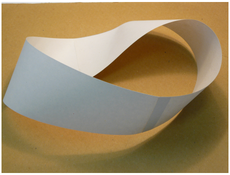
$MAT^2$
**MATerials MATemàtics**
Versió per a e-book del
treball no. 7 del volum 2013
www.mat.uab.cat/matmat

# La "cinta" de Moebius

**G. Guasp, A. Reventós**

Aquest objecte geomètric tan sorprenent, que si el tallem longitudinalment per la meitat queda d'una sola peça, també té d'altres propietats remarcables i, segons com es miri, força sorprenents.

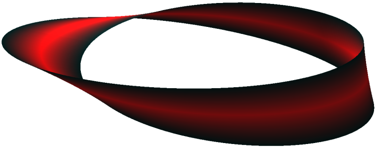


En general, quan s'explica per primer cop en què consisteix aquest objecte, es diu que és el resultat de prendre una cinta prou llarga i enganxar els seus extrems després de retorçar-la donant mitja volta. De forma immediata s'agafa una cinta de paper i es mostra com es pot realitzar un model físic d'aquesta figura semblant al que apareix en la il·lustració adjunta. Amb aquest model a les mans queda clar, quan negligim el gruix del material que s'ha utilitzat, que s'està davant d'una superfície no orientable (en la que després de fer una volta completa s'arriba al mateix lloc amb el costa dret canviat per l'esquerra) i que la seva vora consisteix en una única corba (a diferència d'un tub ordinari que té la vora formada per dues corbes, una en cada extrem). També es pot realitzar explícitament l'experiment consistent en tallar per la meitat aquest objecte per tal d'obtenir una sola peça tal i com dèiem al principi del text.

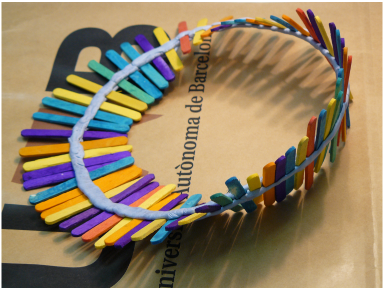
Quan comencen a aparèixer fets molt més curiosos és quan volem anar una mica més enllà de les propietats topològiques elementals i ens proposem estudiar amb més detall algun model d'aquesta superfície (per a fer un dibuix per ordinador, posar-la com exemple per a fer càlculs dels seus invariants geomètrics,...). Si es vol donar, de forma analítica, els punts d'aquesta superfície, la primera idea que ve al cap consisteix en pensar que la cinta de Moebius es pot obtenir com el resultat de prendre un segment que es mou sobre una circumferència al mateix temps que gira al voltant del seu punt mig (en el pla perpendicular a la circumferència) de forma que en completar la volta ha invertit els extrems (això s'aconsegueix fent que la velocitat de gir al voltant del punt mig sigui la meitat de la velocitat angular amb la qual gira sobre la circumferència). Així, per exemple, les posicions $(x, y, z)$ de l'espai descrites per les equacions

$$\begin{aligned} x &= (1 + v\,\cos(u/2))\,\cos(u) \\ y &= (1 + v\,\cos(u/2))\,\sin(u) \\ z &= v\,\sin(u/2) \end{aligned} \tag{1}$$

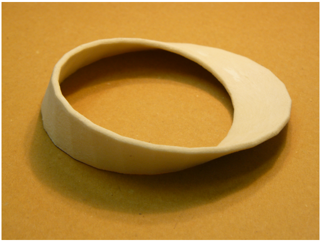
(pels valors de $u$ entre 0 i $2\pi$ i els de $v$ entre $-1/4$ i $1/4$) descriu un segment de longitud $1/2$ girant sobre si mateix i al voltant de la circumferència unitat del pla $xy$ que es pot dibuixar i dóna un gràfic de la forma



Si es vol fabricar un model físic d'aquesta superfície es pot fer com en la imatge següent




on el palets s'enganxen a un anell de filferro i representen el segment que va girant al voltant de la circumferència. Amb una impressora 3D a ma, i utilitzant com a punt de partida les equacions anteriors per tal de generar les equacions d'un objecte tridimensional (que és el que fabrica la impressora 3D), també es pot obtenir un model com el d'aquesta altra imatge:



I ara, què té de sorprenent aquesta realització de la cinta de Moebius? Doncs que queda molt lluny d'una *cinta*, com es posa de manifest si inteneu recobrir la superfície dels palets amb una cinta de paper o, encara millor, amb un retall de roba no elàstica. Comprovareu que no hi ha manera de tapar els palets sense que comencin a sortir plecs per tot arreu. Quina diferència hi ha, doncs, entre la cinta de paper retorçada i els palets que giren? Es pot descriure amb una parametrització la cinta de Moebius construïda a partir d'una cinta de paper? Podem fer una cinta de Moebius a partir d'una tira de paper de manera que la circumferència central estigui continguda en un pla?[1]

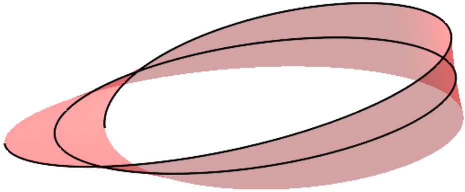
# 1 Càlculs en la banda de Moebius "de palets"

Per als que no es conformen amb les proves materials i prefereixen evidències numèriques, es poden fer alguns càlculs, no massa complicats, que deixen clar que és impossible que l'objecte definit per les equacions (1) es pugui obtenir només retorçant una cinta de paper.

