Topología de baja dimensión

Joan Porti

A finales de la década de 1970 y principios de la de los 80, se producen importantes avances en la topología de baja dimensión, sobre todo en dimensiones 3 y 4, que suponen al menos dos importantes cambios. La primera transformación es un distanciamiento de ambas dimensiones: durante los años 60 y 70, muchos topólogos trabajaban tanto en dimensión tres como en cuatro, pero a partir de los años 80 los métodos divergen considerablemente y pocos topólogos trabajan simultáneamente en ambas, sólo los que se ocupan de ciertos campos como la homología de Floer. El segundo cambio relevante es un gran incremento de la influencia de la geometría y la física en la topología de bajas dimensiones, tanto en las motivaciones para definir nuevos objetos e invariantes como en los métodos y técnicas.

Como ilustración de los significativos avances de la época dorada de los 70-80, cito cinco medallas Fields, por orden cronológico: W. Thurston (Varsovia 1982), S. Donaldson y M. Freedman (Berkeley 1986), y V. Jones y E. Witten (Kyoto 1990). Estas cinco medallas van a servir para organizar esta exposición.

A pesar de intentar dar un panorama de la topología de bajas dimensiones, mi visión está sesgada desde el punto de vista de las variedades tridimensionales y mi desconocimiento de muchos de los otros aspectos.

- W. Thurston y la geometrización de las variedades tridimensionales

Los trabajos de W. Thurston a finales de los años 1970 revolucionaron la investigación en la topología de variedades de dimensión tres. Hasta entonces, los métodos utilizados eran principalmente combinatorios y Thurston vio la importancia de incorporar las ideas y técnicas de geometría, especialmente de la geometría hiperbólica. Ello revitalizó campos como el de los grupos kleinianos, hasta el momento relacionado sólo con el análisis complejo, y el de las variedades de representaciones. Su ambicioso programa de geometrización ofrecía por primera vez un panorama global de las variedades tridimensionales. Si su conjetura es cierta, para entender las variedades tridimensionales bastará entender las que tienen una métrica homogénea. Thurston probó su conjetura en el caso de las variedades llamadas “suficientemente grandes” e introdujo numerosos ejemplos y técnicas nuevas. En particular sus ideas fueron claves para la conjetura de Schmidt.

En el ámbito internacional la investigación en variedades tridimensionales ha sido animada en gran parte por el programa de Thurston, con los numerosos estudiantes que ha tenido en Estados Unidos, pero también por otras contribuciones muy significativas. En particular destacamos el invariante introducido por A. Casson en 1985, mediante las variedades de representaciones. M. Culler y P.B. Shalen aplicaron en el año 1983 las variedades de representaciones para encontrar superficies esenciales dentro de variedades con ideas algebraicas. Estos trabajos han dado lugar a numerosos y significativos avances.

Es conveniente mencionar aparte el trabajo sobre el flujo de Hamilton-Ricci. En 1982 R. Hamilton, en U. C. San Diego, desarrolló un programa para demostrar la conjetura de Thurston a partir del llamado flujo de Ricci, que es un flujo sobre el espacio de métricas de la variedad. Hamilton obtuvo resultados importantes, pero su programa estaba bloqueado por dificultades técnicas, que fueron resueltas en noviembre de 2002 por G. Perelman, de San Petersburgo. A partir de aquí Perelman anunció pocos meses después la demostración completa de dicho programa (es decir la conjetura de geometrización), pero en el momento de redactar este artículo (julio de 2004), todavía no se ha verificado su demostración, en la que muchas afirmaciones no están “suficientemente demostradas”. A pesar de las implicaciones topológicas (cómo la conjetura de Poincaré), el trabajo de Perelman es esencialmente de geometría riemanniana.

En España la topología tridimensional está representada por investigadores en las universidades Autònoma de Barcelona, Complutense de Madrid y Zaragoza. Entre los trabajos mencionamos las cubiertas ramificadas y nudos universales, es decir nudos a partir de los cuales se construye cualquier variedad tridimensional compacta como cubierta ramificada de orden finito del nudo fijado. En la línea de la geometrización, tienen numerosos trabajos sobre variedades de representaciones, deformaciones de estructuras, aritmeticidad de variedades y orbifolds.

Otra contribución importantísima de Thurston la tenemos en el tema de las foliaciones y los flujos en variedades. En particular los flujos en variedades tridimensionales han sido estudiados por diversos grupos (Francia, Estados Unidos, Rusia, etc.). En España un grupo de las universidades de València y Jaume I de Castelló estudia los flujos de Morse Smale no singulares en variedades tridimensionales.

- V. Jones y el grupo de trenzas

Las trenzas pueden estudiarse desde diversos puntos de vista, aunque sus principales aplicaciones están en la teoría de nudos. V. Jones investigaba en álgebras de von Neumann, cuando descubrió una similitud sorprendente entre el grupo de trenzas y una cierta álgebra de Hecke. Esta similitud fue clave para definir un nuevo invariante polinómico para nudos y enlaces en la esfera tridimensional, el polinomio de Jones. A partir de éste, se produjo una explosión de nuevos invariantes, muchos de ellos de origen cuántico.

