MAT 2
MATerials MATemàtics
Volum 2018, treball no. 3, 82 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Matemàtiques. Unitat de pensament. Diversitat cultural (Part II)*

Josep Pla i Carrera

5 El màxim comú divisor amb semàntica aritmètica

En parlar de la concepció numèrica dels *Elements* d'Euclides hem fet referència explícita al *màxim comú divisor* i al seu valor metodològic al si de la teoria de la proporció.[1] És ben conegut que, tot just a l'inici del llibre VII, el

*Aquest treball està basat en una conferència de l'autor al Fòrum de les Cultures l'any 2004 a Barcelona. Degut a la seva longitud, es publica en dues parts. La primera part correspon a l'enllaç: http://www.mat.uab.cat/matmat/PDFv2018/v2018n01.pdf

[1] Cal insistir en el caràcter teòric —*aritmètic*, però no *logístic*— dels *Elements* d'Euclides [vegeu l'observació de la nota 12 de la part I]. El propòsit és establir teoremes sense preocupar-se, per a res, de les seves possibilitats pràctiques. Així, per exemple, en el cas de la formulació del *teorema fonamental de l'aritmètica*, el caràcter eminentment teòric —desprovist de tota mena de suport pràctic— ha fet que s'ofereixin interpretacions diverses del significat exacte de la proposició 14 del llibre IX [Pla:2019*a*], p. 118, que diu:

> **Teorema.** *El nombre més petit mesurat per diversos nombres primers no té altres divisors que aquests.*

La dificultat rau en el fet següent: al considerar que els nombres primers són necessàriament diferents o podem acceptar que es poden repetir? Hi ha autors que sostenen que l'enunciat del teorema significa que els nombres primers són necessàriament diferents; altres, en canvi, creuen que poden repetir-se. La primera opció, al nostre entendre, és difícil d'acceptar, si tenim present la importància del $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ en el sistema de numeració primer dels tres llibres aritmètics, Euclides, després d'haver establert les definicions precises —en particular la de *nombres primers entre si*—[2] enuncia i demostra el teorema següent:[3]

> **Teorema**. *Donats dos nombres naturals diferents, del més gran traiem el més petit successivament i iterada;[4] si el residu no amida mai exactament el residu precedent fins que s'assoleix la unitat, els nombres són primers entre si.*

Euclides procedeix per «reducció a l'absurd». Si m i n no fossin primers entre si, hi hauria un nombre $d > 1$ que els amidaria. Aplica l'algorisme d'Euclides fins a arribar a 1. Aleshores resulta que d divideix a 1, és a dir, n'és «part» i això és impossible.

Ara ja disposa del que li cal per establir l'«existència» del màxim comú divisor de dos nombres:

> **Teorema**. *Donats dos nombre naturals que no són primers entre si, trobar la mesura comuna màxima.[5]*

En el procés d'obtenció del *màxim comú divisor* —$\mathrm{mcd}(m, n)$— aplica l'*algorisme d'Euclides*, però, com ja hem comentat abans, ho fa de forma absolutament teòrica.

Procedeix de la forma següent: Donats m, n, dividim m per n. En resulta que

$$\boxed{m = n \cdot q + r, \text{ amb } 0 \neq r < n.}$$

Aleshores, poden passar dues coses:

1. n mesura m i hem acabat.

babilònic, ben conegut pels matemàtics grecs, o el coneixement que els nombres perfectes parells són de la forma $2^{n-1}(2^n - 1)$, quan $2^n - 1$ és primer (i, per tant, *parell-senar*).

[2]És la definició 13 del llibre VII. [PLA:2019*a*], p. 90.

[3]És la proposició 1 del llibre VII dels *Elements* d'Euclides. [PLA:2019*a*], p. 91–94.

[4]En grec, ἀνθυφαιρεῖν, d'on ha sorgit la paraula *antiféresi*, usada en la matemàtica grega per referir-se a l'«algorisme d'Euclides» que, com sabem, consisteix a dividir m per n i després prendre n i el residu $r < n$ i començar novament el procés.

El terme grec es compon de la paraula ἀντι, que vol dir «alternat», «recíproc» i fa referència, naturalment, al caràcter alternat del procés —el gran esdevé petit i el petit passa a ocupar el lloc del gran— i de l'adverbi αει, que recull el caràcter «iteratiu».

[5]Proposició 2 del llibre VII. [PLA:2019*a*], p. 94–96. Euclides ha de seguir aquest camí perquè no disposa del nombre zero ni com a concepte ni com guarisme.

2. n no mesura m. En aquest cas, el residu r obtingut —que necessàriament és $r \neq 1$ perquè suposem que m i n no són primers entre si— s'usa com a divisor i el divisor com a dividend. És a dir,

$$\boxed{n = r \cdot q' + r', \text{ amb } 0 \neq r' < r.}$$

S'arriba necessàriament a un cas en qué el residu mesura exactament el residu anterior, perquè, de no ser així, hi hauria descens infinit, i això no és possible.[6]

Com ja hem indicat abans:

Proposició. *Donats dos nombre naturals, o bé l'un és part de l'altre o bé n'és parts.*[7]

Si són primers entre si, les *parts* s'obtenen comptant les unitats; si no ho són, de primers entre si, s'obtenen comptant el nombre de vegades que, cada una d'elles, conté el mcd.

Així obtenim l'esquema de commensurabilitat del qual havíem parlat a la pàgina **??** de la part I. Aquest esquema és, dèiem aleshores, el que permet distingir les magnituds commensurables de les incommensurables. D'alguna manera, la commensurabilitat queda reduïda a l'aritmètica dels nombres naturals. La commensurabilitat equival la raó fraccionària.

Potser és aquest caràcter teorètic el que fa que, ni a l'*Aritmètica* de Diofant —un text del segle III dC en el qual, llevat dels problemes del llibre I, tots són problemes *indeterminats*—, hi hagi cap problema indeterminat de primer grau; és a dir, del tipus

$$\boxed{a\,x + b\,y = c, \text{ on } a, b, c, x \text{ i } y \text{ són enters positius.}}$$

Per tal de trobar-ne un en el món grec, cal esperar l'*Antologia Grega* o *Antologia Palatina* de Metrodor que, entre moltes altres qüestions, conté problemes del mateix tipus que els del papir Rhind.[8] El recull conté, tanmateix,

[6] Val la pena indicar que Euclides no introdueix cap hipòtesi *ad hoc* per als nombres naturals però, en diverses ocasions i de forma clara i nítida, suposa que «no hi pot haver descens infinit». Segles més tard, a l'Edat Mitjana, Campanus de Novara [Novara, 1220–Viterbo, 1296], ho posaria de manifest, en l'axioma quart de la primera axiomàtica dels nombres naturals i, al segle XVII, Pierre de Fermat [Baeumont-des-Lomages 1601–Castres 1665] l'usaria, de forma definitiva, com un principi bàsic i fonamental en l'àmbit de l'aritmètica, com podem veure al començament de la carta a Carcavi d'agost de 1959, a [Pla-Viader-Paradís:2008*a*], p. 396–401.

[7] Llibre VII, definicions 3 i 4.[Pla:2019*a*], p. 88.

[8] És un recull efectuat pel gramàtic Metrodor que, amb molta probabilitat, va viure entre l'època de l'Emperador Anastasi I [491–518 dC] i Justinià [518–527 dC].

problemes que són molt més antics que l'època del recopilador; d'altres són més recents. Tanmateix cap d'ells no s'atribueix al propi Metrodor.[9]

En concret, en aquest text hi trobem recollits dos problemes —el problema 48 i el 144— la resolució formal dels quals condueix a la resolució d'*equacions diofàntiques lineals*. Són:

Problema 48. *Les tres Gràcies porten, cada una, un cistell amb la mateixa quantitat de pomes.*

Les nou Muses es troben amb les tres Gràcies i els pregunten: "Quantes pomes porteu al cistell?"

Les Gràcies donen, a cada Musa, el mateix nombre de pomes i aleshores, totes, Gràcies i Muses, tenen el mateix nombre de pomes.

Digueu, si us plau, quina era la quantitat de pomes que portava cada Gràcia.[10]

Aquest problema és senzill, si atenem el fet que el nombre de pomes ha de ser múltiple de 12. S'evita, doncs, haver de recórrer a l'equació diofàntica $x - 3y = y$ que, d'altra banda, és molt particular.[11]

En l'altre problema dues estàtues A i B parlen entre si i diuen:

Problema 144. *A. La base en qué estic i jo pesem molt.*
B. El mateix que jo i la meva base.
A. Però jo sol peso ja tant com dues vegades la teva base.
B. I jo sol tres vegades la teva.[12]

De fet, si ho plantegem equacionalment, tenim el sistema següent:

$$\boxed{x + y = x_1 + y_1;\ x = 2\,y_1;\ x_1 = 3\,y.}$$

No obstant això, n'hi ha prou que y_1 —el pes de la base de B— sigui dues vegades y —el pes de la base de A.[13]

[9] Vegeu [Tannery:1894].

[10] [Metrodor:1918], p. 51–52.

[11] Observem que, atès que finalment totes tenen el mateix nombre de pomes, inicialment n'hi ha un múltiple de 12. Cada Gràcia en porta, doncs, un múltiple de quatre i això resol el problema. La indeterminació queda ben palesa.

[12] [Metrodor:1918], p. 105.

[13] Observem que, d'acord amb les condicions del problema, si el pes de les dues bases juntes és Y, resulta que el pes de la primera estàtua amb la base és Y més el pes de la segona base; en canvi, en el cas de la segona, el pes conjunt, de base i estàtua, és Y més dues vegades el pes de la primera base. D'on en resulta que el pes de la segona base és dues vegades el pes de la primera. Aquesta tècnica, consistent a considerar com a única variable la més idònia per a la resolució del problema, era molt corrent en la tradició aritmètica grega, com podem veure en Diofant, Heró, i d'altres.

És curiós que Diofant, al problema 12 del llibre I, plantegi un problema molt més general:

> *Dividir un nombre donat en dues parts de dues maneres diferents de manera que la primera de la primera tingui amb la primera (o la segona) de la segona una certa raó, i la segona (o la primera) de la segona amb la segona de la primera una certa raó.*[14]

Però, com és usual en Diofant, a l'hora de resoldre'l, concreta les condicions del problema i aleshores perd el seu caràcter indeterminat.[15]

En definitiva, doncs, no sembla pas que a Grècia hagin resolt amb tota la seva generalitat el problema diofàntic lineal.

Els primers matemàtics que van prendre consciència del caràcter eminentment numèric de l'algorisme d'Euclides van ser els matemàtics indis i indirectament els xinesos.[16]

---

[14] [DIOFANT:1959], edició castellana, volum I, p. 33–34.

[15] Diofant fa $x+y=100$ i les raons iguals, respectivament, a $\frac{2}{1}$ i $\frac{3}{1}$. Aleshores diu: «Si la segona part de la segona suma és x, la primera de la primera és $2\,x$. Aleshores, la segona part de la primera suma és $100-2\,x$ i, de retruc, la primera part de la segona suma és $300-6\,x$. Cal, doncs, que $300-5\,x=100$», que determina el problema.

De fet el mètode és general. Considerem la taula:

	Suma 1	Suma 2
Part 1	$\frac{a}{b}x$	$\frac{c}{d}(s-\frac{a}{b})x$
Part 2	$s-\frac{a}{b}x$	x

Ara cal imposar que la suma segona sigui igual a s. És a dir, $x+\frac{c}{d}\big(s-\frac{a}{b}\big)\,x=s$. En resulta que

$$(b\,d-a\,c)\,x=b\,(d-c)\,s,$$

que òbviament palesa el caràcter indeterminat del problema. S'obté

$$x=\frac{b(d-c)}{b\,d-a\,c}s,\quad y=s-x=\frac{c(b-a)}{b\,d-a\,c}.$$

Queda oberta la qüestió de saber en quins casos podem aconseguir solucions enteres. [BACHET:1621], p. 27, dona la regla general.

[16] Per a una ressenya històrica breu podeu consultar LIBBRECHT, U. [1963], capítol 14, 213–266, o [ORE:1988], p. 120–124, 124–131; 131–141.

Ambdues cultures, com veurem, eren conscients de la necessitat de resoldre equacions del tipus que anomenen *teorema xinès del residu*.

Les matemàtiques índies i xineses es van preocupar de la resolució de les equacions

Els matemàtics indis es van adonar que, de fet, la resolució de les *equacions diofàntiques indeterminades lineals*

$$\boxed{a\,x + b\,y = c, \text{ on } a, b, c, x \text{ i } y \text{ són enters positius,}}$$

estan íntimament lligades a l'algorisme d'Euclides, mentre que, curiosament, pel que fa a Diofant d'Alexandria, el fet de preocupar-se fonamentalment per les *solucions racionals* l'allunya totalment, com ja hem vist, de la resolució general en termes de *solucions enteres*, que és precisament la base de l'algorisme d'Euclides en la resolució de l'equació anterior.[17]

L'estudi sistemàtic més antic conegut d'aquesta mena d'equacions el trobem a l'*Âryabhatīya* d'Âryabhata [∼476–?],[18] amb l'enunciat propi del problema xinès:

> *Trobar un nombre N que dividit per a doni romanent r_1, i dividit per b, romanent r_2.*

És a dir, es tracta de trobar un nombre natural N tal que

$$\boxed{N = a\,x + r_1 = b\,y + r_2,}$$

o sigui, de resoldre l'equació

$$\boxed{by = ax + c, \text{ on } c = r_1 - r_2.}$$

En realitat el lligam que hi ha entre aquests tipus d'equacions —o de problemes— i l'astronomia està molt ben descrit a l'obra ja esmentada de van der Waerden.[19]

Indiquem, tanmateix, els següents exemples senzills:

> *El residu de les revolucions de Śani (Saturn) és de 24. Trobar l'ahargaṅa (nombre de dies transcorreguts des d'una època fix al dia d'avui) i les revolucions de Śani.*[20]

---

quadràtiques del tipus $x^2 + y^2 = z^2$, les quals ja havien estat estudiats a bastament pels matemàtics babilònics, com palesa l'existència de *Plimpton 322* [vegeu [Pla:2016*a*], p. 249–257]. Curiosament aquest tipus d'equacions van interessar als matemàtics grecs, molt probablement, per la seva vinculació amb la incommensurabilitat i per la necessitat de separar commensurabilitat i incommensurabilitat.

[17] De fet es tracta d'establir el que actualment, en honor del matemàtic Étienne Bézout [Nemours 1739–Basses-Loges/Avon 1783], es coneix amb el nom d'*identitat de Bézout*. Vegeu [Chabert:1993], p. 139–145.

[18] [Âryabhaṭa:1930].

[19] [Waerden:1961], p. 127–130.

[20] [Rao:1991], p. 45–46.

El nombre de revolucions de Śani durant una *mahayūga* de 432×10^4 anys és de 146.564 i el nombre de dies civils en aquest mateix període és de 1.577.917.500. Ambdós es poden dividir per 4. L'equació que cal resoldre és, doncs,

$$\boxed{33.641\, x - 24 = 394.479.375\, y,}$$

on x és l'ahargaṅa i y el nombre de revolucions de Śani. La solució és:

$$\boxed{x = 346.688.814, \quad y = 32.202.}$$

O bé el *problema de Brahmagupta* [∼598–∼665] següent:

> *Suposem que, des que el sol, la lluna, mart, mercuri, júpiter, venus i saturn han completat un nombre exacte de revolucions, ha transcorregut un cert nombre de dies des del començament de Kalpa.*[21]

Pel que fa al residus tenim la taula següent:

sol	lluna	mart	mercuri	júpiter	venus	saturn
1000	41	315	1000	1000	1000	1000

i, pel que fa a les revolucions, la següent:

sol	lluna	mart	mercuri	jòpiter	venus	saturn
(3)	(5)	(1)	(13)	(3)	(5)	(1)
1096	137	685	1096	10.960	1096	10.960

Es compleix la igualtat següent:

$$\boxed{137 \times 8 = 1096, \quad 1000 = 137 \times 7 + 41.}$$

En deduïm que, si $x - 1000$ és múltiple de 1096, aleshores $x - 41$ ho és de 137. És a dir,

$$\begin{aligned} \dot{1}37 = x - 1000 &= x - 137 \times 7 + 41 = x - 137 \times 8 + 137 - 41 \\ &= x - 1096 + 137 - 41 = x - 41 + \dot{1}37. \end{aligned}$$

Podem, doncs, ometre la lluna i considerar el sol i mart. Obtenim:

[21] Brahmagupta [s. vi], xviii, sutres 7–8, a [Colebrooke:1817], p. 326–330.

$$\boxed{x - 1000 = 1096\,y, \quad x - 315 = 685\,z.}$$

En resulta, en definitiva l'equació:

$$\boxed{1096\,y + 685 = 685\,z,}$$

que, dividida per 137, dona:

$$\boxed{8\,y = 5\,(z-1).}$$

Finalment tenim que $y = 5$ dona la solució mínima que és: $x = 1000 + 5480 = 6480$ que, a més, satisfà la condició que hem imposat a mercuri.

Si fem, en canvi, $y = 10$, obtenim $10.960 + 1000 = 11.960$ que satisfà la condició per a tots els planetes.

Veiem, doncs, que sabien resoldre amb tota naturalitat l'equació diofàntica lineal i sabien que tenia múltiples solucions.

És curiós observar que Brahmagupta diu que aquest problema —totalment vinculat a l'astronomia— és de la mateixa naturalesa que un problema *popular*, que és un exemple típic del problema xinès de residu:

> **Problema popular**. *Trobar un nombre que dividit per 6 doni residu 5; per 5, residu 4; per 4, residu 3; per 3, residu 2.*[22]

La resposta, diu, és 59.

No hi ha cap mena de dubte que aquesta regla —el *mètode de la kuṭṭaka*—[23] l'enucià ja Âryabhata I [s. V] en el seu *Gañita* —un text d'àlgebra.[24] El seu text és molt breu, força fosc i de difícil interpretació. Tanmateix, en el comentari que en féu Bhàskara I, hi ha una interpretació de la regla, que serà reproduïda i millorada pels matemàtics ulteriors, com ara, per exemple, Brahmagupta en el GANÑITÀD'HYAYA (un text d'aritmètica)[25] i Bhàskara II [1114-1200] en el *Víja-gañita*, on ja l'exposa amb molta claredat.[26]

El podem traduir en els termes següents:

---

[22] BRAHMAGUPTA [s. VI], a [COLEBROOKE:1817], p. 326.

[23] [DATTA:1938], p. 90 per a l'origen i significat del nom *kuṭṭaka*. La traducció més corrent és el *mètode del pulveritzador*.

[24] [LORENZO:1971], p. 73–74.

[25] BRAHMAGUPTA [s. VI], a [COLEBROOKE:1817], p. 325–326.

[26] Cada un d'aquests autors, i d'altres que no hem citat, intenten de millorar-la. Vegeu, per exemple, [DATTA:1938], p. 91–117.

> **Regla**. *Divideix el divisor corresponent pel més gran residu de la divisió del divisor més gran pel divisor corresponent al residu més petit.*
>
> *Essent dividits mútuament, el darrer residu es multiplicarà per un enter al nostre arbitri de manera que, si al producte que s'obtingui li afegim (si el nombre de quocients en el procés és senar) o li restem (si és parell) la diferència dels residus (l'additiu), allò que en resulti sigui divisible pel penúltim residu.*
>
> *Col·loca els quocients de les divisions mútues l'un dessota de l'altre en columna fins arribar al divisor opcional i després al quocient que hagis obtingut.*
>
> *El penúltim es multiplica per l'anterior i se li afegeix el que el segueix.*
>
> *Repeteix el procés.*
>
> *Divideix el darrer nombre obtingut pel divisor corresponent al residu més petit.*
>
> *Aleshores multiplica el residu per el divisor que correspon al residu més gran i afegeix-li el residu més gran.*
>
> *El resultat serà el nombre que correspon al divisor.*[27]

El primer paràgraf d'aquest text fa referència a la *prostafèresi* o algorisme d'Euclides per a la determinació del mcd. La resta explica el procés per aconseguir, anant enrere, les solucions del problema. Un exemple ens ho farà més clar.

Volem resoldre l'equació:[28]

$$\boxed{137\,x + 10 = 60\,y.}$$

És a dir,

$$\boxed{y = \frac{137\,x + 10}{60}.}$$

[27] Brahmagupta [s. vi], a [Colebrooke:1817], p. 325–326, o Bhàscara ii [s. xii], a [Colebrooke:1817], p. 156–157.

[28] Aquesta equació resulta de resoldre el problema següent:

> *Essent el residu de segons de la lluna de 800, diga'm, amic meu, el lloc en qué es troba la lluna i el nombre de dies que han passat, si has estat capaç de creuar l'oceà del polvoritzador.*

Vegeu Brahmagupta [s. vi], a [Colebrooke:1817], p. 336.

Fem l'algorisme d'Euclides:

	2	3	1	1
137	60	17	9	8
17	9	$\underline{8}$	1	

D'entrada tenim 4 quocients que, posats en columna, són: $\begin{matrix}2\\3\\1\\1\end{matrix}$. Cal buscar un nombre n tal que $q = \frac{1\times n-10}{8}$ sigui enter.[29] Serveix, per exemple, $n = 18$. Obtenim $q = 1$, atès que aleshores $1 \times 18 - 10 = 8 \times 1$. Ara la columna s'ha de completar amb els termes 18 —que és el nombre que hem elegit— i 1 —que és el valor del quocient obtingut.

Aleshores hem de procedir a la restauració dels valors, d'acord amb el procediment iteratiu següent:

2	2	2	2	$297 = y$
3	3	3	130	$130 = x$
1	1	37	37	
1	19	19		
$n = 18$	18			
$q = 1$				

Per passar de la primera columna —que és la columna de l'algorisme d'Euclides més el nombre n i el quocient q— seguim les instruccions: «Multipliquem el penúltim per l'antepenúltim i li afegim l'últim». Aquest desapareix en la columna següent, i el resultat ocupa el lloc de l'antepenúltim, que ara és el penúltim. Fa el paper de n.

Aleshores, segueix, un cop s'obté l'*agranta* ($x = 130$), la dividim per 30 i agafem el residu, que és 10. Ho multipliquem per 137. dona 1370 i li afegim 10. S'obté $N = 1380$ que és la solució del sistema $N = 137\,x + 10 = 60\,y$ mòdul $8820 = 60 \times 137$. Ara dividim 1380 per 60 ($N = 60\,y$) i tindrem y. La solució és, doncs, $y = 23, x = 10$.

Si bé és cert que la matemàtica índia fou pionera en la resolució, amb l'algorisme d'Euclides, de les equacions del tipus $a\,x \pm b\,y = c$, ho és que els

[29] «Busca un nombre tal que restant-li, en aquest cas, la diferència dels residus (que en el cas que ens ocupa és 10), sigui múltiple del penúltim residu (que en el cas que ens ocupa és 8)».

matemàtics xinesos s'avançaren en la resolució del problema de cercar residus simultanis. La raó d'aquesta preocupació per part dels matemàtics xinesos cal buscar-la en la determinació del calendari.

Tots els calendaris necessiten d'un començament. A partir de la dinastia Wei [220-265], els xinesos van fixar-lo en el *Shang yuan* que era alhora el començament del cicle de 60 dies, en què basaven la datació del calendari, el solstici d'hivern i l'inici de la lluna nova. Si, en algun altre moment de l'any, el solstici d'hivern tenia lloc r dies després de l'inici del cicle de 60 dies i s després de la lluna nova, aleshores aquest any havia començat N dies després del *Shang yuan*, on N complia simultàniament les dues condicions següents:

$$\boxed{a\,N - r = \dot{60}, \quad a\,N - s = \dot{d},}$$

on a compta els dies de l'any i d el nombre de dies del mes *sinòdic* —de lluna nova a lluna nova.

Malgrat que als calendaris antics no hi ha cap mena de referència al mètode que cal seguir per resoldre la qüestió, el problema dels residus —conegut normalment com el *problema xinès del residu*— fou resolt pels matemàtics xinesos abans del segle cinqué. Aquest fet el confirma l'exposició detallada del mètode del *Sun Tzŭ suan-ching* [*Text clàssic de matemàtiques de Sun Tzŭ*], un text de finals del segle III o començaments del segle IV[30] i, per tant, amb anterioritat als matemàtics indis. En canvi, per trobar la resolució de l'equació diofàntica lineal cal esperar encara un parell de segles fins al text de Chang-Quijan [∼475].