El primer que es pot observar és que, si partim d'una cinta de paper, la longitud de qualsevol corba que dibuixem sobre ella no canviarà pel fet de retorçar la cinta. Així, per exemple, la longitud de les línies longitudinals paral·leles al costats llargs de la cinta seran totes iguals a la longitud total de la cinta. En aquest model la línia central que correspon a la condició $v = 0$ no és altra cosa que la circumferència de radi unitat en el pla $xy$

$$x = \cos(u)$$
$$y = \sin(u)$$
$$z = 0$$

(on $u$ va de 0 a $2\pi$) que té longitud $2\pi$ com tothom sap. Si la superfície provingués d'una cinta de paper caldria esperar doncs que la línia que genera un qualsevol dels dos costats llargs de la cinta també tingués longitud $2\pi$.



Per exemple, la corba que apareix quan es considera $v = 1/4$ serà

$$\begin{aligned} x &= (1 + \frac{\cos(u/2)}{4})\ \cos(u) \\ y &= (1 + \frac{\cos(u/2)}{4})\ \sin(u) \\ z &= \frac{\sin(u/2)}{4} \end{aligned}$$

que té com a vector tangent

$$\begin{aligned} x' &= -\sin(u) - \frac{\sin(u/2)\cos(u)}{8} - \frac{\cos(u/2)\sin(u)}{4} \\ y' &= \cos(u) - \frac{\sin(u/2)\sin(u)}{8} + \frac{\cos(u/2)\cos(u)}{4} \\ z' &= \frac{\cos(u/2)}{8} \end{aligned}$$

i, per tant, el seu element infinitesimal de longitud serà

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\ du \\ &\qquad = \frac{\sqrt{4\ \cos^2(u/2) + 32\ \cos(u/2) + 65}}{8}\ du \end{aligned}$$

de forma que la seva longitud es calcularà amb la integral

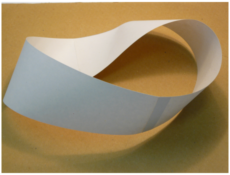
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{4\,\cos^2(u/2) + 32\,\cos(u/2) + 65}}{8}\, du\,.$$

Com en molts casos, l'única manera raonable de calcular la integral que correspon a la longitud d'una corba és el càlcul aproximat ja que aquesta mena d'integrals són del tipus de les famoses *integrals el·líptiques*. En aquest cas concret, el càlcul dóna un valor aproximat de la longitud

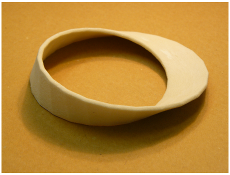
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{4\,\cos^2(u/2) + 32\,\cos(u/2) + 65}}{8}\, du \simeq 6.333652527$$

que és diferent (no gaire) al valor de $2\pi \simeq 6.283185308$.

Tot i que aquesta objecció sobre les longituds ja és prou forta, el càlcul que mostra sense cap marge de rèplica la impossibilitat de fabricar amb una cinta de paper una superfície del tipus que descriuen les equacions (1) és el de la *curvatura de Gauss*. Gauss va definir la curvatura d'una regió d'una superfície com el quocient entre l'àrea del recorregut del vector normal a aquesta regió dins l'esfera unitària i l'àrea d'aquesta regió. És clar que qualsevol regió d'un pla tindrà curvatura nul·la ja que el vector normal és constant[2]. Les superfícies que admeten una isometria local amb el pla (com és el cas d'una superfície que es pot fabricar amb una cinta de paper) també tenen curvatura de Gauss igual a 0 tal i com es veurà en la secció següent.



$\neq$



Es pot definir un valor de curvatura en cada punt, considerant el límit dels valors de curvatura de regions que contenen aquest punt i hi tendeixen. I passant per alt el fet que la superfície amb la que s'està treballant no és orientable i això té alguns inconvenients a l'hora de fer els càlculs, es pot veure que la curvatura de Gauss $K$ en el punt que correspon a uns valors dels paràmetres $(u, v)$ serà

$$K = -\frac{1}{4\,\left(v^2\,\cos^2(u/2) + 2\,v\,\cos(u/2) + v^2/4 + 1\right)^2}\,.$$

D'aquí queda clar que el valor de $K$ sempre resulta negatiu (per exemple, quan $v = 0$ resulta $K = -1/4$) i, per tant, el model de cinta de Moebius descrit per les equacions (1), que es pot dibuixar fàcilment amb un programa de representació gràfica i del que s'en pot fer un model aproximat "amb palets", no es podrà construir mai a partir d'un full de paper.

## 2 Un model de cinta de Moebius “autèntica”

Si es vol descriure amb unes equacions (parametrització) una cinta de Moebius que, com a mínim, verifiqui la propietat de tenir curvatura nul·la s’ha d’utilitzar una mica més de Geometria diferencial. Els treballs [5, 6] donen una resposta afirmativa a aquesta qüestió i proposen fórmules explícites. Bàsicament, l’estratègia que proposen consisteix en construir una superfície formada per segments rectilinis que es repengen sobre una corba, de forma semblant al que s’aconsegueix amb les equacions (1), controlant que en aquest procés l’objecte resultant sigui una cinta de Moebius i, ara sí, de curvatura nul·la.

