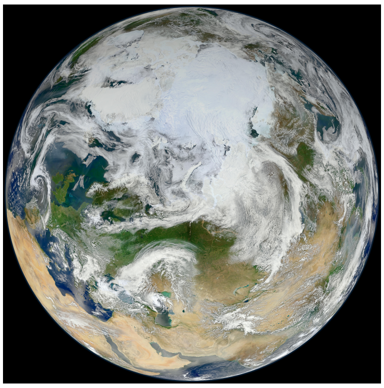
MAT^2

MATerials MATemàtics
Volum 2018, treball no. 1, 30 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Matemàtiques. Unitat de pensament. Diversitat cultural (Part I)*

Josep Pla i Carrera

1 Preludi



És molt important remarcar, ja des d'ara mateix, que, en la comtessa històrica, que representa la *integració europea* vers una unió o confederació d'estats individuals amb una personalitat històrica, política, econòmica, social i jurídica pròpia i independent, que busca punts d'encontre i comunió, hom intenta establir una definició que, d'alguna manera, justifiqui i posi en relleu amb prou claredat la *raó ultima* d'aquest fet un xic fugisser que és el que s'anomena —en ocasions, només per contraposar-lo amb d'altres— el *caràcter europeu*, i que vagi més enllà de la simple situació geogràfica de la proximitat i el veïnatge.

Però és important remarcar un fet que, com a ciutadà català que està permanentment interessat i preocupat per la *racionalitat* o la *irracionalitat*, com vulgueu dir-ho, del discurs polític i, molt més greu encara, dels polítics, em sembla molt preocupant pel que té de llavor maligne dins el projecte de convergència europea: que hom cerqui el *valor afegit* —o com un dels valors

*Aquest treball està basat en una conferència de l'autor al Forum de les Cultures l'any 2004 a Barcelona. Degut a la seva longitud, es publicarà en vàries parts.

afegits— el *fet religiós*.[1] L'Europa és, en definitiva, d'acord amb aquesta definició, una Europa *cristiana*.

Em sembla molt greu que es matisi el valor de l'*europeïsme* estrictament *històricocultural* d'aquesta realitat complexa i plural que volem anomenar Europa perquè crec que, al segle XXI, caldria refermar, per damunt de tot, el *valor humà* i els principis recollits en la *Declaració universal del drets humans*, com a única garantia de la *igualtat de tots* pel simple fet de ser humans —homes, dones, nenes, nens i nadons. Si entenem que un dels trets que l'ha caracteritzat els darrers segles —i que l'hauria de continuar caracteritzant en el futur— és la *laïcitat* de l'Estat i de les Institucions i, de retruc, el respecte al dret inalienable de les *creences dels individus*, de caràcter privat, caldria ser molt més curós a l'hora de fer l'anàlisi de la realitat d'Europa i cercar-ne els trets distintius.

Personalment penso que no és possible entendre el *fet europeu* sense comprendre i acceptar *sense reticències*, *sense por*, *amb generositat* i *sense cap mena de recel* —la història és la que ha estat i les situacions i conveniències històrico-polítiques actuals no la poden canviar— que l'Europa d'avui és, en una síntesi breu, la cruïlla on han confluït:

1. El paganisme i la racionalitat gregues, sense les quals és innegable que l'Europa de la racionalitat i de la democràcia no fora, en absolut, el que és avui.

2. L'enigme i misticisme orientals que, si bé ens semblen molt llunyans, sempre han atret la curiositat dels nostres prohoms més avançats en el pensament i en l'art.

3. El fet cultural, històric i religiós del poble jueu, fortament adulterats per una lectura excessivament dogmàtica de Roma que n'ha configurat l'arrel cristiana.

4. Una aportació molt incardinada en la fisicalitat del món que ens envolta, molt pròpia de la Mediterrània, i que ens ha deixat, com a herència innegable de la que en som deutors, la civilització islàmica en el període del seu floriment cultural, polític i religiós.

5. Finalment, un caràcter de seriositat, de rigor i austeritat, en moltes ocasions força oblidat, dels valors forjats a l'entorn del luteranisme i altres reformes afins.[2]

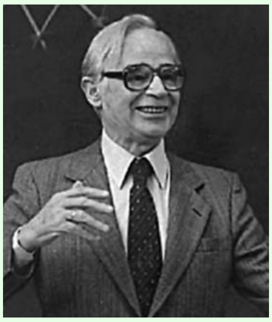
[1]Voldria remarcar, de passada, el grau de «separatisme», de «sectarisme», de «dogmatisme/fonamentalisme» i de «radicalitat», a voltes violents, de les religions en llur procés de consolidació i de permanència.