La literatura xinesa ofereix dos mètodes diferents per resoldre el problema dels residus.

Volem resoldre el problema següent:

Trobar un nombre que dividit per 3 doni residu 2; per 5, residu 3; per 7, residu 2.[31]

Primer mètode. Procedim fent els càlculs directes fins a aconseguir el resultat buscat:[32]

[30] La data és incerta. Vegeu [Libbrecht:1973], p. 268, nota 5.
[31] Cerquem un nombre N tal que $N = 3a + 2 = 5b + 3 = 7c + 2$.
[32] Vegeu [Mcleish:1992], p.61–63.

	A	B	C
Divisor	3	5	7
Residu	2	3	2
1er. residu	2	3	2
Sumo el divisor			
2on. residu	5	8	9
Sumo el divisor			
3er. residu	8	13	16
Sumo el divisor			
4t. residu	11	18	$\boxed{23}$
Sumo el divisor			
5é. residu	14	$\boxed{23}$	
Sumo el divisor			
6é. residu	17		
Sumo el divisor			
7é. residu	$\boxed{23}$		

El valor coincident de A, B i C és 23. Un resultat és, doncs, 23. Un altre possible resultat és, tanmateix, 128.[33]

Segon mètode. Es coneix amb el nom de *mètode celestial*, perquè basa l'obtenció de la solució en els *elements celestials*, que han de valer 1.[34]

La solució és la suma del productes que s'obtenen amb el residus donats, a partir dels que proporcionen els residus celestials, és a dir, $N = 140+63+30 = 233$. No té perquè ser el més petit, però podem aconseguir-lo traient un múltiple convenient de 105. En aquest cas cal treure 210.[35]

[33]Saben que hi ha més d'una solució —de fet, infinites— que s'obtenen afegint a una solució concreta el nombre $105 = 3 \times 5 \times 7$.

[34]Vegeu [Mcleish:1992], p. 61–65.

Si ens hi fixem bé veurem que és el mètode que s'usa en l'actualitat quan es vol demostrar l'existència de la solució. D'entrada s'ofereix la manera d'obtenir-la i després es constata que el que s'ha aconseguit és efectivament una solució del problema.

[35]Els productes s'obtenen multiplicant els altres dos divisors. Els residus, dividint els productes pels divisors. Els productes segons, multiplicant els residus pels productes. Els residus segons, dividint els productes segons pels divisors. En l'exemple s'assoleixen els elements celestials. Tanmateix és possible que, amb un sol pas, no aconseguim els residus celestials. Aleshores cal continuar atès que hem aconseguit els elements celestials, fem els darrers productes que, sumats, donen una solució,

Elements celestials	1	1	1
Divisors	3	5	7
Productes	35	21	15
Residus	2	1	1
Productes segons	70	21	15
Residus segons	1	1	1
Residus donats	2	3	2
Productes tercers	140	63	30

A Occident aquest mètode de resolució trigà molt de temps a aparéixer. La primera vegada que el trobem degudament explicitat és al text *Mathématiques amusantes* [1612] de Claude Gaspard Bachet de Méziriac.[36]

En aquesta obra, curiosament, hi trobem els dos tipus de problemes esmentats, però estan totalment desvinculats.

El *problema xinès del residu* es concreta en el problema següent:

> *Trobar un múltiple de 7 que, dividit respectivament per 2, 3, 4, 5, i 6, doni com a residu 1.*[37]

Claude Gaspard Bachet de Méziriac
Bourg-en-Bresse 1581–1638

Diu que l'únic que cal és trobar un múltiple de 7 que passi d'una unitat a un múltiple de 60, on $60 = \mathrm{mcm}(2, 3, 4, 5, 6)$. Aleshores ho resol *pel compte de la vella*:

[36] Tanmateix al llibre 17 de la primera part de l'*aritmètica* de Niccolò Tartaglia [Brescia 1500–Venécia 1557], hi trobem el clàssic *problema dels ocells*, heretat de la Xina i importat a través dels àrabs, i conegut per Adelard de Bath [Bath, 1075–?, 1160] i per Leonardo da Pisa, conegut com Fibonacci [Pisa, 1170–Pisa, 1250]:

> *Volem comprar un total de 30 ocells, entre caderneres, pit-rojos i periquitos. Un pit-roig val 3 diners; una cadernera, 3; i dos periquitos, 1. Volem gastar 30 diners. Quants ocells podem comprar de cada mena?*

[Leonardo:1202], edició anglesa, p. 256, o bé edició llatina, volum II, p. 247. Tartaglia dona les tres solucions possibles, però no dona el mètode de resolució.

[37] [Meziriac:1612], edició de 1993, p. 135–136.

$$60 : 7 = 8 \text{ i en queden } 4;$$
$$(2 \times 60) : 7 = 16 \text{ i en queden } 8.$$

Per tant, tenim que

$$2 \times 60 = \dot{7} + 1.$$

Aleshores, atès que el nombre buscat cal que sigui un múltiple de 7, fem el càlcul següent:

$$(7 \times 60 - 2 \times 60) + 1 = (7 - 2) \times 60 + 1 = \dot{7},$$

que dona la solució mínima:[38]

$$N = 5 \times 60 + 1 = 301.$$

El problema que correspon a l'equació diofàntica lineal és el següent:

Quaranta-una persones, homes, dones i nens, van a un banquet. Cada home paga 4 euros, cada dona, tres i cada tres nens, 1. En total paguen quaranta euros. Quants homes, dones i nens han anat al banquet?[39]

Suposem que

$$\begin{array}{llll} \text{homes:} & x & \text{paguen:} & 4\,x \\ \text{dones i nens:} & 41 - x\,(= f + e) & \text{paguen:} & 40 - 4\,x\,(= 3f + \frac{1}{3}e). \end{array}$$

En resulten les equacions següents:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 120 & - & 12\,x & = & 9\,f & + & e \\ 41 & - & x & = & f & + & e \\ \hline 79 & - & 11\,x & = & 8\,f & & \end{array}$$

[38]De fet, és un cas particular del problema general, un cas que ja era ben conegut pels matemàtics de l'islam. Vegeu [Rashed:1984], p. 228.
[39][Meziriac:1612], p. 172–173.

Així obté l'equació diofàntica lineal que ha de resoldre. El mètode que usa, malgrat usar-lo en un cas concret, és general.[40]

D'una banda tenim que

$$\boxed{f = \frac{79 - 11\,x}{8}.}$$

En resulta que $11\,x < 79$ atès que el resultat ha de ser positiu.

D'altra banda tenim que

$$\boxed{e = 41 - x - \frac{79 - 11\,x}{8} = \frac{249 + 3\,x}{8} = 31 + \frac{1 + 3\,x}{8}.}$$

Cal que $1 + 3\,x = \dot{8}$, perquè cal que el resultat sigui enter. És a dir, cal resoldre l'equació $3\,x = 8\,y - 1$ que, d'acord amb el procediment anterior, mena a

$$\boxed{x = \frac{8\,y - 1}{3} = 2\,y + \frac{2\,y - 1}{3},}$$

que ha de ser enter. Per tant, $2\,y - 1 = \dot{3}$. És a dir, $2\,y = 3\,z + 1$. Repetim encara una altra vegada:

$$\boxed{y = \frac{3\,z + 1}{2} = z + \frac{z + 1}{2},}$$

que ha de ser enter. És a dir, $z + 1 = \dot{2}$, que s'obté fent $z = 1$. Aleshores tenim

$$\boxed{z = 1, y = 2, x = 5, e = 33, f = 3, h = 5.}$$

Així s'acaba el problema.

Hem trobat, per fi, el mètode de resolució de l'equació diofàntica lineal, basant-nos en l'*algorisme d'Euclides*.[41] Havien passat més de deu segles des que els matemàtics d'Orient havien aconseguit resoldre l'equació diofàntica lineal fins que Occident en va trobar el camí.

[40] Amb lleugeres variacions és el mètode que usaran Leonhard Euler a l'*Algebra* [1770], i Carl Friedric Gauss [Brunswick, 1777–Göttingen, 1855]. Val la pena indicar que Gauss al *Disquisiciones Arithmeticæ* [1801], 22–26, per calcular la solució del problema xinès del residu, usa la resolució d'equacions diofàntiques lineals.

[41] De fet, l'algorisme d'Euclides aplicat als coeficients 8 i 11, dona: $11 = 8 \times 1 + 3, 8 = 3 \times 2 + 2, 3 = 2 \times 1 + 1, 2 = 1 \times 2 + 0$: és a dir, proporcions els quocients $1, 2, 1, 1$.

6 L'equació de Fermat-Pell

Com ja hem dit, no fou l'equació diofàntica lineal l'única que van aconseguir de resoldre els matemàtics orientals.[42] També van trobar la manera de resoldre l'equació pitagòrica, en nombre enters positius —és a dir, tres nombres enters positius $\langle m, n, p\rangle$ tals que $p^2 = m^2 + n^2$. Aquest problema havia preocupat els matemàtics grecs, si més no des de l'època de Pitàgores.[43] És, de fet, una *equació diofàntica de segon grau*, íntimament vinculada a la circumferència.[44] Hi ha, però, una altra equació diofàntica de segon grau, que, de fet, està lligada a la hipèrbola.[45] És l'equació coneguda normalment amb el nom d'*equació de Pell*, però que s'hauria d'anomenar *equació de Fermat* i, en el pitjor dels casos, *equació de Fermat-Pell*.[46]

Es tracta del problema següent:

> *Trobar les solucions enteres de l'equació* $x^2 = A\,y^2 + 1$, *on* A *no és un quadrat perfecte.*[47]
>
> *Veure que n'hi ha infinites i donar un mètode per determinar-les totes de manera regular.*[48]

Com és ben sabut aquest problema fou tractat de manera molt marginal —gairebé com una curiositat— pels matemàtics grecs.

D'una banda disposem del *problema dels bous*, atribuït a Arquimedes, que finalment mena a una equació de Fermat-Pell, totalment irresoluble a

[42] Una història molt elaborada és [WHITFORD:1912].

[43] Vegeu PLA:2016B, p. 137–138. Recordem que, implícitament, ja el trobem al Plimpton 322. [PLA:2016*a*], p. 249–257.

[44] Vegeu com la resol Diofant d'Alexandria al problema 11 del llibre II de l'*Aritmètica*. [DIOFANT:1959], edició castellana, volum I, p. 92–96.

Una manera diferent de resoldre-la, però que condueix, de fet, al mateix resultat la podem veure al *lema i* que segueix la proposició 28 del llibre X dels *Elements* [PLA:2019*a*], p. 250–252.

[45] Potser per aquesta raó no fou tan estudiada pels matemàtics grecs i, en l'obra d'Euclides, no n'hi ha cap mena de referència. Vegeu [SMORYŃSKI:1991], p. 162–165.

[46] Sembla que fou Leonhard Euler [Basilea, 1707–St. Petesburg, 1783] qui l'atribuí, erròniament, a John Pell [Southwick 1611–Londres 1685]. Aquest problema havia estat proposat per Pierre de Fermat [Beaumont-de-Lomagne, 1601–Castres, 1665], a la comunitat matemàtica, i fou molt ben acollit pels matemàtics anglesos, i entre d'altres per John Wallis [Ashford (Kent), 1616–Oxford, 1703] i William lord Brouncker [Castle Lyons 1620–Londres 1684]. Una anàlisi molt completa de la correspondència entre els anglesos i Fermat, la trobem a [FERMAT:1601], capítol V, p. 63–90.

[47] Si A és un quadrat perfecte, el problema no té solució entera, llevat de la trivial $x = 1, y = 0$.

[48] [PLA-VIADER-PARADÍS:2008*a*], p. 337.

l'època d'Aquimedes.[49]

El *mètode dels nombres costat-diagonal* de Teó d'Esmirna [Esrmina, s. II] que condueix a trobar aproximacions cada cop més bones de $\sqrt{2}$.[50]

Diofant d'Alexandria tampoc no defuig problemes que porten a la resolució d'equacions de Fermat-Pell, com podem veure, per exemple, en els problemes 9 i 11 del llibre V.[51] Però, atès que no està obligat a donar solucions enteres, els seus mètodes, molt interessants per a la comprensió cabal de l'*aritmètica*, no ho són gaire pel que fa al problema que en ocupa.[52]

Com dèiem, però, el problema fou proposat en termes generals per Fermat pels volts del 1637, però no fou fins el 1657 que els matemàtics anglesos no entraren a considerar-lo. Fou aleshores que Wallis, després de proporcionar-li una solució fraccionària de l'estil de les que s'obtenen amb els mètodes de Diofant, li fa arribar la solució següent:[53]

[49] És possible que les condicions que porten a l'equació de Fermat-Pell —un cert nombre quadrat ha de ser triangular, quelcom que mena a una equació del tipus que estem analitzant— no fossin originals d'Arquimedes. Vegeu [Beiler:1964], p. 248–252, [Heath:1894], p. 319–326, o [Pla:2019*a*].

[50] De fet, busca les solucions successives de l'equació $2\,y^2+1=x^2$, que és l'equació de Fermat-Pell quan $A=2$.

Teó, en realitat, introdueix parelles de nombres, $\langle a_n, d_n\rangle$, definits recursivament per mitjà de $a_{n+1}=a_n+d_n$, $d_{n+1}=2\,a_n+d_n$. Corresponen, com hem vist a les pàgines 9 i 10 de la part I, als costats i diagonals dels quadrats en el procés de demostració de la incommensurabilitat. Ara bé, si en lloc de procedir cap allò que es fa petit, procedim cap allò que es fa gran i comencem amb $a_1=d_1=1$, obtenim aproximacions successives de $\sqrt{2}$. Només cal que fen $\xi_n=\frac{d_n}{a_n}$ i disposarem d'una successió $\big(\xi_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ els termes de la qual s'apropen cada cop més a $\sqrt{2}$, alternativament per baix i per dalt. [Heath:1931], p. 55–57.

[51] Els problemes esmentats el porten, respectivament, a les equacions $26\,y^2+1=x^2$, $30\,y^2+1=x^2$. Els resol fent el canvi $x=m\,y\pm n$, amb m i n adequats. En ambdós casos, la solució que aconsegueix és entera. Per, exemple, en el primer cas, fa $x=5\,y+1$, atès que el terme independent és un quadrat perfecte. Obté $x^2=10\,x$ i, per tant, $x=10$.

[52] Vegeu [Diofant:1959], edició castellana, volum II, p. 26–28, 36–38.

[53] Vegeu [Fermat:1601], edició de 1999, p. 333–335; 345–348, i [Itard:1984], p. 50.

Volem resoldre $U^2 = 13\,X^2 + 1$. D'entrada observem que si $\langle x_0, u_0\rangle$ n'és una solució, aleshores $4x_0 > u_0 > 3x_0$. Per tant, si fem $u_0 = 3x_0 + x_1$, obtindrem:

(1) $4\,x_0^2 + 1 = 6\,x_0\,x_1 + x_1^2$, $2x_1 > x_0 > x_1$, $x_0 = x_1 + x_2$;

(2) $2\,x_1\,x_2 + 4\,x_2^2 = 3\,x_1^2 - 1$, $2\,x_2 > x_1 > x_2$, $x_1 = x_2 + x_3$;

(3) $3\,x_3^2 + 1 = 4\,x_2\,x_3 + 3\,x_2^2$, $2\,x_3 > x_2 > x_3$, $x_2 = x_3 + x_4$;

(4) $2\,x_3\,x_4 + 3\,x_4^2 = 4\,x_3^2 - 1$, $2\,x_4 > x_3 > x_4$, $x_3 = x_4 + x_5$;

(5) $x_4^2 + 1 = 6\,x_4\,x_5 + 4\,x_5^2$, $7\,x_5 > x_4 > 6\,x_5$, $x_4 = 6\,x_5 + x_6$;

(6) $6\,x_5\,x_6 + x_6^2 = 4\,x_5^2 - 1$, $2\,x_6 > x_5 > x_6$, $x_5 = x_6 + x_7$;

(7) $3\,x_6^2 + 1 = 2\,x_6\,x_7 + 4\,x_7^2$, $2\,x_7 > x_6 > x_7$, $x_6 = x_7 + x_8$;

(8) $4\,x_7\,x_8 + 3\,x_8^2 = 3\,x_7^2 - 1$, $2\,x_8 = x_7$.

La darrera equació porta a $x_8^2 - 1 = 0$. D'on, en resulta, tirant enrere, que $x_8 = 1$, $x_7 = 2$, $x_6 = 3$, $x_5 = 5$, $x_4 = 33$, $x_3 = 38$, $x_2 = 71$, $x_1 = 109$, $x_0 = 180$, i $u_0 = 649$.

Leonhard Euler s'adona de la manera de trobar les fites anteriors.[54] Per exemple, pel que fa a (1):

$$4\,x_0^2 = 6\,x_0\,x_1 + x_1^2 - 1, \quad x_0 = \frac{3\,x_1 + \sqrt{13\,x_1^2 - 4}}{4}, \quad x_1 < \frac{6\,x_1}{4} < x_0.$$

Tanmateix, com sabem prou bé, no fou pas aquest el mètode que s'imposà com a mètode per resoldre una equació de Pell. El mètode que finalment s'imposà fou el que donà Joseph Louis Lagrange, basat en les *fraccions contínues* de $\sqrt{A}$, on A no és quadrat perfecte.[55]

Lagrange demostrà que, en tot cas, la fracció contínua de $\sqrt{2}$ és de la forma:

$$\sqrt{A} = [\![a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2\,a_0}\,]\!].$$

Aleshores, atesa l'expressió que estableix la *llei general per expressar una fracció contínua*, en resulta que

[54] [Euler:1770], II, capítol 7, §105, p. 383.

[55] La raó d'aquest fet és que Lagrange no solament dona la manera de resoldre l'equació de Pell $x^2 = A\,y^2 = 1$, sinó que, a més, demostra que sempre té infinites solucions. En canvi, la validesa general del mètode de Brouncker-Wallis no fou establerta fins que l'any 1977 André Weil [París, 1906–Princeton, 1998] l'establí [Vegeu, per exemple, [Weil:1983], p. 92–97.]

$$\sqrt{A} = \frac{(a_0 + \sqrt{A}\,)p_n + p_{n-1}}{(a_0 + \sqrt{A}\,)q_n + q_{n-1}}.$$

Calculant resulta que

$$\begin{aligned} a_0\, q_n &= p_n - q_{n-1}, \\ a_0\, p_n &= A\, q_n - p_{n-1}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$p_n^2 - A\, q_n^2 = (-1)^n.$$

Amb aquesta metodologia, Lagrange estableix que les *penúltimes convergents* de cada període donen les solucions successives de l'equació $x^2 = A\,y^2 \pm 1$, segons que la primera correspongui a $x^2 = A\,y^2 - 1$ o a $x^2 = A\,y^2 + 1$.[56]

Joseph-Louis Lagrange
[Torí, 1736–París, 1813]

Ara bé, la primera aproximació a la resolució d'aquest problema la trobem al segle VII, en l'obra del matemàtic indi Brahmagupta.[57]

Fou millorada, al segle XII, amb les aportacions de Bhaskara.[58]

Considerem l'equació

$$x^2 = A\,y^2 + m,$$

on A és *prakṛti* —el quantificador, que és un valor fix—, m és *kṣepa* —l'*additiu*— i x i y són, respectivament, el *valor major* i el *valor menor*.[59]

Aleshores tot rau en la *bhāvanā* —o *regla de producció*— que estableix el següent:

Si $\langle x, y\rangle$ i $\langle z, t\rangle$ són, respectivament, solucions que corresponen als additius m i n, aleshores $\langle x\,z \pm A\,y\,t, x\,t \pm y\,z\rangle$ és una solució que correspon a l'additiu $m\,n$.[60]

[56] Vegeu [PLA:2014*a*], § 4.2.2, p. 149–150.
[57] Vegeu [COLEBROOKE:1817], p. 363–372, i [DATTA:1938], p. 150–151.
[58] Vegeu [COLEBROOKE:1817], p. 170–184, i [DATTA:1938], p. 161–172.
[59] Aquesta mena de problemes eren coneguts amb el nom de *vargaprakṛti* (*de naturalesa quadrada*).
[60] [COLEBROOKE:1817], p. 363–372, i [DATTA:1938], p. 150–151.

Breument i simbòlica:

$$\boxed{\big\langle \langle x, y; m\rangle, \langle z, t; n\rangle \big\rangle \mapsto \langle x\,z \pm A\,y\,t, x\,t \pm y\,z; m\,n\rangle.}$$

Aleshores els fets següents són clars:

(1) Si tenim $< p, q; 1 >$, tenim *infinites* solucions $< p_k, q_k; 1 >$.

(2) Si tenim $< x, y; m >$, aleshores $< X, Y; m^2 >$ dona una solució racional $\left\langle \frac{X}{m}, \frac{Y}{m}; 1\right\rangle$, que resol el problema si $\frac{X}{m}, \frac{Y}{m}$ són enters.

(3) Si $M = \mu\,m^2$, aleshores $\left\langle \frac{X}{m}, \frac{Y}{m}; \mu\right\rangle$ és una solució entera per a l'additiu μ, si $\frac{X}{m}, \frac{Y}{m}$ són enters.

Amb aquestes observacions Brahmagupta aconsegueix resoldre l'equació de Fermat-Pell $x^2 = A\,y^2 + 1$, quan $A = 8, 11, 83, 92$.[61]

De fet, el mètode indi es basa en el *cakravāla* —el procés és *cíclic*. Repetim el procés i, si aconseguim arribar als casos $m = \pm 1, \pm 2, \pm 4$, aleshores el problema per a $m = 1$ està resolt.[62]

Aquest mètode presenta dues dificultats.

La primera consisteix a saber

Per què és cíclic el mètode indi?

Però, com estableix André Weil, això és fàcil de respondre.[63]

Si tenim la solució $\langle p, q; m\rangle$[64] —és a dir, $p^2 = A\,q^2 + m$— amb A donat i fix, i m petit, tot rau a aconseguir $\langle x, y; m\,m'\rangle$, amb m' petit.

Aleshores, aplicant la *bhāvanā*, obtindrem $\langle X, Y; m^2 m'\rangle$ i, si X, Y són múltiples de m, anirem bé sempre que $m' < m$. Només caldrà que agafem $\langle p', q'; m'\rangle$, amb $p' = \frac{X}{m}$ i $q' = \frac{Y}{m}$.

Apliquem ara la *bhāvanā*, a les ternes $\langle x, 1; M\rangle$, on $M = x^2 - A$ i $\langle p, q; m\rangle$. Obtenim

[61] És curiós observar que la primera solució que Brouncker va oferir l'any 1657 a Fermat era racional, quelcom que Fermat va considerar poc interessant perquè trobar "solucions racionals és fàcil" i ja ho havia fet Diofant d'Alexandria. De fet, $m^2 = A\cdot 1^2 + (m^2 - A)$ i $\left(m^2 + A\right)^2 = A\,(2m)^2 + \left(m^2 - A\right)^2$ proporcionen, aplicant la *bhāvanā*, $\left(\frac{m^2+A}{m^2-A}\right)^2 = A\left(\frac{2m}{m^2-A}\right)^2 + 1$, que resol fàcilment l'equació, però les solucions són fraccionàries.

[62] Els casos $m = \pm 1$ són trivials: $p = 2xy,\ q = y^2 + Ax^2$. El cas $m = \pm 2$ porta a $p = xy,\ q = \frac{y^2+Ax^2}{2}$. Finalment, el cas $m = \pm 4$, porta a una solució més complexa que depén del fet que x sigui parell o senar, com podem veure a [?], p. 158–161.

[63] Vegeu [Weil:1983], p. 22–23.

[64] Podem suposar que $\langle q, m\rangle = 1$, ja que, altrament, tindríem $\langle p, m\rangle = d > 1$ i aleshores $d^2 | m$ i podríem agafar la solució $\langle \frac{p}{d}, \frac{q}{d}; \frac{m}{d^2}\rangle$.

$$X = p\,x + A\,q, \quad Y = p + q\,x,$$

que correspon a $m\,M$.