A continuació veurem quines són aquestes precaucions i com s’aconsegueixen de forma explícita unes equacions que permeten fer el dibuix d’una cinta de Moebius "autèntica". Tot i que els càlculs i arguments que sortiran no són complicats, és recomanable donar un cop d'ull a algun tractat de la teoria de corbes i superfícies (com, per exemple, [1]) abans de seguir amb el que ve a continuació si no s'està familiaritzat amb els conceptes relacionats amb el tema[3].

## 2.1 Superfícies reglades

En tots els càlculs que aniran apareixent ens centrarem en un tipus de superfícies especial. Es tracta de les *superfícies reglades*. Els càlculs que ens interessen es poden fer en aquesta classe de superfícies sense massa complicacions i, d'entrada, són els millors candidats per contenir les superfícies que es poden fabricar amb una cinta de paper.

Es diu que una superfície de $\mathbb{R}^3$ és reglada si es pot construir fent passar una recta (o un segment rectilini) per cada un dels punts d'una corba. Això vol dir que una superfície reglada admet una parametrització de la forma

$$\varphi(u,v) = \gamma(u) + v\,\beta(u)\,,$$

on $\gamma(u)$ descriu una corba de l'espai i $\beta(u)$ representa la *direcció* de la recta que passa pel punt $\gamma(u)$ (per tant, es pot suposar que la longitud del vector $\beta(u)$ sempre és $|\beta(u)| = 1$) i, per qüestions tècniques de regularitat, es suposarà com és habitual que les derivades $\gamma'(u)$, $\beta'(u)$ són sempre diferents de 0.

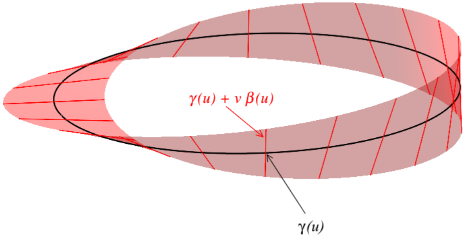
Les rectes determinades per $\varphi(a,v)$ amb $a$ constant es denominen *generatius* de la superfície i la corba $\gamma(u)$ és la *directriu*.

En l'exemple de la cinta de Moebius "de palets" la directriu $\gamma$ vindria donada per

$$\gamma(u) = (\cos(u), \sin(u), 0)$$

mentre que la família de *direccions* (de les generatius) seria

$$\beta(u) = (\cos(u)\ \cos(u/2), \sin(u)\ \cos(u/2), \sin(u/2))\,.$$




Altres exemples de superfícies reglades que apareixen de forma immediata són els *cilindres* (rectes paral·leles a una direcció donada que passen per cada un dels punts d'una corba que està en un pla perpendicular a aquesta direcció), els *cons* (rectes que passen per un punt fix i pels punts d'una corba plana, en un pla que no conté el punt donat) i algunes de les quàdriques, com el *paraboloide hiperbòlic* i *l'hiperboloide d'un full*, que són doblement reglades ja que per cada punt hi passen dues rectes totalment contingudes a la superfície (a [4, § 9] podeu veure quines són les direccions d'aquests parells de rectes en cada un dels punts de la quàdrica). Justament per aquesta propietat s'utilitza a vegades aquesta forma en la construcció de cobertes o xemeneies ja que permet obtenir estructures que són alhora robustes i estilitzades.

## 2.2 Curvatura d'una superfície reglada

Com que una de les maneres de calcular la curvatura de Gauss $K$ en un punt consisteix en fer el producte de les *curvatures normals* màxima $k_{\text{màx}}$ i mínima $k_{\text{mín}}$ en aquest punt (entenent per curvatura normal en un punt la curvatura de qualsevol de les corbes planes que s'obtenen fent la intersecció d'un pla perpendicular a la superfície amb aquesta) i per cada punt d'una superfície reglada hi passa una recta continguda a la superfície (al llarg de la qual la curvatura normal serà 0) es compleix $k_{\text{mín}} \leq 0 \leq k_{\text{màx}}$ i, per tant, el valor de $K = k_{\text{màx}} \cdot k_{\text{mín}}$ en cada punt serà sempre menor o igual que 0.

La proposició següent dóna una caracterització de les superfícies reglades amb curvatura de Gauss 0 que a partir d'ara anomenarem *superfícies desenvolupables*.

**Proposició 1.** *La curvatura de Gauss d'una superfície reglada és igual a* 0 *en tots els seus punts si, i només si, el vector normal a la superfície (i, per tant el pla tangent) és constant al llarg de cada generatriu.*

Per tal de fer els càlculs que demostren aquest fet, utilitzarem la notació habitual de posar un subíndex per a designar les derivades d'una funció vectorial respecte de les seves variables (o més d'un en el cas de derivades d'ordre superior). Així, per exemple $\varphi_u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\varphi_v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$ donaran la base del pla tangent a la superfície determinada per la parametrització $\varphi(u, v)$.

