaciones diferenciales. Además, describen el celebérrimo ejemplo de un campo completo de planos completamente integrable sobre la esfera - *la foliación de Reeb* - respondiendo de manera afirmativa a una cuestión planteada por H. Hopf.

A partir de ese momento, ambos autores publican varias notas sobre variedades integrales y 1-formas completamente integrables. En [*Variétés feuilletées, feuilles voisines*, C.R. Acad. Sci. Paris **224** (1947) 1613-1614], Reeb utiliza por primera vez el nombre de *hoja* en vez de variedad integral completa e introduce la noción *de estructura de variedad foliada de dimensión p y de codimensión q=n-p* sobre una variedad de dimensión *n*, anunciando además su famoso teorema de *estabilidad en codimensión arbitraria.*

Alrededor de 1950, Ehresmann precisa la noción de *holonomía* - concretamente, introduce el *grupo de holonomía* de una hoja – una idea esencial en teoría de foliaciones que en realidad aparecía ya de manera manifiesta en los trabajos de Reeb. Con la aparición de este concepto quedan establecidos los fundamentos de la teoría de foliaciones.

En 1954, A. Haefliger se traslada a Estrasburgo para trabajar bajo la dirección de Ehresmann. El encuentro de Haefliger y Reeb en la antesala del despacho de Ehresmann dará lugar a que ambos refundan los trabajos que iban a mostrarle en un hermoso artículo [*Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan*, Enseign. Math., **3** (1957), 107-126], precursor de la teoría geométrica de foliaciones. En esos años, H. Seifert (Heidelberg), J.W. Milnor (Princeton), B.L. Reinhart (Princeton) y R.S. Palais (Harvard) trabajan también en teoría de foliaciones. En 1959, Reinhart introduce la noción de *foliación riemanniana*.

En [*Foliations and pseudogroups*, Amer. J. Math. **87** (1965) 79-102], R. Sacksteder (John Hopkins

University) formula el concepto global de *pseudogrupo de holonomía*.

Hacia 1962, D.V. Anosov describe las foliaciones estables e inestables asociadas al flujo geodésico sobre variedades de curvatura negativa. Poco después, tras interesarse en el estudio de las foliaciones e introducir la noción de *ciclo evanescente*, S.P. Novikov (Moscú) publica su famoso trabajo [*The Topology of Foliations*, Trans. Moscow Mat. Soc. **14** (1965) 268-304] sobre el teorema de la hoja compacta. En este momento, el estudio de las foliaciones es ya un tema destacado en el mundo de la investigación científica y muchos jóvenes matemáticos de Francia, EE.UU., U.R.S.S. y Japón se dedican a esta tarea.

En la década 1961-1970, se inicia el estudio de las foliaciones en España. La labor es obra personal de E. Vidal Abascal (Santiago de Compostela), quien se interesa en el tema a partir de sus trabajos previos sobre geometría integral de superficies. En el primer Coloquio Internacional de Geometría Diferencial de Santiago de Compostela, celebrado en 1963, Vidal Abascal establece los primeros contactos con destacados geómetras y topólogos de otros países. Los posteriores coloquios de 1968 y 1972 afianzan y amplían estas relaciones. La presencia de Reeb en el de 1968 muestra la importancia creciente de las foliaciones en estos coloquios. El de 1972 contará con la participación de algunos de los mejores especialistas en el tema: C. Godbillon, H. Goldschmidt, G. Hector, A. Kumpera, R. Lutz, J. Martinet, G. Reeb, B. L. Reinhart, R. Roussarie, R. Sacksteder y R. Thom. Durante este período, el estudio de las foliaciones se limita a Vidal Abascal y sus alumnos cuyas tesis doctorales son las primeras disertaciones en matemáticas defendidas en la Universidad de Santiago de Compostela. El porcentaje de artículos sobre foliaciones publicados por españoles supone un 7% del total en esa materia, pero en comparación con la producción externa, su trascendencia científica resulta más bien modesta, algo que no sorprende si se tiene en cuenta el impacto de algunos trabajos foráneos.

En la siguiente década, hay un aumento espectacular del número de investigadores y de trabajos dedicados a las foliaciones, lo que refleja fielmente el interés del área. Los temas concretos se hacen mucho más variados: foliaciones de codimensión 1 (P. Dippolito, C. Godbillon, S. Goodman, G. Hector, T. Inaba, R. Moussu, H. Rosenberg, R. Roussarie), foliaciones sobre esferas (A.H. Durfee, H.B. Lawson, P.A. Schweitzer, I. Tamura, W. Thurston, A. Verjovsky), invariantes (P. Molino, R. Bott, A. Haefliger, J. Heitsch, F. Kamber, Ph. Tondeur), estabilidad (W. Thurston, J.F. Plante), dinámica transversa (J.F. Plante, W. Thurston, J.N. Mather, D. Tischler, M. Hirsch, D. Sullivan), etc. Empiezan a aparecer trabajos sobre singularidades de foliaciones (R. Bott, R. Thom, C. Camacho, J. Palis).