André Weil
[París, 1906–Princeton, 1998]

Pel *mètode de la kuṭṭaka*[65] podem agafar $Y = p + q\,x = \dot{m}(= q'\,m)$.[66] En resulta que

$$p = q'\,m - q\,x.$$

Aleshores

$$q^2 M = q^2\,x^2 - q^2\,A = q^2\,x^2 - p^2 + m = m\left(\frac{q\,x+p}{m} \times (q\,x - p) + 1\right).$$

En resulta que $M = \dot{m}$, atès que $\langle q, m\rangle = 1$. D'on,

$$X^2 = A\,Y^2 + m\,M = A\,Y^2 + m(m\,m')$$

i, atès que $Y = q'\,m$, tenim que $X = \dot{m}(= m\,p')$. Això ens permet d'escriure

$$q'^2 = A\,p'^2 + m'.$$

Per fer m' petit, agafem x mòdul m de manera que

$$x < \sqrt{A} < x + |m|. \qquad (\star)$$

[65] Vegeu la pàgina 8.
[66] Vegeu la nota 67.

Si $\sqrt{A}+x<0$, tindríem $2\sqrt{A}<|m|$. Per tant, si volem que m sigui petit, és a dir $|m|<2\sqrt{A}$, hem d'evitar la desigualtat anterior.

Si suposem, doncs, que efectivament és petit —és a a dir, si suposem que $|m|<2\sqrt{A}$—, per ($\star$) tenim que

$$\boxed{0<A-x^2=\big(\sqrt{A}-x\big)\big(\sqrt{A}+x\big)<2\,|m|\sqrt{A}\,.}$$

Per tant,

$$\boxed{|m'|=\frac{A-x^2}{|m|}<2\sqrt{A}\,.}$$

De tot això en resulta que els m' estan afitats i, per tant, s'han de repetir. D'aquí la *cakravāla* o caràcter cíclic del mètode.

La qüestió és:

> Podem aconseguir que es compleixi la condició suficient que hem imposat a l'additiu?

La resposta és afirmativa. Per veure-ho, comencem amb $\langle p_0,1;m_0\rangle$, on p_0^2 és el nombre enter més proper possible a A per sobre o per sota. Aleshores $p_0^2=A\cdot 1^2+m_0$ que compleix òbviament la condició suficient $|m_0|<2\sqrt{A}$. Podem, per tant, anar iterant i obtindrem, en tot cas, valors adequats.[67]

[67] A més, la *kuṭṭaca* és superflua. En el primer cas, $q_0=1$. Pels casos successius, observem que

$$\boxed{p'-q'\,x=\frac{p\,x+A\,q}{m}-\frac{p+q\,x}{m}\,x=\frac{A\,q-q\,x^2}{m}=\frac{q}{m}(A-x^2)=-q\frac{M}{m}=-q\,m'.}$$

Aleshores agafem $x'\equiv -x \pmod{m}$ i n'hi ha prou.

De fet, per veure que els nombres que es van aconseguint són enters podem procedir de la forma següent. Hem vist que, a partir d'una solució $\langle p,q;m\rangle$ podíem trobar un nombre enter $q'=\frac{p+q\,x}{m}$.

Aleshores tenim que $q'\,m=p+q\,x$ i $m=p^2-A\,q^2$. En resulta que $q'\big(p^2-A\,q^2\big)=p+q\,x$. D'on: $p(p\,q'-1)=q(x+A\,q\,q')$. Suposem que $\langle p,q\rangle=1$ i en resulta que $q|(p\,q'-1)$. Ara hem de provar que $\frac{x^2-A}{m}$ és enter. És fàcil atès que x^2-A és un nombre enter. Per tant,

$$\boxed{\begin{aligned}x^2-A&=\frac{(q'\,m-p)^2-A\,q^2}{q^2}=\frac{{q'}^2\,m^2-2\,p\,q'\,m+p^2-A\,q^2}{q^2}\\&=\frac{{q'}^2\,m^2-2\,p\,q'\,m+m}{q^2}=\frac{m\big({q'}^2\,m-2\,p\,q'+1\big)}{q^2}\end{aligned}}$$

La nova solució és doncs correcta en tots els sentits i això acaba la primera qüestió.

Molt més difícil de resoldre és la qüestió segona.

El mètode iteratiu porta finalment a un dels valors $m = \pm 1$, ± 2, ± 4?

No coneixem cap resposta senzilla a aquesta pregunta.[68]

Tanmateix el seguiment d'un exemple concret ens ho farà més entenedor.[69] Volem resoldre l'equació

$$\boxed{x^2 = 67\,y^2 + 1.}$$

D'acord amb l'observació de la pàgina 22, considerem la primera solució $\langle 8, 1\rangle$, on $\left|\sqrt{67} - 8\right|$ és mínim. Obtenim $m = -3$. Ara, d'acord amb la de la pàgina 20, composem aquesta solució amb $\langle x_1, 1\rangle$ a la que correspon l'additiu $M = x_1^2 - 67$. S'obté $\left\langle 8\,x_1 + 67, x_1 + 8; -3\,(x_1^2 - 67)\right\rangle$. Ara volem simplificar l'equació corresponent, $\left(8\,x_1 + 67\right)^2 = 67\left(x_1 + 8\right)^2 - 3\left(x_1^2 - 67\right)$, per 3 de manera que $|x_1^2 - 67|$ sigui mínim, és a dir, cal fer $x_1 = 7$. Obtenim $123^2 = 67 \times 15^2 + 3 \times 18$. Dividint-ho tot per 3^2, mena a $41^2 = 67 \times 5^2 + 6$. Ara hem de compondre $\langle 41, 5; 6\rangle$ i $\langle x_2, 1; x_2^2 - 67\rangle$. S'obté

$$\langle 41, 5; 6\rangle *_{67} \langle x_2, 1; x_2^2 - 67\rangle = \left\langle 41\,x_2 + 5, 5\,x_2 + 41; 6\,(x_2^2 - 67)\right\rangle.$$

Iterem el procés, buscant un x_2 tal que $5\,x_2 + 41$ sigui divisible per 6 i $|x_2^2 - 67|$ mínim. S'obté $x_2 = 5$ i l'equació és $90^2 = 67 \times 11^2 - 7$. Repetim el procés. La qüestió que es planteja, com déiem, és doble:

---

perímetre és un enter. Ara bé, com que $\langle m, q\rangle = 1$, resulta que

$$\boxed{\frac{x^2 - A}{m} = \frac{{q'}^2\,m - 2\,p\,q' + 1}{q^2}.}$$

Finalment, si fem $m' = \frac{x^2 - A}{m}$ i substituïm x pel que val, obtenim

$$\boxed{m' = \frac{{q'}^2\,m - 2\,p\,q' + 1}{q^2} = \frac{{q'}^2\,(p^2 - A\,q^2) - 2\,p\,q' + 1}{q^2} = \left(\frac{p\,q' - 1}{q}\right)^2 - A\,{q'}^2.}$$

[68] Hi ha dos textos, tots dos del segle XX, que donen una resposta detallada i completa d'aquesta qüestió. Són els articles d'[Ayyangar:1929] i [Selenius:1960]. Més recent, [Bhanu:1992], p. 141–154. I, més divulgatiu, [Selenius:1975].

[69] Seguirem el mètode de Bhāskara, heretat de Sripathi [1039], segons srnivasiengar:1967, edició de 1988, p. 112.

- S'acaba el procés?
- És possible resoldre l'equació diofàntica proposada originalment?

Per respondre-les, seguirem fins el final:

$$\langle 90, 11; -7\rangle *_{67} \langle x_3, 1; x_3^2 - 67\rangle = \left\langle 90\, x_3 + 11, 11\, x_3 + 90; -7\,(x_3^2 - 67)\right\rangle.$$

Volem que $11\, x_3 + 90$ sigui divisible per 7, amb $|x_3^2 - 67|$ mínim. Un cop simplificada, s'obté l'equació $221^2 = 67 \times 27^2 - 2$ en la qual l'additiu m és $m = -2$. Per tant, l'equació diofàntica original és resoluble. En efecte, fem

$$\langle 221, 27; -2\rangle *_{67} \langle 221, 27; -2\rangle = \left\langle 221^2 + 67 \times 27^2, 2 \times 27 \times 221; 4\right\rangle$$

i obtenim l'equació $\left(221^2 + 67 \times 27^2\right)^2 = 67\,\left(2 \times 27 \times 221\right)^2 + 4$. Aleshores, atès que $221^2 + 67 \times 27^2$ i $2 \times 27 \times 221$ són ambdós parells, l'equació anterior la podem dividir, terme a terme, per 4. Així aconseguim

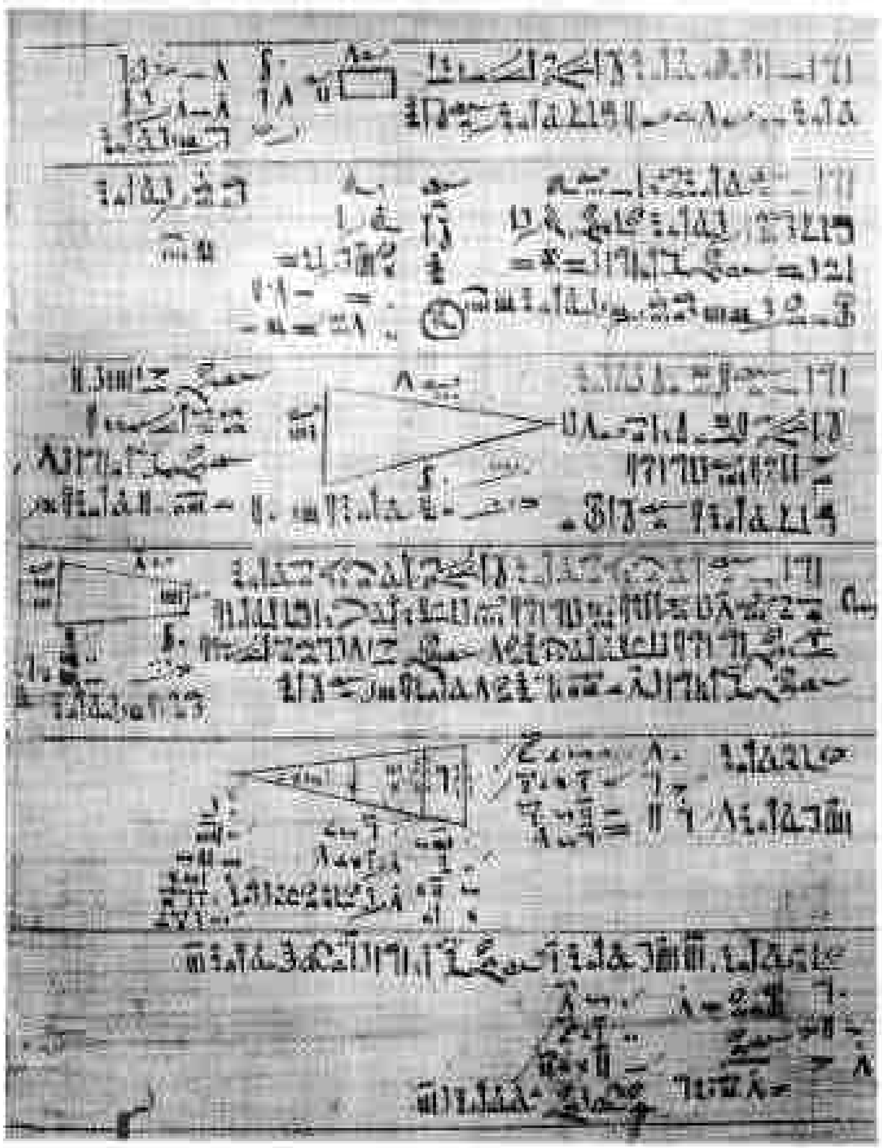
$$\boxed{48.842^2 = 67 \times 5967^2 + 1,}$$

que és el que cercàvem.

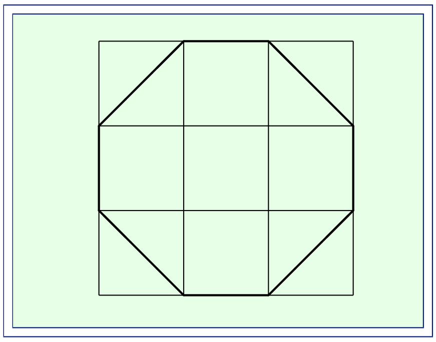
7 Aproximacions de π per exhaustió

És ben coneguda la preocupació des de l'antiguitat més remota per calcular el valor de la relació que hi ha entre una circumferència i el seu diàmetre o entre un cercle i el seu radi; és a dir, per a determinar valors aproximats d'aquest nombre transcendent que actualment anomenem π.

Ja en el problema 48 del papir Rhind hi trobem un càlcul aproximat d'aquest valor: $4\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 = 3,16\ldots.$



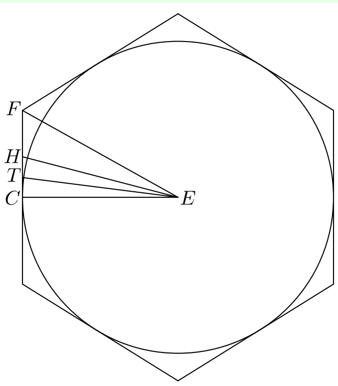
Problema 48 del papir Rhind



De fet l'escriba dona com a àrea d'un cercle de 9 unitats de diàmetre la d'un quadrat de costat 8 unitats (vegeu la figura). La idea de l'escriba consisteix a considerar que el cercle de 9 unitats de diàmetre es pot identificar amb l'octògon que correspon al quadrat circumscrit al cercle, si li traiem, de les puntes, els triangles rectangles isòsceles els catets dels qual tenen tres unitats.[70]

En una tauleta de Susa, hi trobem el valor de $\pi = 3\frac{1}{8} = 3,125$[71] i, al llibre 1 del Reis 7,2,3, el valor de π és tres.[72]

Tanmateix el primer avenç significatiu en l'estudi de π el trobem a l'article d'Arquimedes *De la mesura del cercle*. És important per dues raons:



Polígons circumscrits a la circumferència

En primer lloc, usant el mètode d'exhaustió, ofereix la primera demostració coneguda del fet que la relació que hi ha entre el diàmetre d'una circumferència i el seu perímetre és la mateixa que la que hi ha entre l'àrea del cercle i el quadrat del radi.

En segon lloc, perquè dona un mètode de tipus recursiu que, en principi, permet aconseguir, de forma estàndard, aproximacions racionals cada cop millors d'aquesta relació.[73]

Arquimedes, usant el llenguatge geomètric, estableix la llei trigonométri-

[70] En concret, $A \simeq A_8 = 81 - 18 = 63$. D'on, aproximadament, $A = 64$. Aleshores, com que el diàmetre val 9 unitats, resulta que $\pi = \frac{64}{\frac{81}{4}} = 4\left(\frac{9-1}{9}\right)^2 = 4\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2$.

[71] De fet, sabien que el perímetre d'un hexàgon és igual a sis vegades el radi de la circumferència circumscrita. Aleshores la tauleta dona la relació» entre el perímetre de l'hexàgon i la longitud de la circumferència: $\frac{6r}{C} = \frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2}$.

[72] Hi ha històries excel·lents del nombre π. Esmentem-ne dues: [Beckmann:1971] i [Petit Archimede:1980].
També disposem d'una recopilació dels textos més notables relatius a π: [Berggren:1997].

[73] Vegeu, per exemple, [Pla:2019*b*] p. 96-105, o [Berggren:1997], p. 7–14.
Pel que fa a les aproximacions de π, el que realment interessa no és tant el valor de l'aproximació que estableix Arquimedes, $\pi \simeq \frac{22}{7}$, com el mètode iteratiu que desenvolupa i que està inspirat en l'exhaustió.

ca que expressa la $\cot\frac{\theta}{2}$ en funció de la $\cot\theta$ i la $\operatorname{cosec}\theta$, sent la $\operatorname{cosec}\theta$ la hipotenusa del triangle rectangle de catets el radi (que agafarem igual a 1) i la $\cot\theta$.

Aplicant la propietat de la bisectriu d'un triangle, aplicada als polígons inscrits a la circumferència (vegeu la figura anterior),[74] tenim que

$$\boxed{\frac{EC}{HC}=\frac{EF}{HF}.}$$

Aleshores,[75]

$$\boxed{\frac{EC}{HC}=\frac{EC+EF}{HF+HC}=\frac{EC+EF}{FC}.}$$

Si, per simplificar, fem $EC=1$, $FC=\tan\theta$ i $HC=\tan\frac{\theta}{2}$, resulta que

$$\boxed{\cot\frac{\theta}{2}=\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta.}$$

Arquimedes
Siracusa 287–212 aC

Aleshores, a partir de l'hexàgon i de forma recurrent, pot anar calculant els costats del polígons circumscrits de 12, 24, 48, i 96 costats.

De forma anàloga, ho pot fer amb els polígons inscrits.

Així, en el ben entès que P_{96}, p_{96} indiquin els perímetres dels polígons regulars circumscrits i inscrits d'una circumferència C, resulta que

$$\boxed{p_{96}<C<P_{96}.}$$

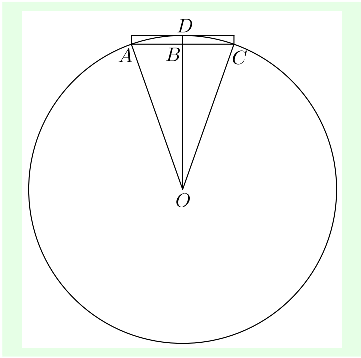
A partir d'aquest resultat aconsegueix demostrar la «desigualtat d'Arquimedes»:

Teorema. *El perímetre del cercle es més petit que $3\frac{1}{7}$ del diàmetre i més gran que $3\frac{10}{71}$ del diàmetre.*[76]

En concret,

$$\boxed{3\tfrac{10}{71}\,d<C<3\tfrac{1}{7}\,d.}$$

[74] Euclides, llibre vi, proposició 3, a [Pla:2018*a*], p. 305–307.
[75] Euclides, llibre vi, proposició 12, a [Pla:2018*a*], p. 285–286.
[76] És el tercer i últim teorema de l'article *De la mesura del cercle*. Vegeu [Masia:2016], p. 93–98, o [Pla:2019*b*], p. 384–397.



Aquesta metodologia serà retrobada pels matemàtics xinesos i, en particular per Liu Hui, el qual en lloc d'usar els perímetres dels polígons inscrits i circumscrits recorre a les àrees. I aleshores només precisa del *teorema de Pitàgores*.

El costat del n-ésim polígon inscrit l'anomenem a_n i l'àrea S_n. Aleshores, com Arquimedes, comença amb $n = 6$. Liu Hui suposa que OC = radi = r = 10. Aleshores $BC = \frac{1}{2}a_6 = 5$.[77]

Aplicant el teorema de Pitàgores a la figura adjunta resulta que

$$\begin{aligned} b_6 &= OB = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a_6^2} = 8,660254, \\ c_6 &= DB = r - b_6 = 1,339746, \\ a_{12}^2 &= DC^2 = c_6^2 + \frac{1}{4}a_6^2 = 26,7949193445. \end{aligned}$$

Liu Hui
Wei 220–Xina 280

Ara repetim el procés, aplicant-lo als polígons de dotze i vint-i-quatre costats, obtenim

$$\begin{aligned} b_{12} &= \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a_{12}^2} = 9,659258, \\ c_{12} &= r - b_{12} = 0,34742, \\ a_{24}^2 &= c_{12}^2 + \frac{1}{4}a_{12}^2 = 6,8148349466, \\ a_{24} &= 2,610523883. \end{aligned}$$

Repetint el procés iterativament, aconseguim els valors següents:

$$\begin{array}{llll} b_{24} = 9,914448, & c_{24} = 0,085552, & a_{48}^2 = 1,7110278813, & a_{48} = 1,30806, \\ b_{48} = 9,978589, & c_{48} = 0,021411, & a_{96}^2 = 0,4282154012, & a_{96} = 0,65438 \end{array}$$

D'aquests càlculs en resulta que les àrees S_{96} i S_{192} valen, respectivament:

[77] [Berggren:1997], p. 20–35.

$$S_{96} = 24\,r\,a_{48} = 313\tfrac{584}{625},\ S_{192} = 48\,r\,a_{96} = 314\tfrac{64}{625},\ \text{i } S_{192} - S_{96} = \tfrac{105}{625}.$$

Aleshores Liu Hui afirma que, si S és l'àrea del cercle, resulta que

$$314\tfrac{64}{625} = S_{192} < S < S_{96} + 2(S_{192} - S_{96}) = 314\tfrac{169}{625}.$$

El valor de π va fascinar els matemàtics xinesos. El clímax s'aconseguí amb l'obra *Su Shu* (*Mètode d'interpolació*) de Tsu Chung Chih [∼480]. Aplicant la metodologia de Liu Hui a una circumferència de diàmetre 10 i calculant les superfícies dels polígons regulars fins a 24.576 costats, va aconseguir l'aproximació $3,1415926 < \pi < 3,1415927$, que li permeté trobar l'aproximació $\pi \simeq \frac{355}{113}$ que és correcta fins a la sisena xifra decimal. A Occident aquesta aproximació la retrobà, l'any 1585, el matemàtic holandés Adriaan Antoniszoon [1527–1607].[78]

Aquest resultat fou publicat l'any 1625 pel seu fill Adrien Metius, amb l'explicació que s'obté fàcilment de l'afitació $\frac{333}{106} < \pi < \frac{377}{120}$.[79]

Com déiem més amunt, en el text paradigmàtic d'Arquimedes *De la mesura del cercle*, el càlcul de les aproximacions de π està inclòs en un context més ampli —el de l'exhsuatió. Hi estableix un resultat que era ben conegut pels matemàtics xinesos i probablement tambe pel babilònics:

Teorema. *L'àrea del cercle és la mateixa que la d'un triangle rectangle els catets del qual són iguals al radi i a la circumferència del cercle.*[80]

La demostració —o potser fora millor dir, com en tantes ocasions, la *mostració*— oriental és del tipus tangram. És a dir, la que s'obté per descomposició d'una de les figures en peces que, un cop recompostes, donen l'altra figura. Ara bé, en aquest cas el tangram és infinit.[81]

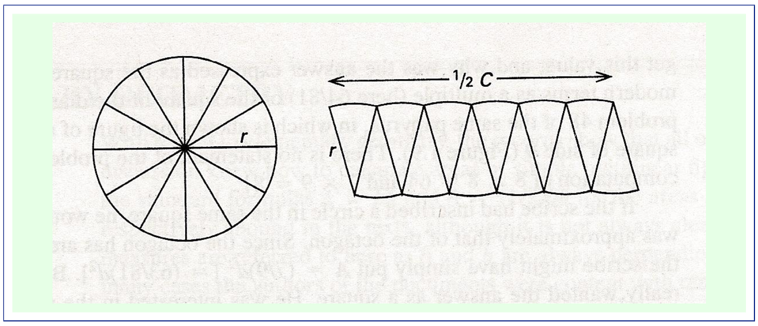
[78] És curiós observar que aquest valor s'obté restant, respectivament, els numeradors i denominadors de l'aproximació de Ptolemeu [segle II], $\pi \simeq \frac{377}{120}$, i la d'Arquimedes, $\pi \simeq \frac{22}{7}$.

Ptolemeu l'obtingué identificant la circumferència amb el polígon regular de 360 costats i considerant aleshores que la longitud L de la circumferència era igual a $L = 360 \times$ corda d'1°. Aleshores agafà el valor de la corda d'1° de la *taula de cordes* de la *Sintaxis matemàtica*. Els matemàtics àrabs van considerar el text d'astronomia de Ptolemeu l'«obra gran» i d'aleshores ençà se la coneix amb el nom d'*Almagest*.

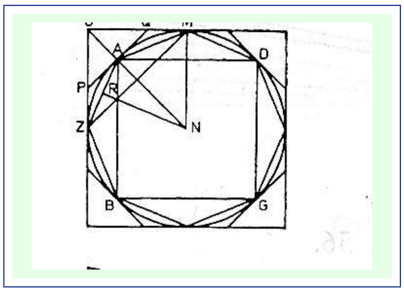
[79] Cal considerar les semisumes dels numeradors i dels denominadors.

[80] És el primer teorema de l'article *De la mersura del cercle* i és la primera vegada que s'estableix que la raó entre àrea i diàmetre i perímetre i diagonal és la mateixa; és a dir, $\frac{S}{r^2} = \frac{L}{d}$. Vegeu [Masia:2016], p. •.