Notem ara que, si denotem per[4]

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\varphi_u \times \varphi_v|} \left(\varphi_u \times \varphi_v\right)$$

el vector normal a la superfície, els coeficients $e$, $f$, $g$ de la *segona forma fonamental* (en la base $\varphi_u$, $\varphi_v$) venen donats per

$$e = \varphi_{uu} \cdot \mathbf{n}$$
$$f = \varphi_{uv} \cdot \mathbf{n}$$
$$g = \varphi_{vv} \cdot \mathbf{n}\,.$$

Per a una superfície reglada de la forma $\varphi(u, v) =$

$\gamma(u) + v\,\beta(u)$ es verifica

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= \gamma'(u) + v\,\beta'(u) \\
\varphi_v &= \beta(u) \\
\varphi_{uu} &= \gamma''(u) + v\,\beta''(u) \\
\varphi_{uv} &= \beta'(u) \\
\varphi_{vv} &= 0
\end{aligned} \tag{2}$$

de forma que el coeficient $g = \varphi_{vv} \cdot \mathbf{n}$ de la segona forma fonamental és igual a 0.

Com que el valor de la curvatura de Gauss $K$ d'una superfície és el quocient entre el *determinant* de la segona forma fonamental $e\,g - f^2 = -f^2$ i una quantitat positiva (el quadrat del valor de l'element infinitesimal d'àrea, $|\varphi_u \times \varphi_v|^2$ ) queda clar (un altre cop) que $K \leq 0$ i també que per estudiar les situacions en les que $K = 0$ cal plantejar-se quan és que el valor de $f$ és 0.

En funció de $\gamma$ i $\beta$ el valor de $f$ és

$$
\begin{aligned}
f &= \varphi_{uv} \cdot \mathbf{n} \\
&= \beta'(u) \cdot \left( \frac{1}{|\varphi_u \times \varphi_v|} \Big( \gamma'(u) \times \beta(u) + v \left( \beta'(u) \times \beta(u) \right) \Big) \right) .
\end{aligned}
$$

Però, com que $\beta'(u) \times \beta(u)$ és perpendicular a $\beta'(u)$, la fórmula es redueix a

$$
f = \frac{1}{|\varphi_u \times \varphi_v|} \Big( \beta'(u) \cdot \left( \gamma'(u) \times \beta(u) \right) \Big)
$$

i aquí queda clar que $f = 0$ si, i només si, $\beta'(u)$ és combinació lineal de $\gamma'(u)$ i $\beta(u)$. Això també és equivalent a demanar que $\varphi_u = \gamma'(u) + v\,\beta'(u)$ sigui combinació lineal de $\gamma'(u)$ i $\beta(u)$. Utilitzant ara $\varphi_v = \beta(u)$ resulta en aquest cas

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n} = \frac{1}{|\varphi_u \times \varphi_v|} \left( \varphi_u \times \varphi_v \right) \\
= \frac{1}{|\gamma'(u) \times \beta(u)|} \left( \gamma'(u) \times \beta(u) \right)
\end{aligned}
$$

i, com que aquesta expressió no depèn de la variable $v$, el vector normal a superfície (i també el pla tangent) és constant al llarg de cada una de les generatrius $u =$ constant.

Recíprocament, si es té en compte que, per construcció, $\varphi_u$ i $\mathbf{n}$ són perpendiculars ($0 = \varphi_u \cdot \mathbf{n}$) resulta

$$0 = \frac{\partial(\varphi_u \cdot \mathbf{n})}{\partial v} = \varphi_{uv} \cdot \mathbf{n} + \varphi_u \cdot \mathbf{n}_v$$

i aleshores

$$f = \varphi_{uv} \cdot \mathbf{n} = -\varphi_u \cdot \mathbf{n}_v\,.$$

Per tant, si $\mathbf{n}$ és constant al llarg de les generatrius ($\mathbf{n}_v = 0$) es té $f = 0$ i en conseqüència $K = 0$.

## 2.3 Desenvolupable tangencial

Sense sortir del món de les superfícies reglades, veurem en aquest apartat una prova de la caracterització de les superfícies que són localment isomètriques al pla (o, dit d'una altra forma, que es poden *desplegar*) com aquelles que tenen curvatura de Gauss igual a 0.

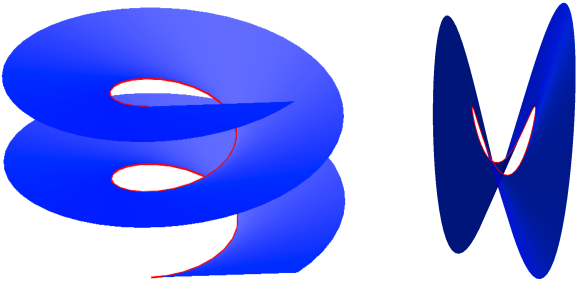
Les protagonistes d'aquesta història seran les superfícies obtingudes prenent les línies tangents a una corba de l'espai. Cada una d'aquestes superfícies s'anomena la *desenvolupable tangencial*[5] de la corba. Tal i com queda clar amb la descripció que acabem de donar, donada una corba $\gamma(s)$, la seva desenvolupable tangencial serà la superfície parametritzada per

$$\varphi(s,v) = \gamma(s) + v\,\gamma'(s)\,.$$

Com que els *vectors tangents* a aquesta superfície queden determinats per

$$\begin{aligned}\varphi_s(s,v) &= \gamma'(s) + v\,\gamma''(s) = \gamma'(s) + v\,k(s)\,\mathbf{N}(s)\\ \varphi_v(s,v) &= \gamma'(s)\,,\end{aligned} \tag{3}$$

on $\mathbf{N}$ denota el vector normal principal a la corba i $k$ la seva curvatura, queda clar que per a poder



Les desenvolupables tangencials d'un parell de corbes. En tots dos dibuixos apareix només una part del que correspon a $v > 0$.

assegurar la regularitat de la superfície cal imposar que $k(s) \neq 0$ i, a més, restringir-nos a valors del paràmetre $v$ diferents de 0 (hi haurà essencialment dues components connexes diferents, la que correspon a $v > 0$ i la de $v < 0$). En aquest context es diu que la corba $\gamma$ és *l'eix de regressió* de la superfície.