En el estado español, el interés por las foliaciones sigue limitándose a la escuela de Vidal Abascal, aunque el traslado de sus primeros alumnos a otras universidades favorece la difusión geográfica del tema. En algún caso (Bilbao), esto supondrá la incorporación de nuevas generaciones de investigadores al estudio de las foliaciones; en otros (Granada, Valencia), hará que éstas estén presentes en muchos trabajos desarrollados en otras áreas. Hacia finales de los años 70 se incorporan a este tema investigadores de Barcelona, que establecen contacto con Haefliger.

La producción científica española cae a algo menos de 3%, lo que no es extraño dado el aumento cuantitativo y cualitativo de la producción mundial, aunque se observa una mejora en la calidad de los trabajos y de las revistas donde éstos se publican.

En la década de 1981 a 1990, aparecen los primeros artículos sobre teoría del índice en foliaciones (A. Connes, G. Skandalis, P. Baum, J. Renault) y se continúa investigando fundamentalmente sobre teoría geométrica (D. Gabai, E. Ghys, G. Levitt, G. Hector, V. Sergiescu, S. Matsumoto), propiedades asintóticas de las hojas (J. Cantwell, L. Conlon, A. Phillips, D. Sullivan), foliaciones riemannianas (R.A. Blumenthal, G. Cairns, Y. Carrière, E. Ghys, V. Sergiescu), invariantes (G. Duminy, J. Heitsch, S. Hurder, A. Lichnerowicz, T. Tsuboi) y foliaciones singulares (C. Bonatti, C. Camacho, D. Cerveau, A. Lins Neto, J.F. Mattei, J. Palis, J. Pradines, R. Moussu).

En España, el estudio de las foliaciones se amplía gracias a la primera generación de doctores surgidos de la escuela de Vidal Abascal y a otros grupos con amplios contactos en el extranjero. A los equipos establecidos en Santiago de Compostela, Valencia, Madrid y País Vasco, este último con estrechos contactos con Santiago de Compostela y la escuela de G. Hector, hay que añadirles otros dos núcleos importantes: Barcelona y Valladolid. En esta época, parte de los investigadores de Barcelona colaboran con P. Molino (Montpellier), G. Hector (Lille) y sus alumnos A. ElKacimi y E. Ghys en varias líneas relacionadas con las foliaciones riemannianas y la dinámica compleja. Por su parte, en Valladolid, se conforma un buen equipo dedicado al estudio de las singularidades y que mantiene estrechas relaciones con R. Moussu (Dijon) y la escuela brasileña de foliaciones. En este período, surge una nueva generación de investigadores formada en el extranjero o con formación postdoctoral externa.

El porcentaje de artículos publicados en el estado se acerca al 6%, doblando al de la década anterior, pero no sólo eso, sino que la calidad de los trabajos y de las revistas donde se publican aumenta notablemente.

En la década de 1991 a 2000, destaca el mayor ímpetu del estudio de las singularidades en foliaciones, concebidas desde diferentes puntos de vista, al tiempo que se mantienen las líneas iniciadas en la década anterior. También cobran importancia las relaciones con la física y otras áreas de la geometría y la topología como la geometría simpléctica o la teoría de Morse.

En España, el estudio de foliaciones sigue extendiéndose a partir de los grupos iniciales o gracias a la incorporación de investigadores de la segunda generación formados en el extranjero. Nuevas universidades, como las de Málaga o Santander, se añaden a la lista anterior. Comienza a haber investigadores que optan por permanecer en el extranjero, sobre todo en Francia y EE.UU, para desarrollar su trabajo. A finales de la década, empieza a cobrar importancia el trabajo de una tercera generación formada dentro y fuera de España. El porcentaje de artículos publicados se aproxima al 10% y el nivel de calidad de los trabajos sigue aumentando.

Desde 2001 a nuestros días, la producción española supone algo más del 15% de la producción mundial en el tema. Las relaciones con grupos extranjeros están ampliamente consolidadas, lo que contribuye al incremento del número de trabajos publicados y de su relevancia científica. Frente a la generación anterior, cuya formación doctoral se había desarrollado o bien dentro, o bien fuera de España, cada vez se hace más habitual que la labores de formación de los futuros doctores sean compartidas por investigadores de universidades españolas y extranjeras. Algunos de esos jóvenes doctores con diplomas españoles o extranjeros ocupan hoy puestos en universidades extranjeras con más medios y mejores expectativas de promoción.

No es fácil describir los problemas más importantes que siguen abiertos en teoría de foliaciones, ni siquiera resumir las grandes líneas de investigación, en un texto de estas características. No obstante, un repaso a los artículos recopilatorios más importantes y a las sesiones de problemas de algunos coloquios, de larga tradición en la teoría de foliaciones, deja entrever el pasado, el presente y el futuro de las foliaciones. Si se tiene en cuenta que muchos de los problemas planteados en los primeros coloquios siguen abiertos, no es sorprendente que pasado, presente y futuro vayan juntos.