[81] Com déiem a la pàgina 25 de la primera part, «les figures molt petites, no tenen forma». Per tant, ambdues figures —cercle i paral·lelogram tenen la mateixa superfície. L'àrea del paral·lelogram és igual al semiperímetre de la circumferència de l'esquerra pel radi.



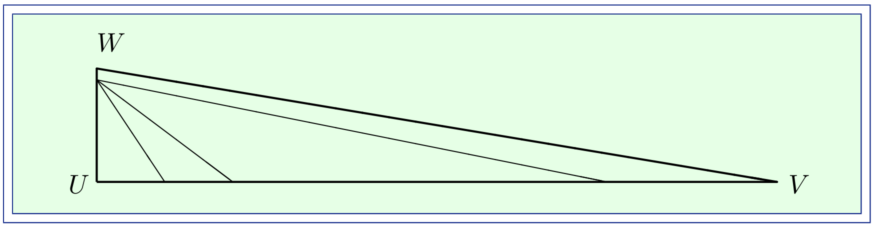
Per això podem afirmar sense cap mena de pudor que la primera demostració d'aquest teorema és la que ofereix Arquimedes.



Tot rau en el fet que, en el cas dels polígons regulars inscrits en un cercle, el quadrat, l'octògon, el de setze costats, etc. exhaureixen la circumferència.

Volem veure que $T = S$, on T i S designen, respectivament, les superfícies del triangle i del cercle.

En primer lloc, suposem que $T < S$, i considerem $\epsilon = S - T$. Aleshores, per l'exhaustió, existeix un polígon regular P, de 2^n costats, tal que $S - P < \epsilon = S - T$. Ara portem tots el triangles $\triangle AMN$, que formen el polígon P, dins del triangle T, de manera que el costat AM estigui damunt la base UV, tal com s'indica a la figura:[82]



Atés que els triangles que componen el polígon regular P són més baixos que el triangle T i que el perímetre del polígon inscrit P és més curt que la longitud de la circumferència, resulta que $S < T$, en contra de la hipòtesi.

Els polígons regulars circumscrits —el quadrat, l'octògon, el polígon de setze costats, etc.— també exhaureixen el cercle i, per tant, podem raonar de forma anàloga en el cas en què la hipòtesi sigui $S < T$. S'arriba també a contradicció i, aleshores, per coherència lògica —novament la racionalitat grega— en resulta que $T = S$.

[82] Com deiem al corol·lari de la pàgina 13 de la primera part.

8 Càlculs de π usant l'infinit actual

La racionalitat grega és, també en aquest cas, més important que el simple càlcul algorísmic de les aproximacions del valor de la «relació» que hi ha entre una circumferència el seu diàmetre però, com és preceptiu, evita l'infinit actual.

Tanmateix, però, el mètode de càlcul de Liu Hui és el que reprèn François Viéte, però Viéte utilitza el llenguatge trigonométric.

S'adona que, si es compara l'àrea del polígon regular de n costats

$$\begin{aligned} A_n &= n \times \text{rea}(\triangle\, OAB) \\ &= r^2 \sin\beta\, \cos\beta = \frac{1}{2} \sin 2\beta \end{aligned}$$

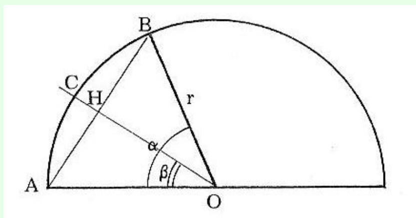
amb l'àrea del de $2n$ costats

$$A_{2n} = \sin\frac{\beta}{2}\, \cos\frac{\beta}{2},$$

s'obté:[83]

$$\frac{A_n}{A_{2n}} = \cos\beta.$$

François Viéte
Fonteney-le-Compte 1540–París 1603



De tot això, multiplicant les fraccions $\frac{A_i}{A_{i+1}}$, amb $i = n, \ldots, 2^k\, n$, en resulta la igualtat següent:

$$\frac{A_n}{A_{2^k n}} = \frac{A_n}{A_{2n}} \times \frac{A_{2n}}{A_{4n}} \times \frac{A_{2^{k-1} n}}{A_{2^k n}} = \cos\beta\, \cos\frac{\beta}{2}\, \cos\frac{\beta}{4} \cdots \cos\frac{\beta}{2^k}.$$

És clar que, informalment, quan $k \to \infty$, el polígon $A_{2^k n} \to \pi\, r^2$.
Per tant,

$$\pi = \frac{\frac{1}{2}\, n\, \sin 2\,\beta}{\cos\beta\, \cos\frac{\beta}{2}\, \cos\frac{\beta}{4} \cdots}.$$

[83] [Berggren:1997], p. 53–67. Vegeu també [Petit Archimede:1980], p. 49–51, o [Beckmann:1971], edició castellana, p. 87–88.

Si ara, inicialment, fem $n = 4$, aleshores $\alpha = 2\,\beta = \frac{\pi}{2}$. Per tant, $\sin\alpha = 1$ i $\cos\beta = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Usant, doncs, la fórmula del cosinus de l'angle meitat

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\beta}\,,$$

Finalment s'obté que

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ \cdots}$$

És la primera vegada a la història de la matemàtica d'Occident que s'estableix el valor de π com una expressió actualment infinita, a través de l'ús de pas al límit.[84]

Tanmateix, el primer matemàtic que relaciona el càlcul de π amb l'àrea del cercle a través de la integració o quadratura és John Wallis.[85]

John Wallis
Ashford 1616–Oxford 1703

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

A l'*Arithmetica infinitorum* [1655], aquest insigne matemàtic anglés, s'adona que

El seu mètode —basat en la «interpolació» a partir de casos concrets— és força sofisticat i complex.[86] Obté el resultat, ben conegut de tots:

[84]La convergència d'aquest producte infinit fou establerta efectivament per F. Rubio en 1891.

[85]Un cop ha aconseguit establir la integral $\int_0^a x^n\,dx = \frac{1}{n+1}a^{n+1}$, àdhuc, quan n és racional i, de retruc, de les funcions potencials $\left(1 + x^{\frac{m}{n}}\right)^p$, amb m, n, p enters, es planteja la possibilitat d'integrar expressions en les quals p és racional i, en particular, la funció $f(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Aleshores estableix que $\frac{1}{\square} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{m} \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$, on $\square = \frac{4}{\pi}$ i $\sum\limits_{k=0}^{m} \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$ és la típica «suma de Riemann» de la funció $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ corresponent a una subdivisió de l'interval $[0, 1]$ en n subintervals iguals.

[86]Vegeu, per exemple, [Nunn:1909], p. 377–386.

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2\,k)^2}{(2\,k-1)(2\,k+1)} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdots}.$$

Per aconseguir-lo raona així.

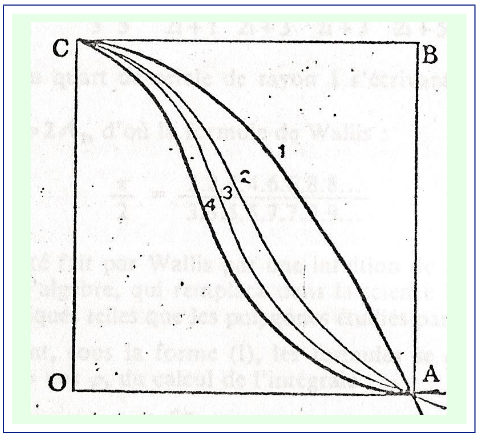
Calcula els valors numèrics $a_{p,q}$, amb $0 \leq p, q \leq 10$, de les expressions $\left(\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx\right)^{-1}$ i obté la taula:

p	q = 0	1	2	3	4	$\cdots$	9	10
0	1	1	1	1	1	$\cdots$	1	1
1	1	2	3	4	5	$\cdots$	10	11
2	1	3	6	10	15	$\cdots$	55	66
3	1	4	10	20	35	$\cdots$	220	286
4	1	5	15	35	70	$\cdots$	715	1001
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
10	1	11	66	286	101	$\cdots$	27.189	184.756

Observant la taula, d'altra banda ben coneguda, obté la llei generadora següent:

$$a_{p,q} = \frac{p+q}{q} a_{p,q-1} = \frac{1}{p!}(q+1)(q+2)\cdots(q+p).$$

Aleshores trasllada aquesta propietat als índexs fraccionaris $a_{\frac{p}{2},\frac{q}{2}}$ i fa $a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \square$ que és, d'alguna manera, el que vol calcular. D'aquesta manera, per mitjà de l'expressió deduïda per analogia $a_{\frac{p}{2},\frac{q}{2}} = \frac{p+q}{q}\,a_{\frac{p}{2},\frac{q}{2}-1}$, aconsegueix expressar els valors de $a_{\frac{p}{2},\frac{q}{2}}$ en funció del terme anterior $a_{\frac{p}{2},\frac{q}{2}-1}$. Això li permet calcular els valors inversos $b_q = a_{\frac{1}{2},\frac{q}{2}} = \left(\int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}\right)^q dx\right)^{-1}$ de les integrals que donen les àrees que hi ha dessota de les corbes de la figura següent:



En concret:

$$b_0 = 1,\ b_1 = \square,\ b_2 = \frac{3}{2},\ b_3 = \frac{4}{3}\square,\ b_4 = \frac{15}{8},\ b_5 = \frac{8}{5}\square,\ b_6 = \frac{105}{48},\ \cdots ,$$

i, en definitiva,

$$b_q = \frac{q+1}{q}\, b_{q-2} = \begin{cases} 1 \times \dfrac{3}{2} \times \dfrac{5}{4} \times \cdots \times \dfrac{q+1}{q}, & \text{quan } q \text{ és parell,} \\[2ex] \dfrac{\square}{2} \times \dfrac{2}{1} \times \dfrac{4}{3} \times \cdots \times \dfrac{q+1}{q}, & \text{quan } q \text{ és senar.} \end{cases}$$

El fet que les àrees siguin decreixents li permet d'escriure

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_{2n-1} < b_{2n} < b_{2n+1} < \cdots$$

i, substituint els valors de b_{2n-1}, b_{2n} i b_{2n+1}, obté finalment:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{(2\,k)^2}{(2\,k-1)(2\,k+1)} < \frac{2}{\square} < \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{(2\,k)^2}{(2\,k-1)(2\,k+1)} \right) \frac{2\,n+2}{2\,n+1}.$$

Aleshores, fent que $n \to \infty$, s'aconsegueix l'expressió buscada.[87]

[87] Val la pena indicar que aquest mètode el retrobem en el *Circolo* [1672] de Pietro Mengoli [Bolonya, 1626–1686]. És un text posterior al de Wallis i que tingué molta menys influència, però en el qual s'estableix una manera de calcular quadratures del mateix tipus que la de Wallis.

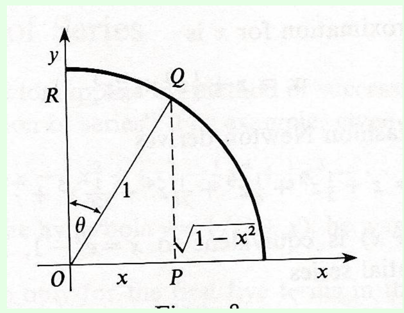
9 Les funcions trigonomètriques en sèrie de potències

Isaac Newton, conscient del poder del mètode de Wallis i perplex par la seva complexitat, analitza el «teorema del binomi»,[88] i estableix el desenvolupament en sèrie de l'arcsin, basant-se en el càlcul directe de quadratures, en el fet que la funció $\sqrt{1-x^2}$ admet el desenvolupament en sèrie

Isaac Newton
Woolsthorpe 1642–Kensington 1727

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \cdots$$

i en qué, segons el resultat de Johannes Kepler [Weil der Stadt 1571–Regensburg 1630][89] (vegeu la figura següent).



$$\theta = 2\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dx - x\sqrt{1-x^2} = 2\ \text{sector}\,(ROQ).$$

Aleshores, acceptant que la integral —o «quadratura»— d'una funció que admet un desenvolupament en sèrie s'obté integrant, terme a terme, la sèrie que la representa i sumant la nova sèrie, obté el resultat següent:[90]

$$\theta = 2\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dx - x\sqrt{1-x^2} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots,$$

88[Pla:1989].
89[Kepler:1615], edició francesa de 1993, p. 16.
90El *De Analysi per Æquationes Numero Terminorum Infinitas*, fou escrit l'estiu de 1669, però no fou publicat fins l'any 1711. Vegeu [Whiteside:1967], volum II, p. 206–247.

Quan, en 1669, John Collins [Wood Eaton, 1624–London, 1683] rep el *De Analysis* en comunica els resultats a James Gregory, que li contesta que ha trobat el desenvolupament en sèrie de la $\tan x$, la $\sec x$ i l'$\arctan x$.[91] Aquesta darrera és la famosa i coneguda «sèrie de Gregory» de 1671:

James Gregory
Aberdeen 1638–Edimburg 1675

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Com sabem, és una expressió molt útil per donar el valor de π per mitjà d'una sèrie. Tota la dificultat rau a establir que

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2},$$

atés que aleshores pot procedir fàcilment de forma recursiva:

$$F_0(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{1+x^2} = \\ = 1 - x^2F_0(x) = 1 - x^2 + x^4F_0(x) = \cdots$$

En resulta trivialment que

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots - x^{4k-2} < F_0(x) < 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + x^{4k}$$

i, integrant terme a terme, obté el resultat desitjat.

Tanmateix es manté la dificultat següent:

Per què la integral de la funció $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ és la funció $\arctan x$?

Aquesta qüestió ja l'havien respost, un segle i mig abans, els matemàtics indis en un text d'astronomia, escrit en sànscrit —el *Tantrasaṅgraha-vyaākhyā* (∼1530).[92] Molts dels resultats indis, amb les seves respectives

[91] Carta de Collins, de 24 de desembre de 1670; resposta de Gregory, 15 de febrer de 1671. Vegeu [Turnbull:1959], p. 52–58 i 61–64.

[92] És el comentari d'un text uns trenta anys més antic en què s'hi estudien les funcions trigonomètriques, directes i inverses.

demostracions, ens arriben a través del *Yuktibhāsa*, escrit per Jyesthadeva [Kerala ∼1500-∼1575]. És un text escrit en Malyalam, la llengua de Kerala, una regió del sudoest d'Índia que atribueix el «desenvolupament en série de l'arctangent» al matemàtic Madhava de Sangamagramma [Sangamagramma ∼1350–1425], un lloc proper a Cochin. Li atribueix els versos següents:[93]

> *El producte del sinus pel radi, dividit pel cosinus és el primer resultat. Del primer [i del segon, i del tercer, etc.] resultat, obtinc [successivament] una successió de resultats agafant repetidament el quadrat del sinus com a multiplicador i el quadrat del cosinus com a divisor. Divideixo els resultats anteriors, de forma ordenada, pels nombres senars, un, tres, cinc, etc. A la suma dels termes de lloc senar l'hi resto la suma dels termes de lloc parell. El resultat és l'arc. En relació a això... el sinus de l'arc o el del seu complement, en el cas que sigui menor, podrà considerar-se el sinus. En altres paraules, els termes que s'obtenen en el procés d'iteració no tendeixen a la magnitud evanescent.*

De fet, tot és una conseqüència immediata del teorema següent, d'altra banda força senzill i intuïtiu:

> **Teorema**. *Sigui O el centre d'un cercle de radi unitat, BC un arc petit. Si OB i OC tallen la tangent per A a la circumferència en els punts B_1, C_1, respectivament, aleshores*
>
> *(i)* $BD = \dfrac{B_1C_1}{OB_1 \times OC_1}$,
>
> *(ii)* $\operatorname{arc} BC \simeq \dfrac{B_1C_1}{1 + AB_1^2}$.

La demostració és senzilla.

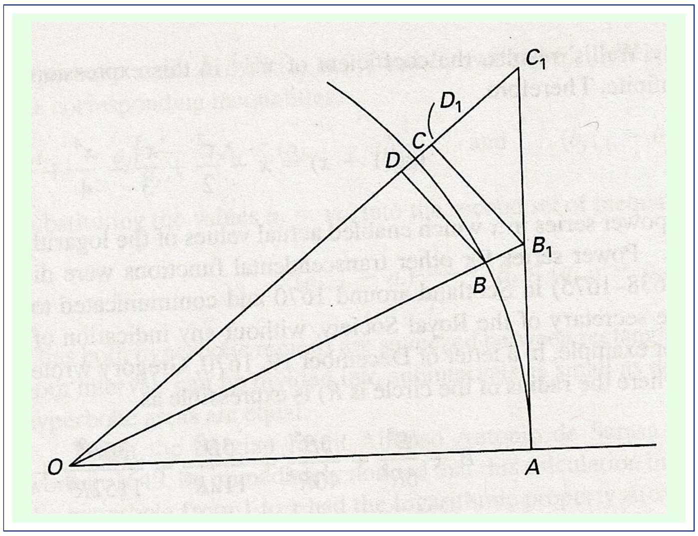
(i) Fem les perpendiculars BD, B_1D_1 a la recta OC. Per la semblança dels triangles $\triangle OBD$, $\triangle OB_1D_1$, resulta que

$$\boxed{\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{1}{OB_1}.}$$

I, per la dels triangles $\triangle OAC_1$, $\triangle B_1D_1C_1$,

[93] [Gupta:1973]. Vegeu [Srinivasiengar:1967], edició de 1988, p. 142–154.

$$\frac{B_1D_1}{B_1C_1} = \frac{OA}{OC_1} = \frac{1}{OC_1}.$$



Per tant,

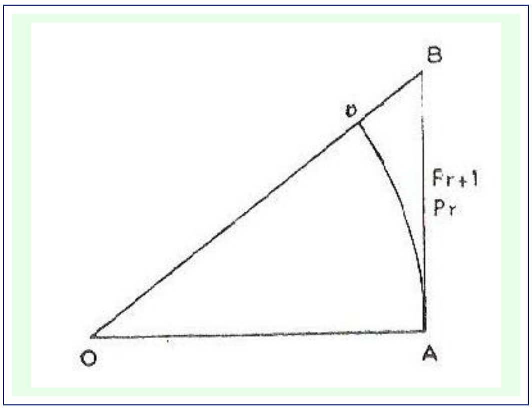
$$BD = \frac{B_1C_1}{OB_1 \times OC_1},$$

tal com volíem.

(ii) Com que l'arc BC és petit, $OB_1 \simeq OC_1$ i, per tant,

$$\text{arc}\, BC \simeq \frac{B_1C_1}{1 + AB_1^2}.$$

D'aquí és fàcil deduir-ne l'expressió de l'arctangent de la forma següent.



Dividim la tangent $t = AC_1$ a l'arc AC en n parts iguals, tal com s'indica a la figura, i aleshores, a cada segment, li apliquem reiteradament el teorema precedent. Després fem n gran. Obtenim:

$$\boxed{\arctan t = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{P_r\,P_{r+1}}{1+A\,P_r^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\frac{t}{n}}{1+\left(\frac{r\,t}{n}\right)^2},}$$

que és la funció $\arctan\, t$, obtinguda com a resultat de la quadratura de la corba $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.[94]

El matemàtic indi, tanmateix, va més lluny i estableix l'expressió que hem trobat en el text atribuït a Madhava:

$$\begin{aligned}
\arctan t &= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{P_r\,P_{r+1}}{1+A\,P_r^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\frac{t}{n}}{1+\left(\frac{r\,t}{n}\right)^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{t}{n}\left[1-\left(\frac{r\,t}{n}\right)^2+\cdots+(-1)^{\nu-1}\left(\frac{r\,t}{n}\right)^{2\nu-2}+\frac{(-1)^{\nu}\left(\frac{r\,t}{n}\right)^{2\nu}}{1+\left(\frac{r\,t}{n}\right)^2}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{t}{n}+\frac{t}{n}\left(1-\frac{t^2}{n^2}+\frac{t^4}{n^4}-\cdots\right)+\frac{t}{n}\left(1-\frac{2^2t^2}{n^2}+\frac{2^4\,t^4}{n^4}-\cdots\right)\right.\\
&\qquad +\frac{t}{n}\left(1-\frac{3^2\,t^2}{n^2}+\frac{3^4\,t^4}{n^4}-\cdots\right)+\cdots\\
&\qquad\left.\cdots+\frac{t}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2t^2}{n^2}+\frac{(n-1)^4\,t^4}{n^4}-\cdots\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[t-\frac{t^3}{n^3}\left(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{t^5}{n^5}\left(1^4+2^4+\cdots+(n-1)^4\right)-\cdots\right]
\end{aligned}$$

Usant aleshores el resultat d'Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham [Bàsora 965-Caire 1040]:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+(n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},}$$

aconsegueix la sèrie buscada

[94] La quadratura d'una corba és la suma dels rectangles de base $\frac{t}{n}$ i altura l'ordenada corresponent a l'abscisa $\frac{r\,t}{n}$, $r = 1, 2, \ldots, n$. és a dir, la famosa "suma de Riemann".

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{t^{2\nu-1}}{2\nu-1} + \cdots$$

Finalment, substituint $t = 1$, obté la famosa «sèrie de Leibniz»:[95]

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Gottfried Wilhelm Leibniz
Leipzig 1646–Hanover 1716

Pot resultar interessant de comparar aquest resultat de Madhava —la funció $\arctan x$ com a integral de la funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$— amb el resultat anàleg, molt poc conegut, que obtingué Gottfried Wilhelm Leibniz el 1674.[96]

Sigui b un valor donat per endavant i $y = \arctan b$. Suposem que els arcs AD, DC són iguals. Aleshores, d'acord amb el resultat de Kepler, abans esmentat, l'àrea G del sector $OADCO$ de la figura següent val la *meitat* de longitud de l'arc. És a dir,

$$G = y.$$

L'àrea F del quadrilàter $OABCO$, composta pels dos triangles iguals, és

$$F = b.$$

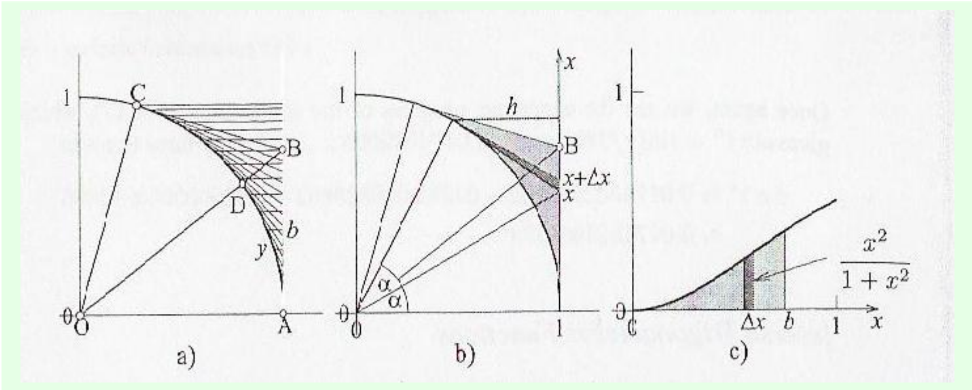
[95]Conscient de la lentitud en la convergència, el *Tantrasaṅgraha-vyaākhyā* també estableix d'altres sèries que convergeixen molt més ràpidament, com ara, per exemple:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^3-3} - \frac{1}{5^3-5} + \frac{1}{7^3-7} - \cdots$$

Vegeu, per exemple, [Bag:1979], p. 286–300.

[96]Vegeu [Cantor:1880], volum III, p. 80, o bé [Hairer:1963], p. 49–51.

Cal indicar, però, que, uns anys abans, Leibniz ja havia aconseguit la sèrie anterior que expressa el valor de $\frac{\pi}{4}$, usant el «mètode de transmutació», el mateix mètode que havia comunicat a Newton com a resposta (carta de 27 d'agost de 1676) a la carta prior del matemàtic anglès (carta de 13 de juny de 1676) que és la carta en la qual Newton exposa la «llei del binomi», un fet realment significatiu perquè aquesta no la trobem en els seus textos. En línia a http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00198.