Abans de començar a fer més càlculs sobre aquest tipus de superfícies, cal recordar les *fórmules de Frenet* associades a una corba de l'espai que, de fet, ja s'han fet servir en l'afirmació anterior sobre la regularitat de la desenvolupable tangencial. Donada una corba parametritzada per l'arc $\gamma(s)$ es considera en cada punt el *triedre de Frenet* $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$, on $\mathbf{T} = \gamma'$ és el vector (unitari) tangent a la corba, $\mathbf{N}$ és el vector unitari que té la mateixa direcció i sentit que $\gamma''$ (és a dir $\mathbf{N} = \dfrac{1}{|\gamma''|}\,\gamma''$) i $\mathbf{B}$ és el producte vectorial dels anteriors $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$. Tenint en compte que $\gamma'$ i $\gamma''$ són perpendiculars quan parametritzem una corba per l'arc, el triedre de Frenet dóna una referència ortonormal de $\mathbb{R}^3$ per a cada punt de la corba i es diu que $\mathbf{N}$ és el *vector normal principal* i $\mathbf{B}$ el *binormal* a la corba. Les fórmules de Frenet donen, aleshores, les relacions que hi ha entre les derivades dels vectors del triedre de Frenet

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}' &= k\,\mathbf{N}\\
\mathbf{N}' &= -k\,\mathbf{T} + \tau\,\mathbf{B}\\
\mathbf{B}' &= -\tau\,\mathbf{N}\,,
\end{aligned}$$

on les funcions escalars $k$ i $\tau$ són respectivament la *curvatura* i la *torsió* de la corba $\gamma$. Aquestes equacions diferencials que verifiquen els vectors del triedre de Frenet són el mitjà a través del que es pot obtenir l'anomenat *Teorema fonamental de la teoria local de corbes* que assegura l'existència i unicitat (llevat de moviments rígids de l'espai) d'una corba amb una curvatura i torsió donades.

Tot seguit veurem la llista de propietats de les desenvolupables tangencials, amb un esquema de la seva justificació, que finalment permeten concloure l'equivalència entre superfícies desenvolupables i superfícies reglades localment equivalents al pla.

**1:** *La desenvolupable tangencial d'una corba és sempre una superfície desenvolupable.*

Tenint en compte les equacions (3), el vector normal $\mathbf{n}(s,v)$ a la desenvolupable tangencial de la corba $\gamma$ serà

$$\mathbf{n}(s,v) = \frac{1}{|\varphi_s \times \varphi_v|}\left(\varphi_s \times \varphi_v\right) = -\mathbf{B}(s)\,.$$

Per tant és constant al llarg de les generatius i, com a conseqüència de la proposició 1, la superfície és desenvolupable.

**2:** *Els coeficients de la primera forma fonamental*

$$E = \varphi_s \cdot \varphi_s, \quad F = \varphi_s \cdot \varphi_v \quad i \quad G = \varphi_v \cdot \varphi_v$$

*de la desenvolupable tangencial* $\varphi(s,v) = \gamma(s) + v\,\gamma'(s)$ *no depenen de la torsió de la corba* $\gamma(s)$*.*

Les fórmules de Frenet, juntament amb els valors de $\varphi_s$ i $\varphi_v$ de (3), donen

$$E = \gamma' \cdot \gamma' + v^2\, k^2\, (\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}) = 1 + v^2\, k^2$$
$$F = \gamma' \cdot \gamma' = 1$$
$$G = \gamma' \cdot \gamma' = 1\,,$$

on apareix la curvatura però no la torsió.

**3:** *Tota superfície desenvolupable (regular) és la desenvolupable tangencial d'una certa corba.*

Tenint en compte que la desenvolupable tangencial d'una corba qualsevol $\sigma(s)$ s'expressa com $\psi(s,t) = \sigma(s) + t\,\sigma'(s)$, donada una superfície desenvolupable de la forma

$$\varphi(s,v) = \gamma(s) + v\,\beta(s)\,,$$

on $\gamma(s)$ i $\beta(s)$ són corbes regulars i suposarem que $|\beta(s)| = 1$, el que s'ha de fer és localitzar una corba $\sigma(s) = \varphi(s,t(s)) = \gamma(s) + t(s)\,\beta(s)$

sobre el recorregut de $\varphi$ tal que $\sigma'(s)$ sigui un múltiple de $\beta(s)$ (així $\sigma(s)$ serà un punt de la generatriu corresponent a cada valor del paràmetre $s$ i el seu vector tangent serà proporcional al vector director de la generatriu que hi passa).