A su vez, la investigación sobre el grupo de trenzas se ha dinamizado, y en particular se ha demostrado su linealidad, conjeturada probablemente desde 1935 cuando Bureau estudió su representación. También se ha desarrollado una aproximación algorítmica.

En España, la investigación en el grupo de trenzas y su relación con otros invariantes está representada por matemáticos de Sevilla.

Las trenzas pueden interpretarse como clases de isotopía de homeomorfismos del disco punteado en si mismo, es decir como elementos del mapping class group (MCG) del disco punteado. El MCG se estudia no sólo para el disco, sino para superficies en general, y en este campo también debemos mencionar la contribución de Thurston. A él se deben la clasificación de los automorfismos en tres tipos según su dinámica y la compactificación del espacio de deformaciones (espacio de Teichmüller). Un antiguo estudiante suyo, S. Kerckhoff de Stanford, demostró la conjetura de Nielsen: Todo grupo finito de automorfismos puede realizarse como un subgrupo de isometrías de la superficie para alguna métrica homogénea. La acción de algunos elementos del MCG en el espacio de Teichmüller está muy relacionada con los grupos kleinianos y la hiperbolización en dimensión tres. El cociente del espacio de Teichmüller por el MCG es el llamado espacio de moduli, muy relacionado con la geometría algebraica.

El estudio del MCG está representado en España por un grupo de la Universidad Autónoma de Madrid (espacios de moduli de superficies de Riemann) y por otro de la UNED (simetrías de superficies de Riemann).

- E. Witten y los nuevos invariantes

La capacidad de E. Witten para interpretar ideas físicas en matemáticas es excepcional, sobre todo en geometría y topología. Entre las numerosas aportaciones de Witten, de momento nos ocupamos de los invariantes que introdujo para variedades tridimensionales. En particular Witten interpretó el polinomio de Jones desde un punto de vista de teoría cuántica de campos. La investigación en los nuevos invariantes ha sido muy numerosa en el ámbito mundial, incluyendo los invariantes cuánticos y los invariantes de tipo finito o de Vasiliev.

En España el grupo más importante en estos invariantes es el grupo de física teórica de Santiago de Compostela. En sus contribuciones este grupo aporta nuevos y enriquecedores puntos de vista a estos invariantes, mediante la teoría de Chern Simons.

- M. Freedman y las variedades de dimensión 4 topológicas.

En 1981 Michael Freedman demostró la conjetura de Poincaré en dimensión cuatro, generalizando la demostración en dimensiones superiores, pero con una mayor complejidad técnica (las asas habituales en dimensión superior se sustituyeron por las llamadas asas de Casson). Además de la esfera, Freedman clasificó topológicamente las variedades cerradas de dimensión cuatro simplemente conexas, a partir de la forma de intersección en la homología de dimensión dos. Cabe decir que la conjetura de Poincaré diferenciable en dimensión cuatro todavía está abierta. Las técnicas utilizadas por Freedman han tenido poca continuidad y en los últimos años muy poca gente ha trabajado en ello. En particular no me consta ningún grupo activo en España.

- S. Donaldson y las variedades de dimensión 4 diferenciables.

Inmediatamente después del trabajo de Freedman, en 1982 S. Donaldson introdujo la teoría de “Gauge” en dimensión cuatro, con lo que dio una obstrucción para variedades de dimensión cuatro a ser diferenciables y demostró que las categorías topológica y diferenciable son completamente distintas en dimensión cuatro. El programa de Donaldson de analizar las ecuaciones auto-duales de Yang-Mills fue central en la teoría de variedades lisas de dimensión 4, hasta que en 1994 fue sustituido por el análisis de las ecuaciones de Seiberg-Witten (el mismo E. Witten de antes), que simplifica y expande los resultados y la aproximación originales de Donaldson. Esta línea de investigación se expandió con numerosas conexiones con la geometría algebraica, especialmente las superficies complejas (de dimensión real cuatro), y la topología simpléctica. Dichas conexiones han sido muy fructíferas en los últimos años, generando mucha actividad y resultados de calidad. Ello incluye los invariantes de Gromov-Witten, las variedades de Stein, las diversas homologías de Floer, la topología de contacto, etc. Podríamos decir que la época dorada en este campo que se inició en los ochenta no ha finalizado, cómo lo muestran resultados recientes de Donaldson, Gompf y Gromov, entre otros.

Quiero mencionar, desde mi punto de vista sesgado desde la dimensión tres, que con estas técnicas recientemente Kronheimer y Mrowka han resuelto la llamada Propiedad P: Se trata de una propiedad sobre la cirugía en nudos de la esfera tridimensional, que no se había conseguido demostrar con métodos puramente de la dimensión tres y ha sido necesaria la homología de Floer, que es uno de los “puentes” entre la dimensión tres y cuatro.

Este campo está representado en España por el grupo de investigadores que forma parte de la Red Temática de Geometría y Física, y que incluye, entre otros, investigadores en Madrid (CSIC, UAM, Complutense y Carlos III) y Barcelona (UB y UPC). Trabajan en teoría de Donaldson y en topología simpléctica.