El problema rau, doncs, a calcular l'àrea L de la lúnula $ABCDA$. Leibniz la descompon en triangles petits, d'acord amb la figura (b), cada un dels quals té una àrea igual a

$$\frac{\Delta x \cdot h}{2} = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \Delta x \,,$$

atés que

$$h = 1 - \cos(2\,\alpha) = 2\,\sin^2\alpha = \frac{2\,\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{2\,\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha + 1} = \frac{2\,x^2}{1+x^2}\,.$$

Per tant, l'àrea L de la lúnula és l'àrea que hi ha dessota el gràfic de la figura (c) anterior

$$\frac{2\,x^2}{1+x^2} = x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + x^{10} - \cdots$$

Aplicant ara el resultat, ben conegut a l'època,[97] segons el qual

$$\int_0^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1},$$

resulta que

$$L = \frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9} + \frac{b^{11}}{11} - \cdots,$$

[97]L'havia calculat ja Bonaventura Cavalieri [Milà 1598–Bolonya 1647].

i finalment

$$\boxed{y = G = F - L = b - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11} + \cdots,}$$

que porta a la sèrie desitjada de la funció $y = \arctan b$.

10 Les diferencials de les funcions trigonomètriques

Val la pena fer el comentari següent. Mentre que, en els textos orientals, els resultats estan totalment lligats al càlcul numèric i a l'obtenció del valor aproximat de π, ja sigui per ell mateix, o per la seva vinculació amb d'altres càlculs astronòmics, en els textos occidentals la situació és ben diferent.

Pel que fa, en concret, a l'obra d'Arquimedes, el càlcul del valor aproximat de π, es troba, com ja hem indicat, en un treball petit —de tres proposicions— la primera de les quals demostra per primera vegada, amb rigor, que «la raó que hi ha entre el perímetre de la circumferència i el diàmetre és la mateixa que hi ha entre l'àrea del cercle i el quadrat del radi».[98]

Anàlogament, a Occident, l'obtenció del desenvolupament en sèrie de les funcions trigonométriques té un sentit molt més ampli que no pas a Orient. Està inclòs en tot el procés de «càlcul integral-diferencial» que, iniciat a la segona meitat del segle XVI, trobarà la seva expressió definitiva en les obres de Newton i Leibniz i serà consolidada en l'obra de Leonhard Euler [Basel 1707–St. Petesburg 1783], *Introductio in Analysim Infinitorum* [1748] en la qual les corbes deixen de ser les protagonistes de la recerca matemàtica i són substituïdes per les funcions. Això comporta una dificultat que s'ha resoldre: calen «expressions matemàtiques» que permetin expressar, al marge de la geometria, les corbes dels antics i de les que vagin aparaixent.[99]

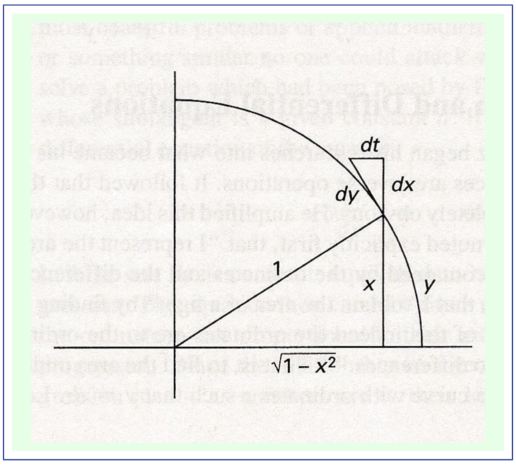
Cal, a més, que aquestes expressions siguin susceptibles de ser tractades amb les noves eines del càlcul que precisen les descobertes dels astrònoms de la segona meitat del segle XVII i, en particular, de Johannes Kepler i Galileo Galilei [Pisa, 1564–Arectri, 1642] per esdevenir profitoses i potents. Aquest càlcul és, en termes newtonians, el «càlcul de fluxions» i, en termes leibnizians, el «càlcul diferencial».

[98]Vegeu la pàgina 29.

[99]En aquest sentit, la matemàtica està en deute amb René Descartes [La Haye (avui Descartes), 1596–Estocolm, 1650] i la seva gran intuïció, desenvolupada a la *Géométrie* [1637]. Vegeu, per exemple, [Bos:1981], o [Pla-Viader:1999].

La primera vegada que les diferencials de les funcions aritmètiques elementals féu aparició a Occident, amb el sentit de «diferències petites», fou a l'obra *Nova Methodus pro maximis et minimis* [1684] de Leibniz.[100] A poc a poc, ell mateix i els germans Bernoulli —Jakob Bernoulli [Basilea, 1654–1705] i Johann Bernoulli [Basilea, 1667–1748]— aniran trobant les diferencials de les funcions transcendents com ara el logaritme, l'exponencial, les funcions trigonomètriques, etc., totes les quals ja havien sigut obtingudes pel mètode de fluxions i el desenvolupament en sèrie per Newton. Però el càlcul directe de les diferencials de les funcions transcendents no serà fàcil. Caldrà un cert temps i paciència.

Per exemple, el propi Leibniz —a l'hora de donar la funció sinus— ho fa a través de l'«equació diferencial», de la forma següent.[101] Considera el «triangle diferencial» de costats dy, dt i dx, on y mesura l'arc,



que, com veiem a la figura adjunta, és semblant al triangle de costats 1, x i $\sqrt{1-x^2}$. Per tant,

$$dt = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Pel teorema de Pitàgores,

$$dx^2 + dt^2 = dy^2\,.$$

Si substituïm dt pel seu valor i simplifiquem, obtenim l'«equació diferencial» que lliga l'arc de circumferència i el sinus:

[100] [Leibniz:1684]. En aquest text, Leibniz fa una defensa de la importància i les possibilitats d'aquest nou mètode, però només ofereix la part algèbrica del càlcul.

[101] [Leibniz:1693].

$$dx^2 + x^2\,dy^2 = dy^2.$$

Suposem ara que dy és constant i diferenciem l'equació anterior. Tindrem:

$$d(dx^2 + x^2\,dy^2\,y) = 0\,,$$

És a dir:

$$2\,dx(d\,d\,x) + 2x\,dx\,dy = 0\,.$$

Així obté l'«equació diferencial del sinus»:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -x\,.$$

Leibniz la resol usant el «mètode dels coeficients indeterminats» que era tan usual en la manera de fer de Newton. és a dir, suposa que

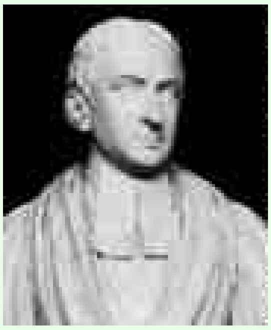
$$x = b\,y + c\,y^3 + e\,y^5 + f\,y^7 + g\,y^9 + \cdots\,,$$

opera, substitueix, compara coeficients i resol.[102] Obté:

$$x = \sin y = y - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \cdots\,.$$

D'aquesta manera obté la derivada.[103]

Però és Roger Cotes, l'editor de la segona edició dels *Principia* de Newton, qui dona la «derivada» del sinus de forma directa, i ho fa vint anys abans que ho fes Thomas Simpson [1710–1761] a *A New Treatise of Fluxions* [1737], usant la semblança dels triangles de la figura que mostrem més avall.



Roger Cotes
Burbage 1682–Cambridge 1716

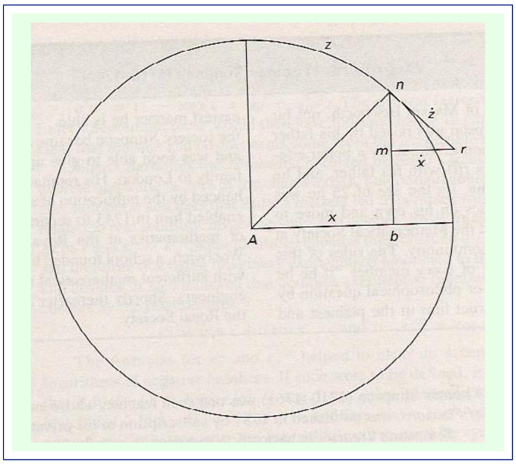
Si z designa l'arc d'una circumferència de radi An i centre A, $x = A\,b$ el sinus de z, i bn el cosinus, aleshores el triangle diferencial nrm —d'hipotenusa rn que representa la fluxió $\dot{z}$ de l'arc i el catet mr que representa la fluxió $\dot{x}$ del sinus— és semblant al triangle Anb. Se'n segueix que

[102]Té en compte el caràcter «senar» de la funció sinus.

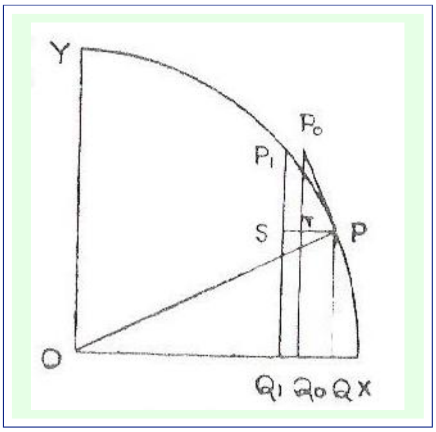
[103]Ho fa seguint el camí de Newton, que consisteix a usar les sèries de potències com a expressions matemàtiques de les funcions transcendents.

$$\boxed{\dot{z} : \dot{x} = An : bn\,,}$$

que és el resultat buscat.[104]



Però fou novament la preocupació per les qüestions d'astronomia dels matemàtics indis i, en particular de Bashkara II [Vijayapura 1114–Ujjain 1185], el que va fer que s'avancessin també en l'obtenció de la derivada de les funcions trigonométriques.[105] En el capítol *Spastādhihāra* del seu *Siddhāntaśiromanii̅* tracta el «moviment en un instant» d'un planeta, on un instant és més petit que $\frac{1}{33.750}$ de segon. Estableix la diferència entre «moviment» i «moviment instantani». Això el porta entre altres resultats a considerar, per exemple, la diferència entre «dos sinus consecutius», de la forma següent. Considerem el quart de cercle $PP_0 = A$, l'arc $XP = y$ i l'arc $XP_1 = y'$, aleshores òbviament



$$\boxed{P_1S = \sin y' - \sin i = p_1Q_1 - PQ = \text{diferència petita del sinus}}$$

i

$$\boxed{P_0T = P_0Q_0 - PQ = \text{diferència petita de l'arc.}}$$

[104]En notació actual, cal fer $An = 1$ i aleshores ho podem escriure en la forma $\frac{d(\sin z)}{dz} = \cos z$.

[105]Vegeu [Bag:1979], 286–300.

Ara, en els triangles semblants $\triangle\, POQ$ i $\triangle\, P_0TP$,

$$\boxed{\frac{PP_0 \times OQ}{OP} = \frac{A \times r \cos y}{r} = A \cos y,}$$

i, en els triangles semblants $\triangle\, PP_0T$ i $\triangle\, PP_1S$ (la corda $PP_1 = PP_0$, quan l'arc és petit, com és el cas):

$$\boxed{P_1S = \frac{P_0T \times PP_1}{PP_0} = \frac{A\,(y - y')\, \cos y}{A} = (y - y')\, \cos y,}$$

o

$$\boxed{\sin y' - \sin y = (y - y')\, \cos y,}$$

que és equivalent a

$$\boxed{d(\sin y) = \cos y \, dy.}$$

Observem com l'interès per fer càlculs d'astronomia, cada cop més precisos, va portar els matemàtics indis a deduir la diferencial de les funcions trigonomètriques abans que ho fessin els matemàtics occidentals del segle XVII però, a diferència del que esdevindria a Occident, ho van fer fora del context general de la teoria de funcions que, com ja hem indicat, era l'objectiu que intentaven aconseguir els matemàtics d'Occident i que es mostrà d'una potència enorme.

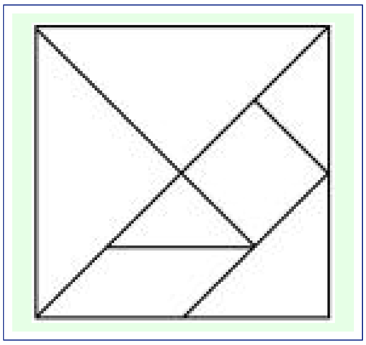
11 El tangram i l'ostomaquió

El tangram. El «tangram» (xinès 七巧板, *pinyin*, abreujament de *Hanyu Pinyin*, lletreig dels sons de l'idioma Han): *qī qiǎo bǎn*; «joc dels set elements» o «taula de la saviesa») és un joc xinès molt antic (740-300 aC). Consisteix a fer figures planes—o siluetes de figures, si es preferix—amb la totalitat d'una sèrie de peces donades. Les 7 peces—*tans*—juntes formen un quadrat i són:

5 triangles rectangles isòscel·les de mides diverses, 2 de grans, un de mitjà, i dos de petits cada un dels quals té, com a costat, la diagonal del més petit.

1 quadrat

1 paral·lelogram de tipus romboidal.

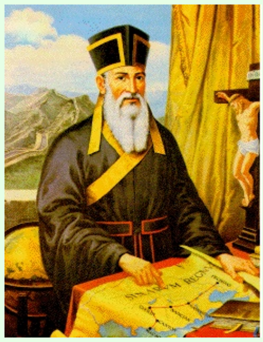


Aquest és el tangram clàssic, si bé hi ha diverses variants, com ara el tangram de vuit peces, el rus de dotze peces, el de Fletcher, de set peces, etc.

Hi ha versions diverses sobre l'origen de la paraula tangram, una de les més acceptades és la que explica que la paraula l'inventà un anglès unint el vocable cantonés tang, que significa xinès, amb el vocable llatí gram, que significa escrit o gràfic.

Una altra versió narra que l'origen del joc es remunta als anys 618 al 907 dC, època durant la qual regnà a Xina la dinastia Tang de la qual es derivaria el nom. Si aquesta afirmació fos certa, el joc seria molt recent.

En definitiva, no sabem amb certesa qui va inventar el joc ni exactament quan, ja que, com és ben sabut, els coneixements científics xinesos no arribaren a Occident fins que el jesuïtes —i, en particular, Mateo Ricci— no en van descobrir la riquesa.



Mateo Ricci
Macerata 1552-Pequín, 1716

Però les primeres publicacions xineses en les quals apareix el joc són del segle XVIII, una època en la qual el joc ja era conegut en altres indrets del món.

A Xina, el tangram era molt popular però se'l considerava un joc de tipus infantil.

Recordem que, a Europa, els primers llibres que tracten el tangram xinès són de 1813, on despertà un gran entusiasme. Hi jugaven els nens i els adults, persones amb cultura i persones menys preparades.

Sembla que, durant l'exili a l'illa de Santa Helena, Napoleó Bonaparte es convertí en un especialista de molt novell d'aquest joc.

Napoleó Bonaparte
Ajaccio 1769-Santa Elena 1821

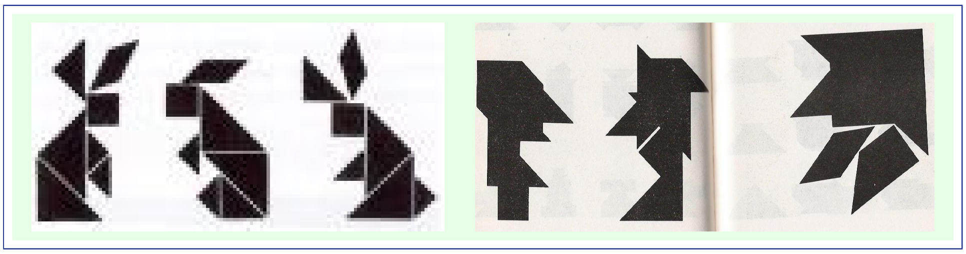
Pel que fa al nombre de figures que hom pot fer amb el tangram xinès, la majoria de llibres europeus van copiar les figures xineses originals que era d'alguns centenars.

En 1900 s'havien inventat figures i formes geomètriques noves i es disposava d'aproximadament 900.

Actualment es coneixen al voltant de

16.000 figures diferents.

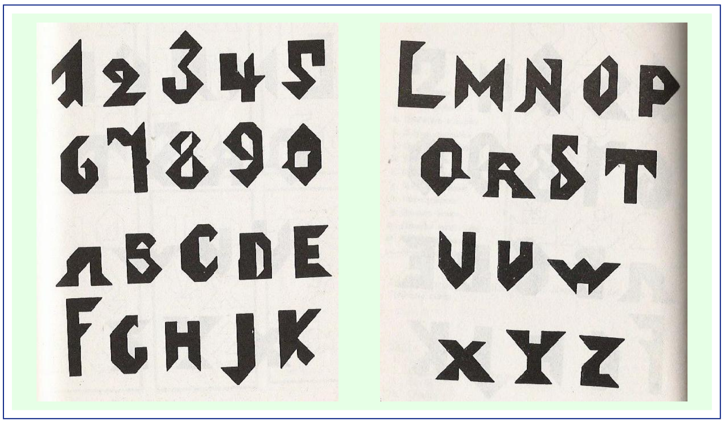
Vegem, com a exemple, uns conills i unes cares



Però el tangram no és només un entreteniment, sinó que s'usa en psicologia, en disseny, en filosofia i, molt particularment, en pedagogia.

En l'àmbit de l'ensenyament de la matemàtica, el tangram s'usa per introduir conceptes de geometria plana, i per promoure el desenvolupament de les capacitats psicomotrius i intel·lectuals de les al·lotes i dels al·lots perquè permet lligar de manera lúdica la manipulació concreta de materials amb la formació d'idees abstractes.

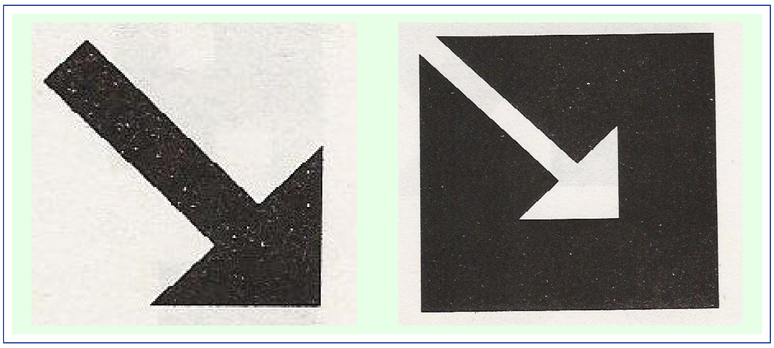
Vegem com podem fer els números i les lletres:



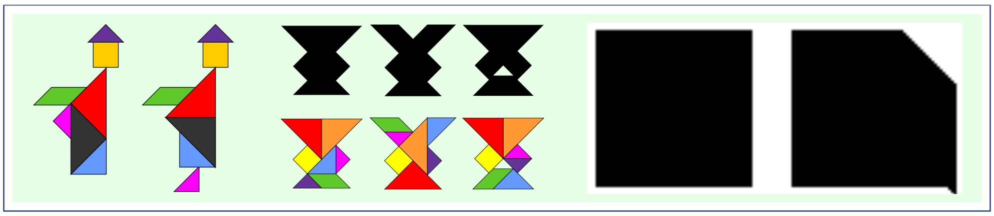
Com a curiositat val la pena mencionar un article publicat l'any 1817 per M. Williams, titulat *New Mathematical Demostrations of Euclid rendered clear and familiar to the minds of youth, with no other mathematical instruments than the triangular pieces, commonly called the chineses puzzle* [*Demostracions matemàtiques d'Euclides noves, explicades, de forma clara i familiar per a les ments joves, sense altre eines que peces triangulars, que comunament reben el nom de "puzzle" xinès*].

D'entrada el tangram clàssic és un joc excel·lent per mostrar com figures amb formes diverses tenen, tanmateix, la mateixa superfície perquè estan fetes de les mateixes peces.

Per exemple, la fletxa i el quadrat sense la fletxa.



Si ens ha semblat difícil de copsar la igualtat de la superfície de les dues figures anteriors, vegeu les tres «paradoxes» aparents:[106]



És amb aquest esperit que nosaltres ara dedicarem una mica d'atenció a algunes demostracions que, per generalització, anomenem «demostracions pel mètode generalitzat del tangram».

És un mètode, molt didàctic i intuïtiu, per veure que la diagonal d'un quadrat proporciona el costat d'un quadrat que té la superfície doble de l'inicial.

Considerem les set peces del tangram disposades de la forma següent:

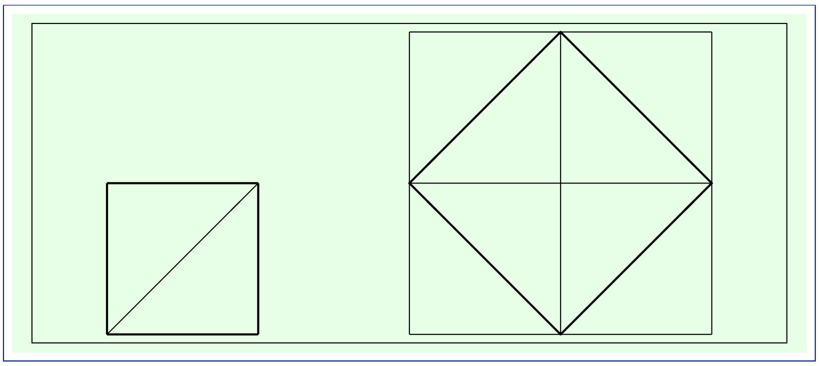
Obtenim dos quadrats de la mateixa superfície.

Ara bé, ambdós junts tenen la superfície del quadrat doble, perquè consta de les mateixes set peces que els dos anteriors:

[106] VegeuLoyd, Sam (1968). The eighth book of Tan ? 700 Tangrams by Sam Loyd with an introduction and solutions by Peter Van Note. New York: Dover Publications. p. 25.

És a dir, la diagonal del quadrat gran permet fabricar un quadrat amb una superfície que val al doble de la que ell té. És a dir, si considerem que el quadrat petit té longitud 1, la seva diagonal té longitud $\sqrt{2}$.

Certament, hi ha una demostració encara més senzilla d'aquest fet, però això no invalida la validesa del mètode tangram. En absolut, perquè també és una demostració de tipus tangram, però molt més simple:[107]



A la pàgina 12 de la part I hem vist la següent proposició del llibre primer dels *Elements* d'Euclides.[108]

Proposició 35. *Dos paral·lelograms, que tenen la mateixa base i el costat paral·lel a la base en una mateixa recta paral·lela a la recta que conté la base comuna, tenen la mateixa superfície.*

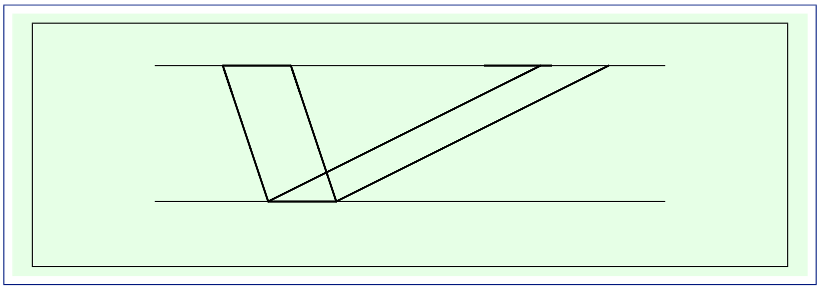
En tots aquests exemples s'usen les mateixes figures.

Però el mètode admet una extensió natural quan s'usen figures diferents però amb la mateixa superfície. És el tangram generalitzat.

[107] Vegeu l'icona de la matemàtica mesopotàmica. [Pla:2016*a*], p. 175–178.

[108] Vegeu [Pla:2018*a*].

El que interessa observar d'aquesta demostració és que està feta usant el mètode del tangram, usant tres peces ben distingides: T_1, T_2 i T_3.