Demanar que $\sigma'$ sigui múltiple de $\beta$ és equivalent a demanar que el producte vectorial d'aquests dos vectors compleixi $\sigma' \times \beta = 0$. Però com que

$$\sigma' = \gamma' + t'\,\beta + t\,\beta'$$

aquesta condició es pot escriure com

$$0 = \gamma' \times \beta + t\,(\beta' \times \beta)\,. \tag{4}$$

Dit això, recordeu que per la proposició 1 el vector normal a la superfície $\mathbf{n}(s,v)$ és constant al llarg de les generatrius (no depèn de $v$), ja que tenim una superfície desenvolupable, i per tant si s'escriu $\mathbf{n} = \ell\,(\varphi_s \times \varphi_v)$ (amb

$\ell = 1/|\varphi_s \times \varphi_v| \neq 0$) tindrem (tingueu en compte que $\varphi_{vv} = 0$)

$$0 = \mathbf{n}_v = \ell_v \left(\varphi_s \times \varphi_v\right) + \ell \left(\varphi_{sv} \times \varphi_v\right).$$

Ara les equacions (2) deixen aquesta igualtat com

$$0 = \ell_v \left(\gamma' \times \beta\right) + \left(v\,\ell_v + \ell\right)\left(\beta' \times \beta\right).$$

Sobre el recorregut de $\gamma$ ($v = 0$) aquesta equació es redueix a

$$0 = \ell_v(s,0)\left(\gamma' \times \beta\right) + \ell(s,0)\left(\beta' \times \beta\right),$$

fet equivalent a dir que existeix una funció $\lambda(s)$ tal que $\gamma' \times \beta = \lambda\left(\beta' \times \beta\right)$ (tingueu en compte que les condicions sobre $\beta$ asseguren que $\beta' \times \beta \neq 0$ i que, si volem que la superfície $\varphi$ sigui regular caldrà que $\varphi_s \times \varphi_v = (\gamma' + v\,\beta') \times \beta$ també sigui, com a mínim quan $v = 0$, diferent de 0). Això fa que la funció $-\lambda$ sigui la $t$ que es necessitava en l'equació (4).

**4:** *La desenvolupable tangencial d'una corba és localment isomètrica al pla (es pot* desplegar *sobre el pla).*

En la demostració d'aquesta propietat hi ha dos punts clau: el primer, i principal, és que per a les desenvolupables tangencials la primera forma fonamental no depèn de la torsió de l'eix de regressió; el segon és el teorema fonamental de la teoria local de corbes (mencionat abans), que assegura que una corba queda determinada donant només la seva curvatura i torsió.

En concret, donada la desenvolupable tangencial

$$\varphi(s,v) = \gamma(s) + v\,\gamma'(s)$$

amb eix de regressió $\gamma(s)$ i designant per $k(s)$ la seva curvatura i per $\tau(s)$ la seva torsió, es pot considerar la família de corbes $\gamma_t(s)$ (definides per a $0 \leq t \leq 1$) cada una d'elles amb curvatura $k_t(s) = k(s)$ i torsió $\tau_t(s) = t\,\tau(s)$ (imposant, és clar, $\gamma_1(s) = \gamma(s)$). Associades a cada una d'aquestes corbes es tenen les desenvolupables tangencials corresponents

$$\varphi_t(s,v) = \gamma_t(s) + v\,{\gamma_t}'(s)$$

que seran totes elles isomètriques entre si ja que els coeficients de la primera forma fonamental de cada una són els mateixos (en la seva expressió només hi intervé la curvatura, que és la mateixa per a totes les corbes de la família). Així resulta que $\varphi_1$, que és la superfície original, és isomètrica a $\varphi_0$ que està continguda en un pla (és la desenvolupable tangencial de la corba $\gamma_0$ amb torsió $\tau_0(s) = 0$ i, com és ben conegut, la condició de torsió nul·la és la que caracteritza les corbes planes).

Com a resum de tot això, poden enunciar:

**Proposició 2.** *Les superfícies desenvolupables són localment isomètriques al pla.*

Ja que les superfícies desenvolupables són desenvolupables tangencials d'una corba.

## 2.4 La cinta de Moebius "autèntica"

Arribats a aquest punt, si es busca una superfície que representi una cinta de Moebius *autèntica*, l'estratègia que es proposa a [5] consisteix en prendre una corba tancada a l'espai tal, que en donar una volta i arribar a l'origen un altre cop el vector normal ha canviat de sentit, i *fabricar* una superfície reglada amb curvatura nul·la utilitzant aquesta corba com a directriu (de forma que s'obtingui una superfície *desplegable*) que tingui com a vector normal el vector normal principal de la corba (per tal d'obtenir una banda de Moebius).

A més, aquesta forma de construir la superfície té un parell més de conseqüències significatives. En primer lloc, i encara que no s'ha mencionat abans, és obvi que les generatrius d'una superfície reglada són *geodèsiques* d'aquesta superfície (són rectes de l'espai i, per tant, tenen derivada segona nulla) i quan triem la superfície imposant que la seva direcció normal coincideixi amb la normal principal de la directriu fem que aquesta directriu també sigui una geodèsica en la superfície. En particular, després de qualsevol procés de *desplegament* de la superfície, la directriu s'haurà de convertir en una recta del pla i la superfície en un *banda* al seu voltant (exactament el que plantejàvem des del principi).