El artículo *Differentiable Dynamical Systems* [Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 747-817] de S. Smale es un magnífico precedente de toda una serie de artículos donde se recogen a un tiempo los logros y los retos fundamentales de la teoría de foliaciones. El trabajo de H. B. Lawson [*The Quantitative Theory of Foliations*, Reg. Conf. Series in Math. 27, A.M.S., 1977] ha sido durante mucho tiempo una referencia fundamental para entender los progresos de la teoría de foliaciones hasta 1975. Otra referencia importante es el libro *Topology of Foliations* de I. Tamura [Trans. Math. Monographs 97, A.M.S., 1992]. En *Foliations* [J. Soviet Math., 18 (1982), 255-291], D.B. Fuks repasa los trabajos en teoría de foliaciones (revisados en la revista RZMatematika) durante los años 1970 a 1979. Un excelente complemento de estos trabajos es el artículo *Naissance des feuilletages, d'Ehresmann-Reeb à Novikov*, donde Haefliger explica el desarrollo de la teoría de foliaciones desde 1942 hasta 1970.

En cuanto a las sesiones de problemas en reuniones científicas, destacamos, los dos artículos *Problems in Foliations and Laminations*, recopiladas por D. Gabai, [Stud. Adv. Math. 2.2, A.M.S, 1997, 1-33] y *Foliation Geometry/Topology Problem Set*, en la página web **http://www.foliations.org/** actualizada por S. Hurder**.**

En la línea de la mejor tradición, el excelente trabajo de E. Ghys sobre el invariante de Godbillon-Vey [Astérisque 177-178 (1989), 155-181] ofrece, además de una descripción de los trabajos nunca publicados de G. Duminy, fiel a la letra y al espíritu de su autor, un estupendo recorrido por la evolución de la teoría de foliaciones desde 1971, fecha en la que C. Godbillon y J. Vey descubren su célebre invariante, hasta hoy, quince años después de ser publicado. No merece la pena intentar resumir lo que Ghys expone de manera inmejorable, sino sólo reseñar que su visión del trabajo de una larga lista de autores (J. Cantwell, L. Conlon, A. Connes, G. Duminy, E. Ghys, J. Heitsch, S. Hurder, A. Katok, S. Morita, R. Moussu, F. Pelletier, R. Roussarie, W. Thurston, T. Tsuboi) se orienta a dar una interpretación del invariante de Godbillon-Vey "*in the spirit of dynamical systems*" como reclamaba D. Sullivan en el coloquio de Río de Janeiro de 1976. El trabajo de A. Connes sobre la relación del invariante de Godbillon-Vey con el flujo de pesos del álgebra de Von Neumann asociada a una foliación y el posterior de E. Ghys, R. Langevin y P. Walczak sobre la entropía geométrica han supuesto avances importantes en esa dirección, aunque probablemente haga falta una buena noción de entropía medible para darles continuidad.

La historia del invariante de Godbillon-Vey ilustra bien la transformación de la teoría de foliaciones en los últimos 30 años y la vuelta a los orígenes referida al principio. Antes de 1971, las foliaciones se veían como estructuras fibradas generalizadas sobre variedades y su estudio no se consideraba un área de la topología, sino que se relacionaba con la teoría de ecuaciones diferenciales. Pero pronto el invariante de Godbillon-Vey proporcionó un nexo entre la geometría, la topología y la teoría de sistemas dinámicos, ampliado después a la teoría ergódica y la geometría no conmutativa.

Lo dicho antes permite dibujar el futuro de las foliaciones como un área multidisciplinar, básicamente indistinguible de la teoría de sistemas dinámicos, que requerirá la aplicación de técnicas muy variadas: geométricas, topológicas, analíticas, probabilísticas,... Esto no significa que pierdan interés problemas clásicos como determinar la influencia de la topología ambiente sobre la topología y la dinámica transversa de las hojas, sino que la perspectiva global es diferente, debido en buena medida a la supresión de importantes restricciones de las variedades foliadas clásicas, favoreciendo la convergencia con los sistemas dinámicos. En este sentido, el futuro de las foliaciones podría articularse en cuatro grandes líneas:

1) Supresión de la regularidad, es decir, estudio de foliaciones singulares.
2) Supresión de la diferenciabilidad transversa, sustituyendo las variedades foliadas por espacios topológicos o borelianos laminados, y tangente sustituyéndolas por relaciones de equivalencia o pseudogrupos, topológicos o medibles, dotados de estructuras simpliciales.
3) Supresión de la totalidad, es decir, estudio de propiedades genéricas en sentido topológico o medible.
4) Supresión de la conmutatividad, es decir, estudio de la geometría no conmutativa de A. Connes a partir de la sustitución de los espacios foliados por C*-álgebras, vía la desingularización de los espacios de hojas, y la traducción analítica de las propiedades topológicas, geométricas o dinámicas.

Desde esta perspectiva, la teoría de foliaciones está llamada a jugar un papel fundamental en la comprensión cualitativa del mundo físico (cosmología y física del estado sólido) y biológico (biología molecular, genómica y evolución). Hoy por hoy es un tema en pleno desarrollo que cada vez interviene en más campos de la ciencia.

En la actualidad, hay equipos trabajando en todas las líneas arriba citadas y puede considerarse que nuestro país ha alcanzado un buen nivel en el área.