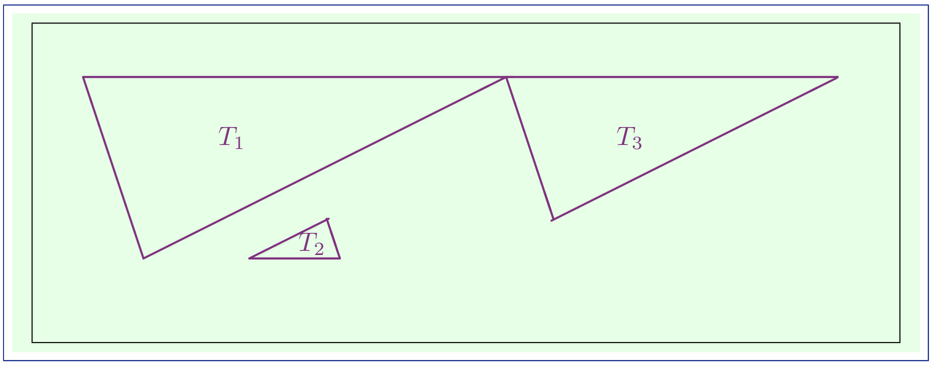


La demostració és ben senzilla, si acceptem el teorema establert a la proposició 4 del llibre primer dels *Elements* d'Euclides segons el qual

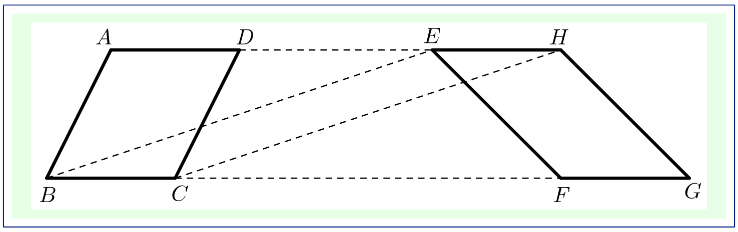
Proposició 4. *Dos triangles amb dos costats i l'angle que formen congrus són iguals.*

Per poder-ho establir cal que els angles corresponents siguin iguals. Això s'estableix a la proposició 29 del llibre primer dels *Elements* d'Euclides. És un resultat que depèn del postulat de les parel·leles.[109]

Ara tot és a punt i és senzill. Només cal observar les peces que formen els paral·lelograms amb relació amb les peces que formen els triangles congrus.



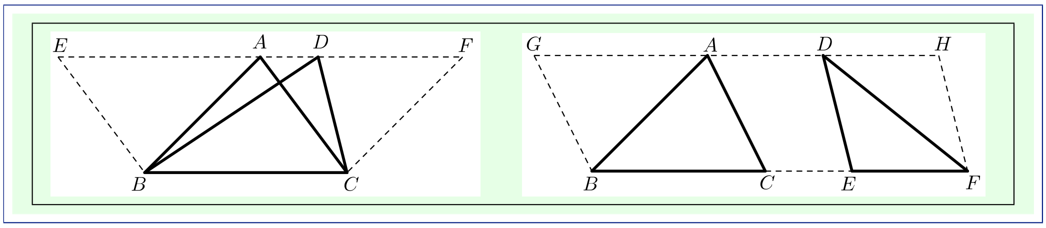
Usant el fet que dues coses iguals a una tercera són iguals entre si el teorema anterior, es pot generalitzar quan els paral·lelograms tenen bases còngrues damunt d'una una recta i els costat oposats a les bases en una paral·lela.



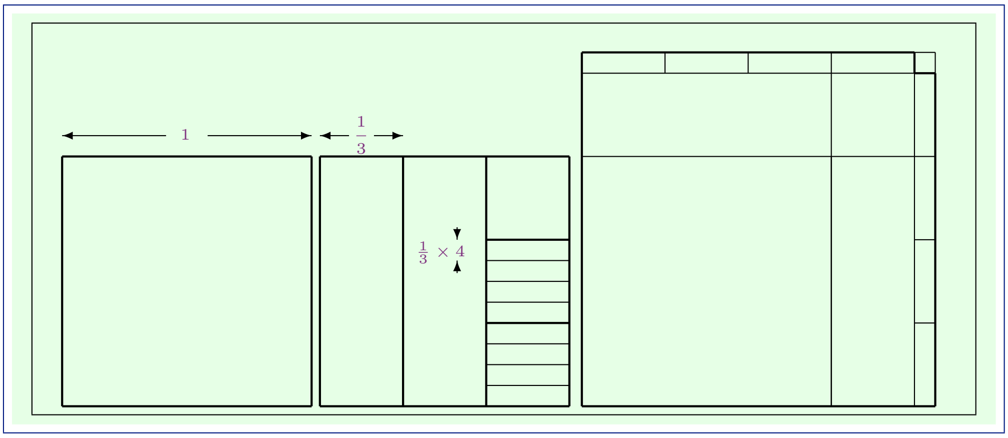
[109] Vegeu [Pla:2018a], p. 29.

Un altre corol·lari és el que permet d'establir que dos triangles amb bases còngrues damunt d'una recta i vèrtexs en una recta paral·lela a la que conté les bases tenen la mateixa superfície.

Això és degut al fet—demostrable amb tangram—que un triangle té una àrea que és igual a la meitat del paral·lelògram—obtingut per tangram—unint dues peces iguals al triangle



Una demostració, basada en el tangram, però que, després va una mica més lluny, és la que ofereix l'autor dels *Sulbasutres* (1500-800 aC) quan proporciona la demostració següent del càlcul del valor de $\sqrt{2}$:[110]

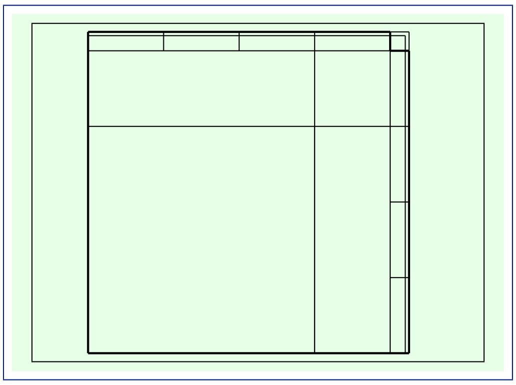


Tenim dos quadrats de costat 1. Un es descompon en tres rectangles iguals, cada un dels quals val $\frac{1}{3}$. Un d'aquests rectangles, en tres quadrats, cada un dels quals val $\frac{1}{9}$. Dos d'aquests quadrats en quatre rectangles iguals, cada un dels quals val $\frac{1}{36}$. Després els col·loquem vorejant un quadrat de costat 1 tal com indica la figura.[111] El mètode del tangram proporciona una figura que gairebé és el quadrat de $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\times 4}$, però no exactament perquè falta la peça necessària per «cobrir» el quadradet del vèrtex superior dret.

Això l'obliga a fer una petita correcció que cal calcular d'alguna manera i que nosaltres indiquem amb el quadrat de costat verd.

[110]Vegeu [Joseph:1991], §8.3.4, edició castellana, p. 318–322.

[111]Un bon exercici escolar és fer la reconstrucció indicada abans i que es representa a la figura de la pàgina anterior amb cartolina.



El costat del quadrat val $a = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\times 4} - x$, i cal determinar el valor x de manera que l'àrea del quadrat de costat verd a sigui exactament igual a 2. Cal, doncs, que $a^2 = 2$. Elevem al quadrat. És a dir,

$$2 = \left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3\times 4}\right)^2 - 2\left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3\times 4}\right)x + x^2.$$

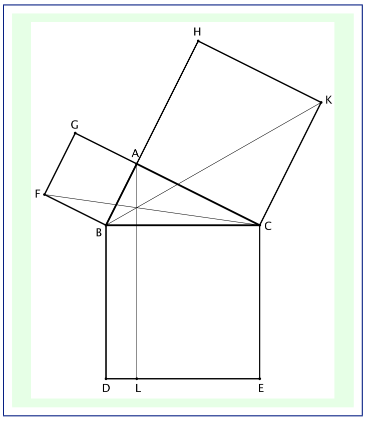
Eliminem el terme quadràtic i operem. Aleshores

$$x = \frac{2 - \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 4}\right)^2}{2\times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 4}\right)} = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3\times 4} - \tfrac{1}{3\times 4\times 34}.$$

En resulta, doncs, que

$$\sqrt{2} \simeq 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3\times 4} - \tfrac{1}{3\times 4\times 34} \sim 1,41911.$$

La demostració que fa Euclides, a la proposició 47 del llibre primer dels *Elements*, és una demostració per «tanngram generalitzat». L'altura sobre la hipotenusa descompon el quadrat damunt de la hipotenusa en dos rectangles, cada un dels quals és igual a un dels quadrats que s'han construït damunt de cada un dels catets. Observem la figura que hi ha als *Elements* i apliquem tangram generalitzat.



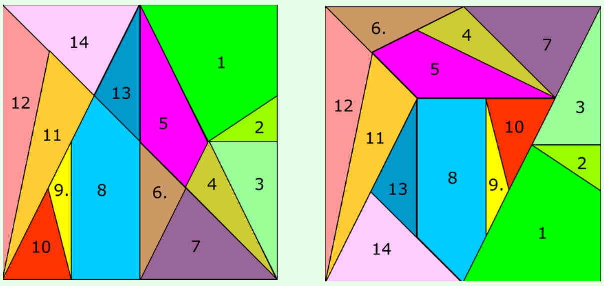
El quadrat $\square DC$ es compon dels rectangles $\square BL$ i $\square LC$. El rectangle $\square BL$ és igual a dues vegades el triangle $\triangle ABD$ que, al seu torn, és igual al triangle $\triangle FCB$. Però aquest triangle és igual a la meitat del quadrat $\square BG$.

Anàlogament amb el rectangle $\square LC$, els triangles $\triangle ACE$, $\triangle KCB$ i el quadrat $\square AK$.

Quina demostració més elegant per tangram generalitzat! I que simple!

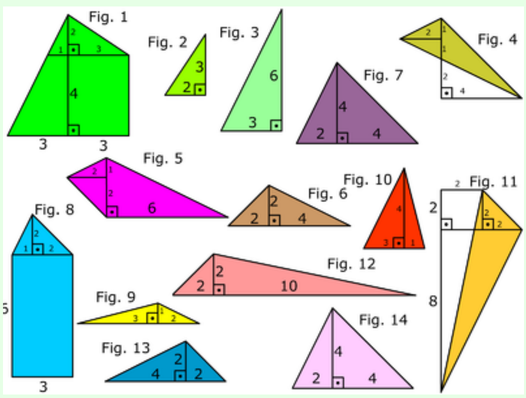
Arquimedes
Siracusa 287 aC-Siracusa 212 aC

L'ostomaquió d'Arquimedes. De *Ostomaquió* [Οτομάχιον —de ὀστέον, os, i μάχη, combat—] o *Luculus* solament en coneixem els fragments àrabs estudiats per l'orientalista suís Heinrich Suter i els fragments que conté el famós palimpsest de Jerusalem, trobat per l'erudit Papadopulos Kerameus en el monestir del Sant Sepulcre del patriarcat de Jerusalem.[112] Recordem, de passada, que fou Johan Ludwig Heidberg el primer a sospitar que es tractava d'un text que contenia el Mètode d'Aquimedes, una obra que es considerava perduda i de la qual solament se'n tenia una al·lusió que Suidas havia fet a un comentari de Teodosi.



L'ostomaquió d'Arquimedes

Per aquesta raó, el 1906, Heiberg es traslladà a Constantinoble amb la intenció d'examinar el manuscrit, i aconseguí llegir-lo gairebé del tot.



L'any 1907 publicà el resultat de les seves investigacions i el text grec. Immediatament en féu una traducció en alemany que fou anotada Hierònimus Zeuthen.

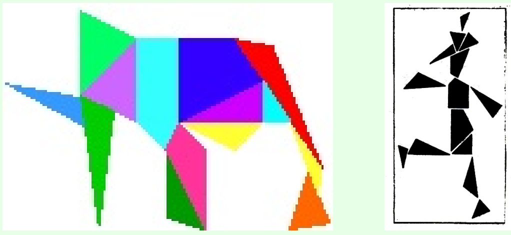
L'ostomaquió consta de 14 peces que poden formar un quadrat de 17.152 maneres diferents que es redueixen a 536 si s'ometen les reflexions i girs.

Totes les peces són commensurables amb el quadrat del qual són part:

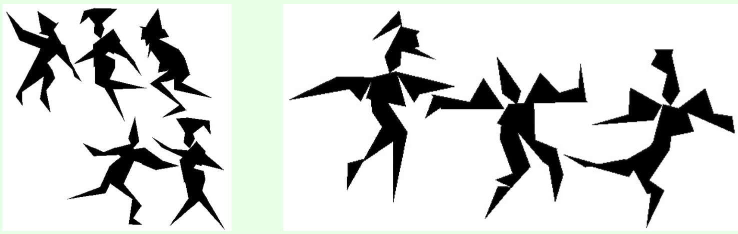
[112] [Pla:2019*b*], §1.3.3 i A.14.

Taula de les peces de l'Ostomaquió		
classe	*nombre*	*àrea relativa*
triangle	5	$\frac{1}{12}$
triangle	4	$\frac{1}{24}$
triangle	2	$\frac{1}{48}$
quadrilàter	1	$\frac{1}{6}$
quadrilàter	1	$\frac{1}{32}$
pentàgon	1	$\frac{7}{48}$

Algunes de les figures que es poden fer amb l'ostomaquió:



El rinoceró i el dançaire



Georg Alexander Pick

Viena 1859-Theresienstad 1942

El teorema de Pick. Acabarem amb el teorema de Pick, establert per Georg Alexander Pick [1859-1942], l'any 1899.

És un teorema relatiu a la superfície de les figures poligonals reticulars, és a dir, que tenen els vèrtexs en els punts d'una quadrícula feta amb quadrats unitat.

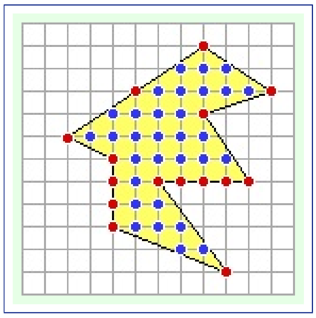
De fet, és una simple fórmula que diu:

$$\boxed{\text{Area} = I + \tfrac{1}{2}V - 1}$$

en què

I = nombre de punts reticulars interiors al polígon (•)

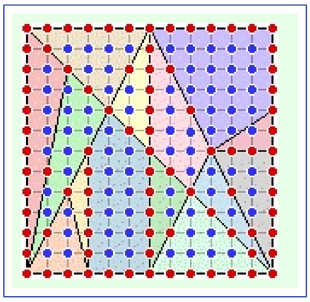
V = nombre de punts reticulars de la vora del polígon (•).



Un exemple del teorema de Pick. Usant el teorema de Pick l'àrea de la figura adjunta es calcula simplement aplicant la fórmula de Pick:

$$\boxed{31 + \frac{1}{2}15 - 1 = 37,5.}$$

Apiquem-lo ara a l'ostomaquió. Anàlogament a com ho hem fet abans, podem calcular la superfície de qualsevol tros de l'Ostomaquió usant la fórmula de Pick.



Per exemple la cantonada dreta de color blau té la superfície següent:

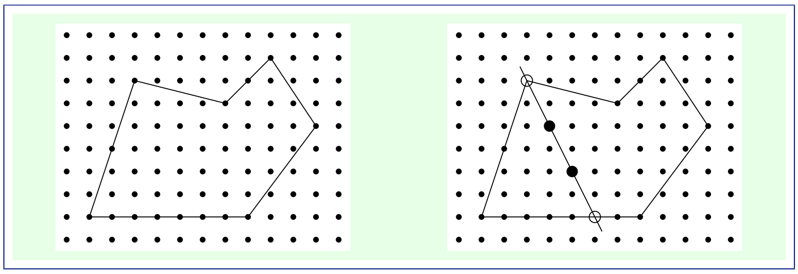
$$\boxed{18 + \frac{1}{2}14 - 1 = 24.}$$

Hi ha moltes demostracions del teorema de Pick, usant una inducció, força elemental.

La idea és simplement el caràcter additiu de la fórmula.

Considerem un polígon i un triangle reticulars P i T, amb una aresta comuna.

Suposem que el teorema de Pick és vàlid per a P. Hem de veure que també ho és per al polígon addició $P \oplus T$.



atès que P i T tenen una aresta comuna, tots el punts, menys dos, de l'aresta comuna són punts interiors del polígon reticular $P \oplus T$.

Si el nombre de punts de la vora comuna és c, aleshores

$$\boxed{\begin{aligned} I_{P\oplus T} &= (I_P + I_T) + (c-2) \text{ i} \\ V_{P\oplus T} &= (V_P + V_T) - 2\,(c-2) + 2. \end{aligned}}$$

Establim ara que el teorema és vàlid també per al polígon addició $P \oplus T$.

Atés que suposem que el teorema és vàlid per a P i T, per separat, podem escriure:

$$\begin{aligned} S_{P\oplus T} &= S_P + S_T \\ &= I_P + \frac{1}{2}V_P - 1 + I_T + \frac{1}{2}V_T - 1 \\ &= (I_P + I_T) + \frac{1}{2}(V_P + V_T) - 2 \\ &= (I_{P\oplus T} - (c-2) + \frac{1}{2}(V_{P\oplus T} + 2\,(c-2) - 2 \\ &= I_{P\oplus T} + \frac{1}{2}(V_{P\oplus T}) - 1. \end{aligned}$$

Tot rau, doncs, a demostrar la validesa per a triangles:

1. Per a un rectangle R que tingui $n{+}1$ i $m{+}1$ punts a cada costat, resulta que $V_R = 2(m+n)$, $I_R = (m-1)(n-1)$ i $S_R = m\,n$, i el resultat és evident.

2. Per a tot triangle rectangle R, calculem el que s'esdevé amb el rectangle que s'aconsegueix amb dos triangles rectangles. Si el triangle té tres costats de $m+1$, $n+1$ i d_T+2 punts, aleshores $V_T = m+n+d_T+1$, I_T i $S_T = \frac{1}{2}m\,n$. Ara calculem els punts interiors i de la vora del rectangle: $V_R = 2(m+n)$, $I_R = d_T + 2I_T$.

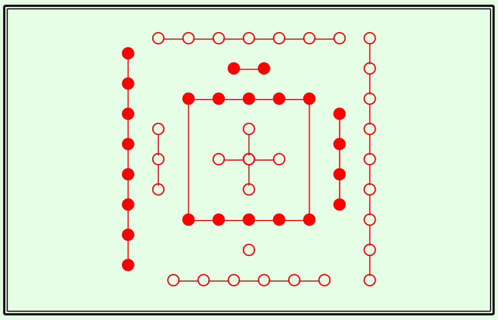
   Per tant, $S_R = m\,n = (m+n) + d_T + 2I_T - 1$. Dividim per 2.

3. Tot triangle T proporciona, doblant-lo, un paral·lelogram P, i el paral·lelogram es descompon en un rectangle interior i dos triangles rectangles laterals que compleixen el teorema i, per la llei additiva, tot queda resolt. ■

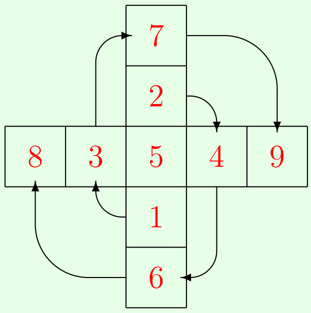
12 Els quadrats màgics

Quadrats màgics a la Xina. Els quadrats màgics són aportacions de la matemàtica xinesa que, encara que poden semblar simples anècdotes, comporten dificultats matemàtiques realment notables.

Els dos exemples més antics que coneixem són el diagrama *Ho thu*—que significa «el mapa del riu»—i el *Lo shu*—que significa «escrit del riu Lo». La seva representació respectiva és:

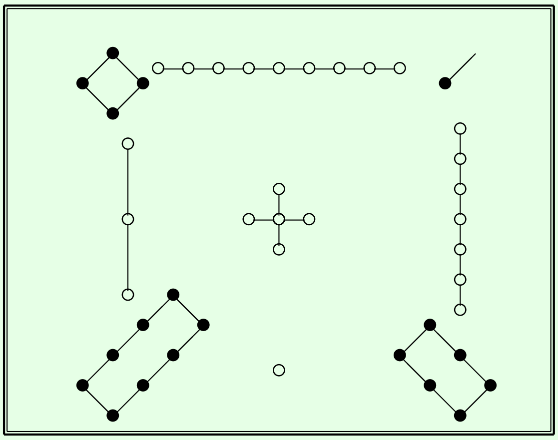


Ho thu (versió clàssica)



Ho thu (versió moderna)

Els quadrats màgics: *Ho thu*

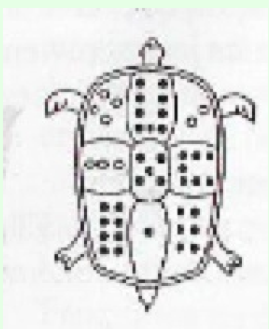


Lo shu (versió clàssica)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Lo shu (versió moderna)

Els quadrats màgics: *Lo shu*



D'acord amb la tradició, aquests quadrats es relacionen amb l'emperador enginyer Yü [XXI aC]. El primer el va obtenir d'un cavall-drac que va sorgir del riu Groc [Huan He]. El segon el va aconseguir copiant el dibuix de la closca d'una tortuga divina que vivia en el riu Lo, afluent del riu Groc.

És indubtable que els quadrats màgics formen part d'una tradició que es remunta al IV aC, i s'arrela profundament en la tradició mística del poble xinès.

Els estudiosos de la matemàtica xinesa no han pogut trobar cap referència als quadrats màgics anterior al segle IV aC. Des d'aleshores fins al segle X, la configuració en quadrats màgics fou un símbol místic d'una gran importància.

Els nombres parells es van vincular amb el principi femení, el yin, i els senars, amb el principi masculí, el yang.

En el pensament xinès els nombres del quadrat màgic es vinculen amb el elements de la naturalesa:

El nombre central, el 5, simbolitza la terra,
i al seu voltant, s'hi trobaven disposats
els quatre elements:
el 4 i el 9, simbolitzen el metall;
el 2 i el 7, el foc;
l'1 i el 6, l'aigua;
el 3 i el 8, la fusta.[113]

Hi ha, doncs, una vinculació llunyana amb els elements bàsics que recorda, d'alguna manera, la classificació que fa Plató [427 aC-347 aC] al *Timeu*.[114]

La construcció del *Lo shu*. Les instruccions són:

1. Col·loquem els números 1 al 3, 4 al 6, i 7 al 9, en diagonal d'esquerra a dreta i de dalt cap a baix [figura (a)].
2. Intercanviem els números més extrems: 1 per 9 i 7 per 3 [figura (b)].
3. Desplacem 9, 3, 1, i 7, per tal que formin un quadrat [figura (c)].

		3		
	2		6	
1		5		9
	4		8	
		7		

(a)

		7		
	2		6	
9		5		1
	4		8	
		3		

(b)

2	7	6
9	5	1
4	3	8

(c)

Aquest mètode és generalitzable a tot quadrat màgic senar. Per exemple, quan $n = 5$, escrivim:

113[LIZCANO:1993, p. 122–148].

114Comparant els elements xinesos amb el grecs, vegem que manca l?aire i apareixen la fusta i el metall.

				5				
			4		10			
		3		9		15		
	2		8		14		20	
1		7		13		19		25
	6		12		18		24	
		11		17		23		
			16		22			
				21				

El mètode del *Lo shu* a n senar.

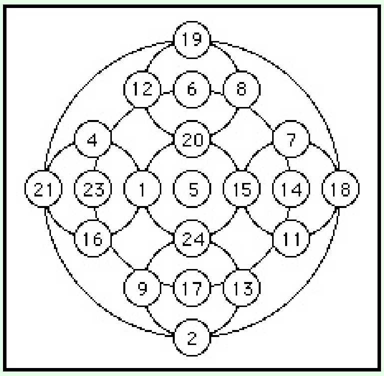
Ara reomplim els triangles que queden buits amb els de fora, tot entrecreuant-los: el de l'esquerra a la dreta, el de la dreta, a l'esquerra, el superior, a baix i, finalment, l'inferior, a dalt.

				5				
			4		10			
		3	16	9	22	15		
	2	20	8	21	14	2	20	
1		7	25	13	1	19		25
	6	24	12	5	18	6	24	
		11	4	17	10	23		
			16		22			
				21				

Tanmateix fins al segle XIII no trobem cap referència als quadrats màgics—i altres figures relacionades amb ells—en textos matemàtics xinesos.

L'any 1275 es publicà *Hsu Ku Chai Xhi Suan Fa* [*Continuació dels Mètodes Matemàtics antics per elucidar les propietats dels nombres*] de Yang Hui [~1238-1298].

Yang Hui
Qiantang 1238-Xina 1298



Cercle màgic de Yang Hui

En aquesta obra hi trobem, d'una banda, diagrames força complicats i, d'una altra, les primeres lleis d'obtenció de quadrats màgics.