Si $\gamma(s)$ és una corba i $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ el seu triedre de Frenet, una superfície reglada $\varphi(s,v)$ ortogonal al vector $\mathbf{N}$ haurà de ser de la forma

$$\varphi(s,v) = \gamma(s) + v\left(\lambda(s)\,\mathbf{T}(s) + \mu(s)\,\mathbf{B}(s)\right)$$

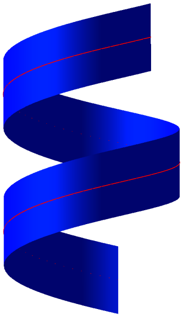
(com a mínim, les directrius haurien de ser perpendiculars a $\mathbf{N}$). Si s'imposa que el vector $\mathbf{N}$ sigui el normal a superfície al llarg de cada generatriu (això comporta que la superfície sigui desenvolupable, segons hem vist a la proposició 1), un càlcul pràcticament immediat permet veure que les funcions $\lambda$ i $\mu$ han de verificar

$$k\,\lambda - \tau\,\mu = 0$$

i, per tant, es pot parametritzar una superfície reglada, desenvolupable, amb directriu $\gamma$ i amb normal $\mathbf{n}(s,v)$ al llarg de les rectes generatrius igual al normal principal $\mathbf{N}(s)$ de $\gamma$ prenent

$$\varphi(s,v) = \gamma(s) + v\left(\frac{\tau(s)}{k(s)}\,\mathbf{T}(s) + \mathbf{B}(s)\right).$$

Aquesta parametrització té, a més, l'avantatge que el paràmetre $v$ dóna la distància que hi ha sobre la superfície des del punt $\varphi(s,v)$ fins a la corba directriu i, per tant, es poden prendre els valors de $(s,v)$ en un *rectangle* de la forma $[0,\ell]\times[-\epsilon,\epsilon]$ (on $\ell$ representa la longitud de $\gamma$) i obtenir una *cinta* de "llargada" $\ell$ i "amplada" $2\epsilon$. Aquesta construcció és molt clara, per exemple, si es considera com a corba $\gamma$ una hèlix de la forma $\gamma(s) = (a\,\cos(s), a\,\sin(s), b\,s)$, on $a,b>0$, ja que la curvatura i la torsió són constants al llarg de la corba, amb valors $k = a/(a^2+b^2)$ i $\tau = b/(a^2+b^2)$, de forma que el quocient $k/\tau$ val $b/a$ i la superfície que apareix és de la forma



Malauradament, les coses no són tan simples si es vol fabricar la banda de Moebius. Si la normal principal d'una corba tancada canvia de sentit quan es dóna una volta, la curvatura en el punt corresponent ha de ser 0 i, per tant, el quocient $\tau/k$ té una singularitat. Cal, doncs, una mica més de treball si es vol aconseguir una superfície regular en tots els punts.

Justament a [5] es fan les consideracions necessàries per tal d'obtenir una corba amb les característiques que volem (encara que no hi apareix el dibuix, segurament per limitacions tècniques de l'època en què es va escriure). La corba que es proposa en aquest treball és la que ve donada per $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ amb les expressions següents[6]

$$\begin{aligned} x(s) &= 4\sin(s) \\ y(s) &= (1-\cos(s))^3 \\ z(s) &= 4\sin(s)(1-\cos(s)) \end{aligned}$$

on es pot observar de forma immediata que es prenen expressions trigonomètriques en cada component per tal d'aconseguir, d'una forma simple, una corba tancada que en $s = 0, 2\pi$ passa per l'origen tangencialment a l'eix de les $x$ ($\gamma'(0) = (4, 0, 0)$). Tampoc costa massa comprovar que la corba és regular ($\gamma'(s) \neq 0$ per a qualsevol valor de $s$).

Com que per tal de veure que aquesta corba és un bon candidat per a *fabricar* una banda de Moebius s'ha de calcular el seu triedre de Frenet, la curvatura i la torsió i, com gairebé sempre, el paràmetre $s$ no correspon al paràmetre arc de $\gamma$, les fórmules per a calcular cada un d'aquests elements són una mica més complicades que les que s'en dedueixen de les fórmules de Frenet. En concret el triedre de Frenet d'una corba $\gamma(s)$ en la que el paràmetre $s$ no és necessàriament l'arc es calcularà amb

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \frac{1}{|\gamma'|}\,\gamma' \\
\mathbf{B} &= \frac{1}{|\gamma' \times \gamma''|}\,(\gamma' \times \gamma'') \\
\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} &= \frac{1}{|\gamma'|\;|\gamma' \times \gamma''|}\,((\gamma' \times \gamma'') \times \gamma')
\end{aligned}
$$

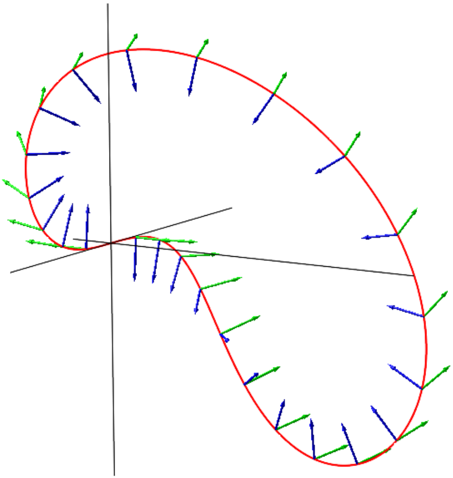
mentre que la curvatura i la torsió vindran donades per

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3} \\
\tau &= \frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{|\gamma' \times \gamma''|^2}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Utilitzant aquestes fórmules i fent uns quants càlculs (llargs però no complicats) es pot veure que

$$
\gamma'(s) \times \gamma''(s) = \left(O\left(s^6\right), -12\,s + O\left(s^3\right), O\left(s^4\right)\right) \tag{6}
$$