En concret, proporciona un quadrat màgic d'ordre tres,[115] dos da cadascun dels ordre 4, 5, 6, 7 i 8 i, finalment, un de cadascun dels ordre 9 i 10.

Però, com hem dit, i que és molt més important, proporciona les lleis que permeten fabricar-los. En particular, és molt interessant la llei que permet formar el quadrat màgic circular, que no és gens elemental.[116]

Aquesta tasca la continuà Xhüng Ta-Wei al segle XVI en l'obra d'aritmètica *Suan Fa Thung Tsung*, publicada l'any 1593. Conté 14 diagrames, d'entre els quals podem posar de manifest el quadrat sis per sis següent:

Ta Wei
Xina 1533 - Xina 1606

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

Quadrat màgic sis per sis de Ta-Wei

Quadrats màgics a l'Índia. El primer matemàtic indi conegut que donà un mètode per construir quadrats màgics d'ordre senar fou Thakkura Pheru, en

[115] De quadrat màgic d'ordre tres només n'hi ha un, si considerem que els quadrats màgics es poden transformar l'un en l'altre per mitjà de simetries i girs són equivalents.

[116] Vegeu [Martzloff:1987], p. 330–333.

l'obra *Ganitasara* [∼1315 dC].

És un mètode original que s'anticipa als mètodes que trobarem en els matemàtics d'Occident com ara Bachet de Méziriac o de La Loubère.[117]

El mètode de Pheru permet construir quadrats màgics d'ordre senar, és a dir, en els quals n és un enter senar. Comença col·locant el número 1 a la fila inferior de la columna central (vegeu la primera figura de la pàgina següent). Per obtenir la cel·la immediatament superior a aquesta, afegeix $n+1$ i s'obté $n+2$. Per obtenir immediatament superior a aquesta afegeix novament $n+1$ i obté $2n+3$. I segueix el mateix procediment fins a arribar a dalt de tot. A la columna central es produeix una progressió aritmètica amb una diferència comuna de $n+1$ primer terme 1 i darrer terme n^2.

El mètode de Pheru. Les cel·les restants del quadrat s'obtenen començant pels nombres de la columna central. La figura següent mostra el mètode de Pheru. Penseu en la possibilitat de fer un quadrat màgic de 9×9, per tant, $n = 9$. Seleccioneu qualsevol número a la columna central, per exemple, 1. Afegiu-li n. En el cas de la figura, $9 + 1 = 10$. Ara seguim el moviment del cavall en el joc dels escacs: comencem en la cel·la en què hi ha l'1 i ens movem una cel·la cap a l'esquerra i després dues cel·les cap amunt. En aquesta cel·la, hi col·loquem el 10. Ara, a partir d'aquesta cel·la, repetim el mateix procés. Afegim $9 + 10 = 19$, fem el el moviment del cavall i col·loquem el 19 a la cel·la corresponent. Continuem el procés fins que arribem al valor de 37 perquè hem assolit el sostre del quadrat. Si afegim 9 i fem el moviment el cavall ens trobem amb què el número 46 cau fora del quadrat de 9×9. Per solucionar aquesta situació, pensem que al vèrtex superior esquerra hi ha un quadrat de 9×9. Aleshores, el valor 46 es troba al cel·la $(9, 2)$ si les coordenem d'esquerra a dreta i de baix a dalt. Col·loquem-lo ara a la cel·la $(9, 2)$ del quadrat 9×9 original.

[117] <http://illuminations.nctm.org/Lesson.aspx?id=655>
<https://r.search.yahoo.com/_ylt=AwrIRlkmQylaaFMAlVi_.wt.;_ylu=X3oDMTBycDZicmtuBGNvbG8DaXIyBHBvcwM2BHZ0aWQDBHNlYwNzcg--/RV=2/RE=1512682407/RO=10/RU=http%3a%2f%2fwww.nctm.org%2fPublications%2fmathematics-teaching-in-middle-school%2f2001%2fVol6%2fIssue8%2fmtms2001-04-466a_pdf%2f/RK=2/RS=ZnK1AcSQY7ZY2JFp8iSjOUTAK.E->

$(1,n)$				n^2				(n,n)
				$\vdots$				
				$\vdots$				
				$5\,n+6$				
				$4\,n+5$				
				$3\,n+4$				
				$2\,n+3$				
$(1,2)$				$n+2$			$(n-1,2)$	$(n,2)$
$(1,1)$	$(2,1)$	$(3,1)$		1			$(n-1,1)$	$(n,1)$

	46	57	68	79	90		22	33	44			
	45	47	58	69	80		12	23	34			
	35	37	48	59	70	**81**	2	13	24	35		
	25	36	38	49	60	**71**	73	3	14	25		
	15	26	28	39	50	**61**	72	74	4	15		
	86	16	27	29	40	**51**	62	64	75	**5**		
	76	6	17	19	30	**41**	52	63	65	76		
	66	77	7	18	20	**31**	42	53	55	66		
	56	67	78	8	10	**21**	32	43	54	56		
		57	68	79	9	**11**	22	33	44	46		
		47	58	69	80	**1**	12	23	34	45		

Quan arribem a un número que supera el **81** li restem 81. Per exemple, si arribem al número 77 de la figura, quan li afegim 9, obtenim 86. Però, un cop li hem tret **81** unitats tenim el **5**. El col·loquem a la cel·la corresponent del quadrat original. Així obtenim un quadrat màgic de 9×9 de constant màgica —és a dir, $\frac{n\,(n^2+1)}{2}$— 369.

Primeres referències de quadrats màgics a Ocident. Malgrat que, al segle IX, els matemàtics islàmics es van començar a interessar pels quadrats màgics, podem afirmar que, a Occident, hi van arribar a través d'un matemàtic bizantí del segle XIV, Manuel Moschopoulos [segle XIV].

Va escriure un opuscle en el qual exposava com calia disposar, en forma de quadrat, els nombres de l'1 fins l'n^2, de manera que

> *la suma dels membres de cada fila, de cada columna, i de cada diagonal sigui igual a* $\frac{1}{2}\,n\,(n^2+1)$.

Cornelius Agrippa
Colònia 1486–Grenoble 1535

L'obra influí en Cornelius Agrippa que féu una defensa dels quadrats màgics.

L'any 1514 apareix un gravat d'Albrecht Dürer, la *Melanconia*, molt influït per l'obra de Luca Pacioli. En ella, Dürer vol posar de manifest el lligam que hi ha entre l'art i la matemàtica. En l'angle superior dret del quadre hi ha un quadrat màgic $\mathbf{4 \times 4}$ com podem observar en la reproducció adjunta.

Val la pena d'observar que les dues xifres de les cel·les inferiors centrals fixen la data de la litografia de Dürer.

Melanconia (1514)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	**15**	**14**	1

El quadrat màgic de *Melanconia*

Luca Pacioli
Sant Sepolcro 1445 - 1517

Albrecht Dürer
(Nuremberg 1471–1528)

Quadrats màgics d'ordre 4. Les instrucciones són[118]:

1. A les files, col·loquem els números naturales del 1 al 16, ordenadament d'esquerra a dreta, i baixem del dalt cap avall abajo [figura (a)].

[118] Aquest mètode es vàlid per a qualsevol ordre del tipus $n := 4k$

2. Intercanviem els números dels vèrtexs del quadrat exterior [figura (b)].
3. Intercanviem els números dels vèrtexs del quadrat einterior [figura (c)].[119]

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

(a)

16	2	3	13
5	6	7	8
9	10	11	12
4	14	15	1

(b)

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

(c)

16	3	2	13
5	7	6	8
9	11	10	12
4	15	14	1

És curiós observar que cap d'aquests quadrats és el quadrat de la *Malenconia*, però s'obté intercanviant les dues columnes centrals del quadrat màgic d'ordre 4 del text.

Aquest quadrat màgic té un munt de propietats curioses.

Quadrats màgics a Occident. L'interès dels matemàtics xinesos pels quadrats màgics continuaria durant els segles XVII i XVIII però, en aquesta època la qüestió ja havia trobat ressò entre els erudits i matemàtics europeus.

[119]Una forma mnemotècnica fàcil para retenir aquesta regla rau a suposar que, inicialment, les dues diagonals s'han esborrat —ho indiquem amb el puntejat de la figura (c). Aleshores, escrivim, en les cel·les lliures, començant per la cel·la superior esquerra i baixant a la fila següent començant per l'esquerra els números succesius del 1 al 16. Després procedim des de baix, començant per la cel·la inferior dreta i pujant a la fila següent començant per la dreta, i col·loquem els números a les cel·les barrades.

Obviament podem canviar l'ordre —de dreta a esquerra i d'abaix cap dalt— i les files per les columnes. Obtindrem quadrats màgics diferents del del text.

16	5	9	4
2	11	7	14
3	10	6	16
13	8	12	1

(α)

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

(β)

2	16	13	3
11	5	8	10
7	9	12	6
14	4	1	15

(γ)

El quadrat (α) s'obté col·locant els números del 1 al n en columnes, començant per dalt i per l'esquerra. El quadrat (β), començant pel vèrtex superior de la dreta, i anant de dalt cap a baix i de la dreta a l'esquerra. El quadrat (γ), col·locant els números com al text, però de dreta a esquerra.

Però aleshores—sobretot durant els segles XVI i XVII—els aritmètics francesos es van sentir atrets per aquesta curiositat. Entre els que hi van dedicar esforços i enginy esmentem, de passada, Claude-Gaspart Bachet de Méziriac [1581-1638], Bernard Frénicle de Bessy [∼1605-1675], Antoine de la Loubère [1600-1664], Philipphe de la Hire [1640-1718].

Com és usual, Leonhard Euler fou el primer que intentà sistematitzar i sintetitzar seriosament aquesta teoria ludomatemàtica.[120]

Els matemàtics anglesos trigaren més a preocupar-se d'aquest problema. Generalització del mètode anterior quan $n = 4k$. Escrivim els nombres de l'1 al 64, ordenadament des de la casella superior esquerra fins a la inferior dreta, però sense escriure res en els indrets on hi ha una ratlla diagonal. En aquests llocs, escrivim els nombres del 64 a l'1.

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	50	51	5	4	54	55	1

Construcció per recurrència. És una idea que trobem a Frenicle de Bessy. Si sabem fer un quadrat màgic d'ordre $n-2$, també sabem fer-ne un d'ordre n. Les instruccions són senzilles:

1. Reservem, per a les $4(n-1)$ cel·les del la vora del quadrat, els $2(n-1)$ primers números de la successió natural[121] $1, \cdots, 2(n-1)$—, i els $2(n-1)$ darrers:[122]: $n^2-2n+3, \cdots, n^2$.

[120] LLIÇÓ DARRERA LA CAPACITAT MATEMÀTICA, SIMPLIFICADORA I LÚDICA, EN L'OBRA D'EULER. JOSEP PLA I CARRERA, Conferències FME Curs Leonhard Euler 2006-2007, p. 213–217. Facultat de Matemàtiques i Estadística Universitat Politècnica de Catalunya.

<http://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/81174/CFME-vol-4.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Vegeu també MAT^2. MATerials MATemàtics MAT2 Volum 2010, treball no. 2, 34 pp. ISSN: 1887-1097 Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona <http://www.mat.uab.cat/matmat>.

<https://ddd.uab.cat/pub/matmat/matmat_a2010/matmat_a2010a2.pdf>

[121] A l'exemple que segueix, són 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8.

[122] A l'exemple que segueix, són 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 i 25.

2. Ara, al quadrat d'ordre $n-2$ que queda encerclat per la vora, hi col·loquem un quadrat màgic qualsevol d'ordre $(n-2)$, i a cada un dels membres hi afegim la quantitat $2(n-1)$.[123]
3. Els números que hem reservat per a la vora els podem aparellar $\langle n^2, 1\rangle$, $\langle n^2-1, 2\rangle$, $\langle n^2-2, 3\rangle$, etc. i els col·loquem de manera que ocupin cel·les oposades de la vora[124]. Sempre és possible col·locar-los de manera que els costats de la vora exterior sumin el valor adequat[125].

1	2	3	4	5
18	**4**	**9**	**2**	6
19	**3**	**5**	**7**	7
20	**8**	**1**	**6**	8
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5
22	12	17	10	6
21	11	13	15	7
20	16	9	14	8
21	24	23	22	25

1	2	19	20	23
22	12	17	10	4
21	11	13	15	5
18	16	9	14	8
3	24	7	6	25

El quadrat màgic de la Loubère per a $2n+1$. La construcció del quadrat màgic d'ordre senar de la Loubère és anàloga a la de Bachet de Méziriac, a la del salt del cavall d'Euler, i moltes d'altres. Donarem solament la de la Loubère, reflexioinarem una mica en el que, de fet, fa i en deduirem el mètode de La Hire, basat en els quadrats llatins.

Els quadrats llatins són quadrats ens els quals els n nombres es repeteixen en cada fila i en cada columna de manera que no n'hi hagi mai dos de repetits en cap fila ni en cap columna.

Val la pena indicar que l'interès de la Loubère pels quadrats màgics es despertà quan Lluís XIV l'envià, en qualitat d'ambaixador seu, a Siam, on va viure durant els anys 1687 i 1688. Allà, amb tota probabilitat, va descobrir el mètode de construcció de quadrats màgics d'ordre senar que avui porta el seu nom.

Donarem la regla per al cas 5×5.[126]

Fem un quadrat amb 25 cel·les buides, i i anem col·locant els nombres de l'1 al 25, d'acord amb les normes següents:

1. L'1 en el lloc central de la fila superior, on hi ha una $\star$.

[123] La suma dels números d'una fila de un quadrat màgic d'ordre $(n-2)$ és $\frac{1}{2}(n-2)\big((n-2)^2+1\big)$. El terme mitjà és $\frac{1}{2}\big((n-2)^2+1\big)$. En canvi, el valor mitjà del quadrat màgic d'ordre n és $\frac{1}{2}(n^2+1)$. Per passar d'un valor a un altre, hem d'afegir $2(n-1)$.

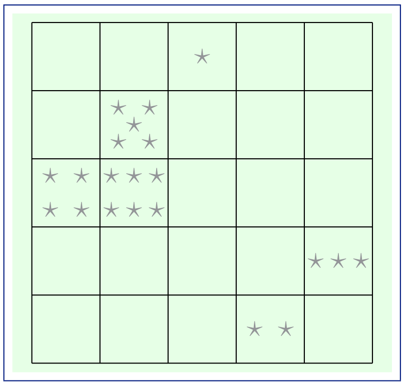
[124] La suma mitjana de cada parella és $\frac{1}{2}(n^2+1)$.

[125] Aquest és essencialment el mètode que ofereix Pascal a [Pascal:1963], p. 95–100. Vegeu [Ball:1892], p. 201.

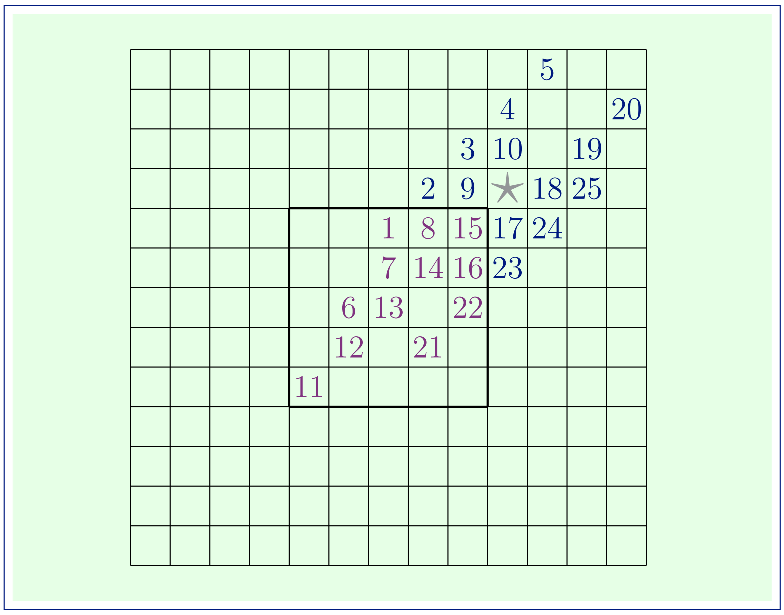
[126] És un mètode que ja havien trobat els matemàtics xinesos.

2. Els altres nombres—2, 3, 4 i 5—una cel·la a la dreta i un lloc cap a munt. Quan sortim fora del quadrat per dalt [per la dreta] hi tornem a entrar per baix [respectivament, per l'esquerra]. És a dir, el 2 anirà a parar on hi ha dues ⋆; el 3, on n'hi ha tres, etc.

3. Seguim així successivament. Sorgeix una dificultat. El 6 s'hauria de col·locar en una cel·la que ja conté una ⋆. En aquests casos, col·loquem el valor corresponent dessota del que acabem de col·locar. Així 6 s'haurà de col·locar dessota del lloc on hi ha cinc ⋆. És a dir, en la mateixa columna, però en la fila de sota.



Però fem-ho d'una altra manera:



S'obté el quadrat màgic:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Una explicació d'aquest mètode:

Separem, en els nombres 1 al 25, segons les quinquenes 1, 2, 3, 4 i 5, fixant-nos en els ordres en les quinquenes: 0, 5, 10, 15 i 20.

És a dir, els podem escriure en la forma següent:

$$0+1, 0+2, 0+3, 0+4, 0+5, 5+1, \ldots, 0+5$$

0+1	0+2	0+3	0+4	0+5
5+1	5+2	5+3	5+4	5+5
10+1	10+2	10+3	10+4	10+5
15+1	15+2	15+3	15+4	15+5
20+1	20+2	20+3	20+4	20+5

Escrivim ara el quadrat de la Loubère d'acord amb aquesta descomposició. Veurem que en cada fila i en cada columna hi ha un nombre vermell diferent i un nombre blau diferent.

15+2	20+4	0+1	5+3	10+5
20+3	0+5	5+2	10+4	15+1
0+4	5+1	10+3	15+5	20+2
5+5	10+2	15+4	20+1	0+3
10+1	15+3	20+5	0+2	15+4

A cada fila, i a cada columna hi ha un *múltiple* de 5: 0, 5, 10, 15 i 20; i un residu: 1, 2, 3, 4, 5.

Els quadrats llatins i el mètode de Lahire. Així apareix el mètode que reprenen Philippe La Hire i Leonhard Euler que porta als «quadrats llatins» o «quadrats greco-llatins».[127]

> Definició de quadrat llatí. *Un quadrat llatí d'ordre n s'obté omplint les n^2 cel·les amb els números $1, 2, \ldots, n-1, n$, de manera que, a cada fila i a cada columna, no hi hagi dos números repetits*[128].

Basilea 1707 - Sant Petersburg 1783

París 1640 - 1718

Fixem-nos que el quadrat de la pàgina 68 es descompon en dos quadrats llatins:

15	20	0	5	10
20	0	5	10	15
0	5	10	15	20
5	10	15	20	0
10	15	20	0	5

2	4	1	3	5
3	5	2	4	1
4	1	3	5	2
5	2	4	1	3
1	3	5	2	4

[127] En principi, aquests quadrats no tinen res a veure amb els quadrats màgics. En ells, solament s'usen n números i no pas n^2. S'imposa que no hi hagi repeticions. Això fa que, tanmateix, la suma de les files i les columnes sigui sempre la mateixa $1+2+\cdots+(n-1)+n$. Si la disposició dels n números, en el quadrat llatí, es de tal naturalesa que la suma de les diagonals —i això és fàcil aconseguir-ho— sigui $1+2+\cdots+(n-1)+n$, quets quadrats resulten molt útils per generar —i així ho observaren la Hire i Euler— quadrats màgics.

[128] Vegeu [Euler:1779].

És clar que la suma d'ambdós proporciona un quadrat màgic perquè els quadrats llatins són quadrats màgics, si s'aconsegueix distribuir bé els números per tal que les diagonals compleixin la condició quelcom que s'esdevé en cadascun dels sumands.[129]

Una pregunta sobre els quadrats màgics. Si bé els matemàtics xinesos van trobar altres qüestions vinculades amb figures màgiques, nosaltres les ometem.

Tanquem aquesta secció amb un parell o tres de qüestions teòriques i lúdiques interessants que exponsem de forma breu pel seu caràcter cultural matemàtic.[130]

Plantegem la pregunta següent:

> Per a cada $n > 2$ hi ha, almenys, un quadrat màgic?
> És possible saber quants quadrats de cada ordre hi ha?

Ens acontentarem amb algunes respostes.[131]

Si descomptem les variants que s'obtenen per simetries i per girs, hi ha 880 quadrats màgics d'ordre 4. El primer que els va donar tots fou Frenicle de Bessy, en 1693. Hi ha moltes maneres de classificar-los, per una de les millors és la que va donar Henry Ernest Dudeney.[132]

> I, quants quadrats màgics hi ha d'ordre 5?

La millor estimació la dona Albert L. Candy. D'acord amb ella, n'hi ha 13 288 952. El número exacte no es va aconseguir fins l'any 1973, amb un programa de computació preparat por l'informàtic Richard Schroeppel, que trigà 100 hores a efectuar la computació. L'informe final el va redactar Michael Beeler, i es va publicar l'any 1975. Si només es consideren els que no són equivalents,[133] n'hi ha 275 305 224.[134]

Aquests dos exemples són suficients per veure la complexitat dels quadrats màgics malgrat del caràcter aparentment lúdic que tenen.

El problema de les seixanta ampolles de Bachet, el de les vuit reines dels escacs i el dels sis oficials d'Euler. Vegem ara tres problemes que, si bé tenen

[129] En el cas senar els mètodes per aconseguir-ho són molt senzills. Vegeu [Ball:1892], p. 123–128.
[130] Vegeu [Needham:1954], p. 22 i 24.
[131] El lector interessat pot consultar [Gardner:1988], p. 205–223 i la bibliografía que conté.
[132] Vegeu l'entrada «magic square» de l'edició catorzena de l'*Encyclopædia Britannica*.
[133] Vegeu la nota 115.
[134] El lector interessat pot consultar [Gardner:1988].

a veure amb quadrats i amb la disposició en què es col·loquen certs objectes no són precisament problemes de quadrats màgics, encara que el d'Euler està relacionat amb els quadrats llatins que va introduir i usar per obtenir quadrats màgics.

En el problema V del *Suplément aux Problèmes Plaisantes & Délectables* (1621), Bachet planteja el problema següent:

> Problema de les ampolles. *Un burgès va fer que a la seva bodega s'hi construís un caseller amb nou cel·les disposades en un quadrat. La cel·la central es reservava per a conservar-hi les ampolles buides provinents de la consumició de 60 ampolles plenes que s'havien de disposar en les vuit cel·les restants, situant 6 ampolles en les cel·les dels angles, i 9 en les restants. El majordom va vendre, en una primera instància, 4 ampolles, i col·locà les restants de manera que, a cada costat del quadrat, n'hi haguessin vint-i-una. El burgés va pensar que solament es tractava d'una redisposició de les ampolles, ja que, en total, hi havia les mateixes. El majordom va aprofitar la beneiteria de l'amo per anar venent lots de quatre ampolles fins que ja no li era possible mantenir un total de vint-i-una a cada costat. Es demana, quantes vegades pot realitzar l'operació i quantes ampolles va vendre en total?*[135]

No se tracta de un problema de quadrats màgics. Es tracta d'un problema en el qual intervé un quadrat i que es troba en un dels primers textos en els quals es donen, a Occident, regles per formar quadrats màgics. El lector pot resoldre'l per si mateix, ja que és un problema realment simple.[136]

El problema de les vuit reines. Aquest problema, que va proposar el jugador d'escacs alemany Max Bezzel l'any 1848, tracta de col·locar vuit reines en un tauler d'escacs de forma que cap amenaci una altra. L'interès del problema resideix en donar el nombre total de possibilitats. Una altra qüestió és: A partir de quin número n de cel·les té solució? En tots els casos en els que té solució, en té més d'una? Quantes?

Però el seu interès rau en el fet que constitueix un exemple estàndard dels inicis de la programació en els llenguatges més corrents que s'utilitzen actualment; en concret, de l'*esquema retorn enrere* (o *Backtracking*).[137]

[135] Vegeu [Bachet:1612].

[136] Si a cada vèrtex hi ha a empolles i a cada costat b, en total hi ha $2(a+b+a)+2b$. I, a cada costat, hi ha una suma igual a $2(a+b+a)$. Vegeu [Bachet:1612, p. 189–191].