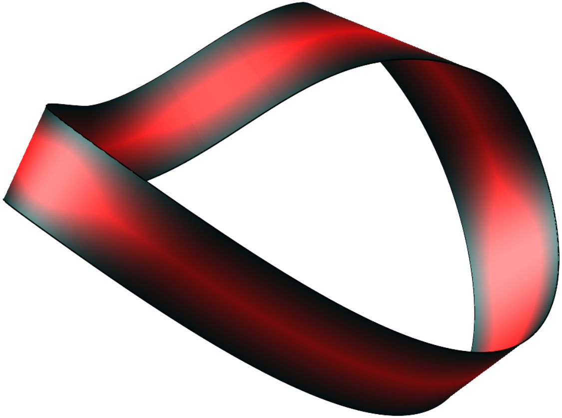
a prop de $s = 0$. Com que aquest producte vectorial és el que determina la direcció (i el sentit) del vector binormal $\mathbf{B}$, de l'expressió anterior s'en dedueix que aquest vector $\mathbf{B}$ estarà a prop de $(0, 1, 0)$ quan el valor del paràmetre $s$ és negatiu i s'acosta a 0 i de $(0, -1, 0)$ un cop passa a positiu. Tenint en compte que $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ i que $\mathbf{T}(0) = (1, 0, 0)$ veiem que $\mathbf{N}(s)$ passa, de ser proper a $(0, 0, -1)$ quan $s$ és negatiu i es va acostant a 0, a apuntar en la direcció oposada $(0, 0, 1)$ quan $s$ arriba als valors positius. Aquesta situació es pot visualitzar amb el gràfic següent, que mostra el recorregut de la corba $\gamma$ juntament amb els vectors $\mathbf{N}$ (en blau) i $\mathbf{B}$ (en verd).



Respecte les possibles singularitats que apareixen en el quocient $\tau/k$ cal tenir en compte en primer lloc que després de calcular explícitament

$\gamma'(s) \times \gamma''(s)$ es veu clarament que només s'anul·la quan $s = 0$ i que la seva norma és del mateix ordre que $s$ a prop de 0 (tal i com es desprèn de l'expressió (6) anterior) de forma que l'únic valor del paràmetre $s$ per al que $k(s) = 0$, i per tant hi pot haver singularitats, és $s = 0$ (recordeu com es calcula $k$ amb la fórmula (5)). Per un altre costat, si es calcula l'ordre del determinant $(\gamma'(s) \times \gamma''(s)) \cdot \gamma'''(s)$ (el numerador en l'expressió de $\tau$ de la fórmula (5)) a prop de $s = 0$ es veu que és com el de $s^4$, de forma que $\tau$ té un 0 d'ordre 2 en $s = 0$ i en conseqüència el quocient $\tau/k$ hi té un 0 d'ordre 1 (i, per tant, admet una extensió sense singularitats).

Un cop s'ha arribat a aquest punt, només queda mostrar com surt el dibuix de la cinta corresponent a aquesta corba $\gamma$ i que és el següent:



Finalment, cal mencionar que hi ha altres treballs, com per exemple [3], on es fan servir les mateixes idees fonamentals dels treballs [5] o [6] de G. Schwartz i donen les tècniques per a construir famílies senceres de superfícies desenvolupables del tipus d'una banda de Moebius.

# Referències


[1] M. P. do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza Editorial, Madrid, 1990. (Traducció de la versió en anglès publicada per Prentice-Hall. La versió original és en portuguès).

[2] S. Montiel & A. Ros, *Curves and surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 69, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[3] T. Randrup & P. Røgen, *Sides of the Möbius strip*, Arch. Math. (Basel) **66** (1996), no. 6, 511–521, DOI 10.1007/BF01268871.

[4] A. Reventós, *Affine Maps, Euclidian Motions and Quadrics*, Springer Undergraduate Mathematics Series (SUMS), Springer, London, 2011.

[5] G. E. Schwarz, *A pretender to the title "canonical Moebius strip"*, Pacific J. Math. **143** (1990), no. 1, 195–200.

[6] ———, *The dark side of the Moebius strip*, Amer. Math. Monthly **97** (1990), no. 10, 890–897, DOI 10.2307/2324325.

## Notes

[1]Justament aquesta pregunta feta a classe per Odí Soler ens va animar a escriure aquest article.

[2]Les esferes tenen curvatura de Gauss igual a l'invers del quadrat del radi i aquest fet és el que posa de manifest que mai es podrà dissenyar un mapa, de cap part de superfície de la Terra, en el que les distàncies entre dos punts quedin reflectides fidelment en tota la superfície representada.

[3]O saltar directament a les fórmules explícites i al dibuix que apareixen més endavant. Encara que així es perdrà la comprovació de com l'estudi de les superfícies reglades de curvatura nul·la marca, en algun sentit, quina serà la construcció final.

[4]En aquestes fórmules el $\times$ designarà el producte vectorial i el punt $\cdot$ el producte escalar de dos vectors.

[5]En anglès es diu *tangent developable*.

[6] A [5] no apareix el factor 4. S'ha afegit per tal d'equilibrar el recorregut de les tres coordenades i generar una figura més *quadrada* que la que sortiria si no s'introduís aquest coeficient.

G. Guasp

Dpt. de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

gguasp@mat.uab.cat

A. Reventós

Dpt. de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

agusti@mat.uab.cat

*Publicat el 11 de desembre de 2013*