[137] Vegeu, per exemple, <http://es.wikipedia.org/wiki/Las_ocho_reinas>.

El problema dels trenta-sis oficials d'Euler. L'any 1779, Euler va plantejar el problema dels trenta-sis oficials de l'exèrcit.

> Problema dels trenta-sis oficials. *De cadascun dels* 6 *regiments diferents triem* 6 *oficials —un de cada un dels rangs següents: general, coronel, major, capità, tinent, alferes. Es vol que aquests* 36 *oficials marxin en* 6 *files de* 6 *cadascuna, de manera que cap d'elles hi hagi dos oficials del mateix rang o del mateix regiment. Com s'han de disposar?*[138]

De fet, es tracta de trobar un quadrat llatí d'ordre 6.
I la pregunta que es planteja Euler és:

Hi ha un quadrat llatí d'ordre 6?

Segons l'eminent matemàtic suís:

1. No n'hi ha cap.

2. No hi ha quadrats llatins d'ordre $2\,n$ per a $n > 2$.

Però són *simples conjectures* que cal provar o refutar.[139]
Caldrien un parell de segles fins a aconseguir resoldre-les del tot:

(a) En 1901 Gaston Tarry va provar que la conjetura (1) d'Euler era certa.

(b) En canvi, la conjectura (2) és falsa. Hi ha quadrats llatins de qualsevol ordre $n \neq 2$, $n \neq 6$.

Aquest resultat el van establir Bose, Parker i Shirikhande, i data de l'any 1959.

Els quadrats llatins i el sudoku El *Sudoku* (en japonès: 数独) és un passatemps originari d'Estats Units però que es va popularitzar a Japó en 1986. La seva divulgació internacional data del 2005.

[138] Vegeu [Ball:1892], p. 189–192, i [Klive:2007].

[139] Una *conjectura* es una afirmació, basada en la intuïció de la qual no es disposa de demostració i seran conjectures fins que algú en demostri la validesa o la falsedat. Les conjectures han jugat —i encara ho fan — un paper molt important en el progrés de la matemàtica.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Exemple de sudoku

L'objetiu del passatemps és omplir una quadricula de 9×9 cel·les (81 cel·les) dividida en subquadrícules de 3×3 amb les xifres del 1 al 9 a partir d'alguns números ja col·locats en algunes cel·les.[140] El que importa és que, a cada fila, a cada columna i a cada subquadrícula 3×3, els nou elements siguin diferents i que cadascuna d'elles —files, columnes, subquadrícula— contingui els nou objectes.

La solució d'un Sudoku és, doncs, un quadrat llatí.[141]

Un sudoku està ben plantejat si la solució és única.[142]

La resolució del problema requereix paciència i certes dots lògiques.

Aquest trencaclosques numèric pot haver-se originat a Nova York el 1979. Llavors, l'empresa *Dell Magazines* va publicar aquest joc, ideat per Howard Garns, sota el nom de *Number Place* (*Lloc dels nombres*). És molt probable que el Sudoku es creés a partir dels treballs de Leonhard Euler.[143]

Posteriorment, l'editorial Nikoli l'exportà al Japó, publicant-lo al diari *Monthly Nikolist* l'abril del 1984 sota el títol «Sūji wa dokushin ni kagiru» (数字は独身に限る), que es pot traduir com a «els nombres han d'estar sols» (独身, significa literalment «cèlibe, solter»). Va ser Kaji Maki (鍜治 真起), president de Nikoli, qui li va posar el nom, que es va abreujar Sūdoku (*sū* = nombre, *doku* = sol) ja que, en japonès, és pràctica comú prendre el primer *kanji* — grup de paraules compostes — per abreujar.

També l'any 2005, la ICPC (International Collegiate Programming Contest), entre els seus nou problemes, hi va incloure el Sudoku. El primer llibre de Sudokus que es va publicar en espanyol, amb el títol *Els millors sudokus*, amb 200 sudokus agrupats en 4 nivells de dificultat, amb una extensa des-

[140] Creiem que val la pena indicar que no cal que els objectes de les caselles siguin necessàriament números. Podrien ser fitxes de colors, lletres, figures.

[141] El recíproc, en general, no és cert ja que, a la solució del sudoku, se li imposa la restricció afegida que no s'accepta la repetició d'un mateix número en cap subquadrícula 3×3.

[142] Aquesta és, en realitat, la part realment matemàtica –i també la més difícil— del problema: plantejar-lo i saber el seu grau de dificultat —fàcil, mitjà o difícil.

[143] Aquest matemàtic no el va crear pròpiament el joc, sinó que, com ja hem indicat, va establir la definició de quadrat llatí i els va fer servir per fabricar quadrats màgics.

cripció de la història d'aquest passatemps i com s'usen les seves regles i un exemple pas a pas per a la seva resolució.[144]

El quadrat màgic de la Sagrada Família de Barcelona. És ben conegut que, des de fa uns anys —i sobretot després de les Olimpíades de Barcelona de 1992— les obres del genial arquitecte modernista Antoni Gaudí han despertat una interès enorme als turistes que visiten la ciutat i, en particular, als turistes japonesos. Hem d'esperar que, amb el despertar econòmic actual de la Xina, aquest interès es traslladi a la problació xinesa i puguin venir a Barcelona a visitar la *Sagrada Família* de Gaudí.


Sagrada Família d'Antoni Gaudí

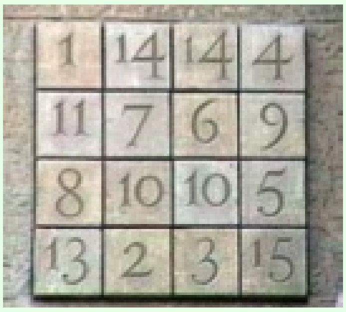

Antoni Gaudí i Cornet
Reus 1852–Barcelona 1926

Aquest temple urbà sempiternament inacabat consta de tres façanes: la *Nativitat*, original de Gaudí, de la *Pasió* de l'aquitecto Subircahs, que es pot considerar acabada, i de la *Glòria* que és la que està en procés de construcció i ja gairebé acabada.

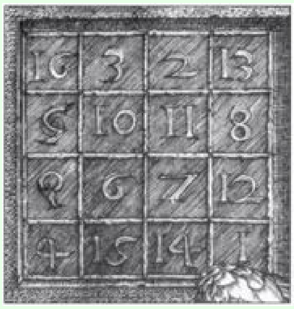
La façana de l'Passió conté un quadrat màgic, en un sentit més ampli que el de la nostra defnició, ja que hi ha números repetits. És el *quadrat màgic de Subirachs* que reproduïm a continuació al costat del quadrat màgic de Dürer.

Aquest quadrat màgic és una mena de criptograma ja que la suma dels números de les files, columnes i diagonals és 33, l'edat que se atribueix a Crist en el moment de la seva crucifixió, un dels protagonistes del Temple barcelonès. Aquesta és, doncs, la raó que en justifica la presència a la *Façana de la Pasió* de Crist.

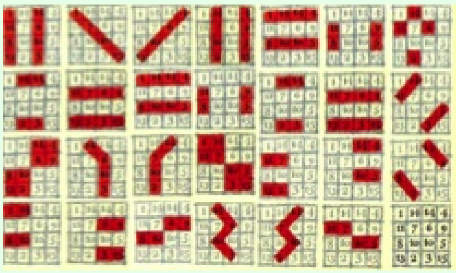
[144] Vegeu [VORDERMAN:2005] i també PEGG, Ed, Jr. (September 15, 2005). «Ed Pegg Jr.'s Math Games: Sudoku Variations». MAA Online. The Mathematical Association of America. Retrieved October 3, 2006.



Quadrat màgic de Subirachs



Quadrat màgic de Dürer



Agunes de les possibilitats dels números del quadrat de Subirachs

Té algunes curiositats que val la pena remarcar. Amb els números d'aquest quadrat es poden fer 310 combinacions que donin 33. A la figura adjunta es posen de manifest algunes d'aquestes possibilitats.[145]

Una altra de les seves peculiaritats és l'enorme analogia amb el quadrat màgic que Dürer va estampar en el gravat de 1514[146] que, en les dues cel·les centrals inferiors, indica la pròpia data. Observem que només cal efectuar quatre modificacions que facin que cap dels números es repeteixi i que la suma de les files, les columnes i les diagonals sigui 34, en lloc de 33.

Conclusió

Amb aquests exemples, que hem aplegat en dotze paràgrafs, quatre a la part I i vuit en aquesta, creiem que queda ben clar que, malgrat la disparitat que puguin presentar les metodologies en èpoques i cultures diverses, hi ha una unitat de pensament pel que fa a les qüestions matemàtiques, tant si són teòriques com lúdiques. El coneixement d'aquesta dualitat ens proporciona una riquesa conceptual de una gran volada i alhora, i potser és el més important, ens enriqueix en l'aspecte cultural de la matemàtica, sovint massa oblidat. I també és remarcable el fet que, darrere de qüestions que d'entrada poden semblar-nos molt senzilles i àdhuc innocents, s'hi pot amagar una profunditat i dificultat realment digna d'admiració i font d'estudi.

[145] N'hi ha d'altres. Sabríeu trobar-les?

[146] Aquest quadrat —el de la *Melanconia*— té moltes propietats curioses. Vegeu [Eves:1953], p. 285–286.

Referències

[ÂRYABHAṬA:1930] ÂRYABHAṬA. *The Aryabhaṭîya of Âryabhaṭa*, editat per W. E. Clark. Chicago.

[AYYANGAR:1929] AYYANGAR, Krishnaswami A. A. «New Lighton Bhaskara's Chakravala or Cyclic Method of solving Indetermiante Equations of the Second Degree in two Variables». *The Journal of the Indian Mathematical Society*, **18**, p. 225–248.

[BACHET:1612] BACHET, Claude Gaspart. *Problèmes plaisans et délectables, qui se font par les nombres, partie recueillis de divers autheurs, et inventez de nouveau, avec leur démonstration, par Claude Gaspar Bachet, Sr. de Méziriac. Très utiles pour toutes sortes de personnes curieuses qui se servent d'arithmétique*. París: Pierre Rigavd. [Reeditat per A. Blanchard. París, 1993. En línia a <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5818046p> o <http://cnum.cnam.fr/CGI/redir.cgi?8PY45>]

[BACHET:1621] BACHET, Claude Gaspart. *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus, nunc primum graece et latine editi, atque absolutissimis commentariis illustrati, auctore Claudio Gaspare Bacheto*. París: Hieronimi Drovart. [En línia a <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k57276g.pdf>]

[BAG:1979] BAG, A. K. *Mathematics in Ancient and Medieval India*. Varanasi. Delhi: Chaukhambha Orientalia.

[BALL:1892] BALL, W. W. Rouse. *Recreations and problems mathematics*. Cambridge: University Press. Traducció francesa, *Récréations et problèmes mat- hématiques*. Jacques Gabay. París. Edició anglesa més actualitzada per H. S. M. Coxeter, *Recreations problems mathematics and essays*. Dover. Nova York, 1987. En línia, a <http://www.gutenberg.org/files/26839/26839-pdf.pdf?session_id=5f7672fdfe773c66d4b39d45539651481e0ca570>.

[BECKMANN:1971] BECKMANN, Petr. *A History of π*. Nova York: St. Martin's Press.

[BEILER:1964] BEILER, Albert H. *Recreations in te theory of numbers. The Queen of Maths entertains*. Nova York: Dover.

[BENITO:2007] BENITO, Manuel; FERNÁNDEZ, Emilio; SÁNCHEZ, Mercedes. *Diofanto de Alejandría. La aritmètica y el libro Sobre los números poligonales*. Madrid: Nivola.

[BERGGREN:1997] BERGGREN, Lennart, BORWEIN, Jonathan i BORWEIN, Peter. *Pi: A Source Book*. Nova York: Springer-Verlag.

[BHANU:1992] BHANU MURTHY, T. S. *A modern introduction to Ancient Indian Mathematics*. Nova Delhi: Wiley Eastern.

[BONCOMPAGNI:1857] BONCOMPAGNI, Baldassarre. *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo*. Roma: Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. [Dos volums: 1) *Il Liber abaci* di Leonardo Pisano publicat d'acord amb les lliçons del *Codice Magliabechiano*; 2) *Leonardi Pisani Practica geometriæ*. En línia, a <http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/10607991> i <https://archive.org/stream/bub_gb_JYb-VYM12ocC#page/n3/mode/2up>]

[Bos:1981] Bos, Jenk J. M. «On the representation of Curves in Descartes's *Géométrie*». *Archives for History of Exact Sciences*, **24**, p. 295–388.

[Cantor:1880] Cantor, Moritz (1880–1908). *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, quatre volums. Leipzig: Teubner Verlag. En línia a
<https://archive.org/details/vorlesungenber01cantuoft/page/n7> (v. 1)
<https://archive.org/details/vorlesungenber02cantuoft/page/n5> (v. 2)
<https://archive.org/details/vorlesungenber03cantuoft/page/n6> (v. 3)
<https://archive.org/details/vorlesungenber04cantuoft/page/n6> (v. 4).

[Chabert:1993] Chabert, Jean-Luc (editor), *Histoire d'algorithmes*. París: Belin.

[Colebrooke:1817] Colebrooke, Henry Thomas. *Brahmegupta/Bhaskara. Algebra with arithmetic and mesuration from the sanscrit*. Londres: John Murray. [En línia, a <https://archive.org/stream/algebrawitharith00brahuoft#page/n9/mode/2up>]

[Datta:1938] Datta, B. i Singh, A. N. *History of Hindu Mathematics*. Lahore. Reeditat a Asia Publishing House. Bombay, 1962.

[Diofant:1959] Diofant d'Alexandria. *Aritmètica*. Edició castellana, [Benito:2007] (2 volums); anglesa, [Heath:1910]; francesa, [Eecke:1959].

[Eecke:1959] Eecke, Paul ver. *Les six livres arithmètiques*. París: Librairie Blanchard.

[Euler:1770] Euler, Leonhard. *Algebra*. Berlín: Springer-Verlag . [Edició anglesa. En línia a <https://books.google.es/books?id=X8yv0sj4_1YC&printsec=frontcover&hl=ca&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>]

[Euler:1779] —— (1782) «Recherches sur une nouvelle espece de quarrés magiques». *Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen* 9, Middelburg 1782, p. 85-239. [E530] de l'índex Enestrom: <http://eulerarchive.maa.org/enestrom?topic=translang=e>. D'acord amb les anotacions de l'Academia, el va llegir a l'Acadèmia de San Petersburg el 8 de març de 1779. Reimprès a *Comentarii academiae scientiarium Petropolitanae* 2(1849), p. 302–361. [E530a] de l'índex Enestrom.

[Eves:1953] Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. Filadèlfia: Saunders College Publishing. [Reeditat el 1964 i el 1983. L'edició de 1990 conté connexions culturals degudes a Jamie H. Eves].

[Fermat:1601] Fermat, Pierre de (1601–1665). *Œuvres*. Edició de R. Rashed, Ch. Houzel, i G. Christol. París: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

[Gardner:1988] Gardner, Martin. *Time travel and other mathematical bewilderments*. Nova York: W. H. Freeman and Company. [Traducció castellana de Luís Bou, *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*. Editorial Labor, S. A. Barcelona, 1988]

[GUPTA:1973] GUPTA, R. C. «The Madhava-Gregory series». *Mathematical Education*, **7**, p. B67–B70.

[HAIRER:1963] HAIRER, Ernst i WANNER, Gerhard. *Analysis by its History*. Nova York: Springer-Verlag.

[HEATH:1910] HEATH, Thomas L.. *Diophantus of Alexandria*. Cambridge University Press. Cambridge.

[HEATH:1894] HEATH, Thomas L.. *The Works of Archimedes, Edited in Modern Notation*. Cambridge: Cambridge University Press. [Reeditat per Dover, *The Works of Archimedes* i *The Method of Archimedes*. Nova York, 2002.]

[HEATH:1931] —— . *A Manual of Greek Mathematics*. Oxford: The Clarendon Pres. [Reeditat per Dover, amb el títol *Greek Mathematics*. Nova York, 1963.]

[ITARD:1984] ITARD, Jean. *Essais d'histoire des matehématiques*. París: Blanchard.

[JOSEPH:1991] JOSEPH, George Gheverghese. *The crest of the peacock: Non-European Roots of Mathematics*. Londres: World Scientific. Traducció castellana de J. Cárdenas, *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas.* Pirámide. MAdrid,1996.

[KEPLER:1615] KEPLER, Johannes. *Nova stereometria doliorum vinariorum, in primis Austriaci, figuræ omnium aptissimæ*. Linci. [Traducció francesa de Jean Peyroux, *Nouvelle stéréométrie des tonneaux*. París: Blanchard, 1993.]

[KLIVE:2007] KLIVE, Dominic i STEMKOSK, Lee.«Greco-Latin Square and a Mistaken Conjecture of Euler», a *he Genius of Euler* William Dunham, editor), p. 273-288. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

[LEIBNIZ:1684] LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. «Nova Methodus pro maximis et minimis». *Acta Eroditorum*, a [LEIBNIZ:1849], volum V, 220–226. [En línia a <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-leibnizs-papers-on-calculus-differential-calculus>. Traducció castellana de J. de Lorenzo, *Anàlisis infinitesimal. Gottfried Wilhelm Leibniz*, p. 3–15.]

[LEIBNIZ:1693] —— . «Supplementum geometriæ practicæ sese ad problemata transcendenia extendens», a [LEIBNIZ:1849], volum V, p. 285–288.

[LEIBNIZ:1849] —— (1849-1863).*Leibnizens mathematische schriften* (editor, G.I Gerhradt), 7 volums. Berlín: A Ascher. [En línia a <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015026115322;view=1up;seq=7>.]

[LEONARDO:1202] LEONARDO DA PISA. *Liber Abaci*. En llatí, a [BONCOMPAGNI:1857], volum I; en anglès, a [SIGLER:2003].

[LIBBRECHT:1973] LIBBRECHT, Ulrich. *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century*. Nova York: Dover.

[LIZCANO:1993] LIZCANO, Emanuel. *Imaginario colectivo e imaginación matemática*. Barcelona: Gedisa.

[LORENZO:1971] LORENZO, Javier de. *Introducción al estilo matemàtico*. Madrid: Tecnos.

[MCLEISH:1992] MCLEISH, John. *Number*. Glasgow: Flamingo.

[MARTZLOFF:1987] MARTZLOFF, Jean-Claude. *Histoire des mathématiques chinoises*. París: Masson.

[MASIA:2010] MASIÀ, Ramon. *Arquimedes. L'esfera i el cilindre*. Barcelona: Bernat Metge.

[MASIA:2016] ——. *Sobre les conoides i les esferoides. La mesura del cercle. La quadratura de la paràbola*. Barcelona: Bernat Metge.

[METRODOR:1918] METRODOR. *Greek Antology*, llibre V. Londres: Loeb Classical Library. En línia, en anglès, a <http://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/book/lookupid?key=olbp58842>; i, en francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/Anthologie/index.htm>.

[MEZIRIAC:1612] MÉZIRIAC, Claude-Gaspard. *Problèmes plaisantes & Délectables*. París: Gauthier-Villars. [Reeditat per Blanchard. París, 1993. En línia, a <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6212473v/f13.image>.]

[NEEDHAM:1954] NEEDHAM, Joseph (1991). *Science et Civilazation in China*. Cambridge: Cambridge University Press. [7 volums]

[NUNN:1909] NUNN, T. Percy (1909-1911). «The arithmetic of infinities». *Mathematical Gazette*, **5**, p. 345–356 i 377–386.

[ORE:1988] ORE, Oystein. *Number Theory and its History*. Nova York: Dover Publications.

[PASCAL:1963] PASCAL, Blaise. *Ouvres complètes*. París: Éditions du Seuil.

[PETIT ARCHIMEDE:1980] PETIT ARCHIMEDE. *Petit Archimede, 64–65. Numero special* π. París: DBlanchard.

[PLA:1989] PLA, Josep «Les séries en Newton». *Butlletí de la Societat catalana de matemàtiques*, **4**, p. 9–20.

[PLA:2014*a*] PLA, Josep. «Joseph-Louis Lagrange: *In memoriam*». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, **29** (2014), p. 135–165. [En línia, <http://revistes.iec.cat/index.php/BSCM/article/view/136565/135302>]

[PLA:2016*a*] PLA, Josep. *Història de la matemàtica. Egipte i Mesopotàmia*. Barcelona: IEC.

[PLA:2016*b*] PLA, Josep. *Història de la matemàtica. Grècia I. De Tales i Pitàgores a Plató i Aristòtil*. Barcelona: IEC.

[PLA:2018*a*] ——. *Història de la matemàtica. Grècia II a. Els Elements (Στοιχεῖα) d'Euclides: llibres I, II, III, IV, V i VI*. Barcelona: IEC. [Pendent de publicació.]

[PLA:2019*a*] ——. *Història de la matemàtica. Grècia II b. Els Elements (Στοιχεῖα) d'Euclides: llibres VII, VIII, IX, X, XI, XII i XIII*. Barcelona: IEC. [Pendent de publicació.]

[PLA:2019*b*] ——. *Història de la matemàtica. Resultats, textos i contextos. Grècia III b. Segle d'or: Arquimedes, Conó i Dositeu*. Barcelona: IEC. [Pendent de publicació.]

[PLA-VIADER:1999] PLA CARRERA, Josep i VIADER I CANALS, Pelegrí. (1999). *René Descartes. Geometria*, introducció, traducció i notes. Barcelona: Publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans.

[PLA-VIADER-PARADÍS:2008*a*] PLA CARRERA, Josep, VIADER I CANALS, Pelegrí i PARADÍS BALAUX, Jaume. *Pierre de Fermat. Obra matemàtica vària*, introducció, traducció i notes. Barcelona: Publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans.

[RAO:1991] RAO, Balachandra. *Indian Mathematics and Astronomy*. Bangalore; Jnana Deep Publications.

[RASHED:1984] RASHED, Roshdi. *Entre Arithmètique et Algébre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. París. Les Belles Lettres.

[SELENIUS:1960] SELENIUS, Clas Olof. «Konstruktion und Theorie halbregelmäßiger Kettenbrüche». *Acata Academia Aboensis, mat. phys.*, **22**(10), p. 1–77.

[SELENIUS:1975] SELENIUS, Clas Olof. «Rationale of the Chakravala porcess of Jayadeva and Bhaskara I». *Historia Mathematica*, 2(1975), p. 167–184.

[SIGLER:2003] SIGLER, Laurenece E. *Fibonacci's Liber Abaci.* Nova York: Springer-Verlag.

[SMORYŃSKI:1991] SMORYŃSKI, CRAIG. *Logical Number Theory, I. An Introduction*. Berlín: Springer-Verlag.

[SRINIVASIENGAR:1967] SRINIVASIENGAR, C. N. *The History of Ancient Indian Mathematics*. Calcutta: World Press. [Reeditat el 1988.]

[TANNERY:1894] TANNERY, Paul. «Sur les Épigrammes arithmétiques de l'Antologie Palatine», a *Mémoires Scientifiques*, volum II, p. 442–446.

[TURNBULL:1959] TURNBULL, Herbert Westren. *The Correspondence of Isaac Newton*. Cambridge: Cambridge University Press.

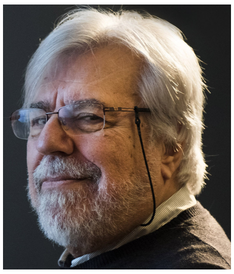
[VORDERMAN:2005] VORDERMAN, Carol. *Sudoku*. Barcelona: LiberDúplex.

[WAERDEN:1961] WAERDEN, Bartel Leenert van der. *Science Awakening*. Oxford University Press. Nova York.

[WEIL:1983] WEIL, André. *Number Theory: An Approach Through History: From Hammurabi to Legendre*. Boston: Birkhäuser.

[Whiteside:1967] Whiteside, Derek Thomas (editor) (1967–1981). *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, 2 volums. Cambridge: Cambridge University Press.

[Whitford:1912] Whitford, Edwrad Everett. *The Pell Equation*. Nova York: College of New York city. [En línia a https://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/ABV2773.0001.001/1?rgn]



Professor emèrit
Universitat de Barcelona

Publicat el 23 d'abril de 2019