[2]Vegeu, en aquest sentit, [Barzun:2001], edició castellana de 2001, p. 26–305.

És en aquest context en què entenc el fet europeu, entès com un projecte d'entesa, d'intercanvi, de multiculturalitat, de controvèrsia i de pau.[3]

Vull, doncs, agrair als editors de Mat^2 que m'hagin honorat editant aquest text que vull dedicar a la *multiculturalitat-unitat del pensament i de la pràctica matemàtics*.

* * *



Bartel L. van der Waerden
[Amsterdam, 1903 - Zuric, 1996]

En aquesta presentació, seguint una mica de lluny la filosofia, encara que no la tesi, que Bartel Leenert van der Waerden sosté a l'obra *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*,[4] miraré de posar de manifest el pensament matemàtic europeu tot contraposant-lo amb certs resultats del pensament matemàtic d'Orient, ben coneguts, però no per això menys interessants ni menys rellevants. En aquest petit resum entendré per Occident el món cultural hereu de la Grècia clàssica, marcat per aquest tret distintiu que, resumint allò que és essencial, s'anomena la *racionalitat grega*, mentre que Orient, per contraposició, engloba tot allò que, d'alguna manera, es mantingué aliè a aquesta influència o bé perquè s'havia desenvolupat amb anterioritat o bé perquè la racionalitat grega no l'influí d'una manera decisiva i aconseguí obviar-la o matisar-la.[5]

Concretant, l'estructura del text és un paral·lelisme que, en ocasions, paradoxalment, és divergent, entre alguns resultats concrets aconseguits per uns i altres, i entre conceptes matemàtics més generals. Tot això amb l'objectiu de posar de manifest, sense filosofar, una certa independència del pensament matemàtic del context cultural concret del poble que l'assoleix i la dependència que la seva presentació concreta té d'aquest mateix bagatge cultural.

En l'obra esmentada, van der Waerden aventura la conjectura que,

> D'acord amb troballes recents, alguns aspectes de les Matemàtiques xinesa i índia palesen l'existència d'una ciència matemàtica de l'època neolítica.[6]

---

[3] En aquest sentit és on tenia acollida el *Fòrum de les cultures. Barcelona 2004* que, malgrat tot, va ser una experiència fallida.

[4] [Waerden:1983].

[5] Cal indicar que, en certs casos, les influències de tipus oriental van influir en el pensament grec primitiu i van ser la llavor del seu pensament ulterior.

[6] [Waerden:1983], p. ix.

Es tracta d'una ciència matemàtica que van der Waerden intenta reconstruir. D'acord amb aquesta conjectura, aquesta ciència matemàtica primitiva caldria datar-la entre el 3000 i el 2600 aC i s'hauria expandit per tota l'Europa Central arribant, pel nord i l'oest, fins a la Gran Bretanya i, pel sud i l'est, a l'Orient Proper, l'Índia i la Xina.

En consolidar-se la cultura grega, aquesta matemàtica seria repensada, garbellada amb el cedàs la de racionalitat grega, i esdevendria la *ciència deductiva*, basada en les *definicions*, *postulats*, *axiomes* i *teoremes* que trobem recollida, amb una presentació original i unitària en els *Elements* (*Στοιχεια*) d'Euclides. Tanmateix, en alguns dels llibres d'Euclides i sobretot en l'*aritmètica* (*Ἀριθμητικά*) de Diofant d'Alexandria hi trobem vestigis d'aquesta pretesa matemàtica pre-babilònica i pre-egípcia.[7] Tanmateix, el propòsit d'aquest text és diferent del que hem resumit fins ara.

Euclides
[?, ∼325 - Alexandria, ∼265 aC]

Diofant
[Alexandria, 210 dC - 290 dC]

Pretenim considerar algunes qüestions que posin de manifest com Occident —l'àrea d'influència grega— i Orient —amb èmfasi en la matemàtica índia i xinesa— han resolt algunes qüestions: més aviat teòriques a Occident i algorísmiques a Orient.

D'antuvi, analitzarem de quina manera han comprés i utilitzat aquestes civilitzacions el màxim comú divisor. En segon lloc, una anàlisi de qüestions relatives a l'ús de l'infinit en problemes vinculats al càlcul.

[7]Convé indicar que aquests dos matemàtics estan separats per sis segles. El que és més important és la ideologia bàsica de la seva matemàtica: geomètrica, en el primer, i aritmètica, en el segon.

2 El concepte de nombre i el màxim comú divisor amb semàntica geomètrica

És molt raonable pensar que, en la matemàtica prehel·lènica i en l'hel·lènica més primitiva, totes les magnituds eren *commensurables*. Aquest fet, realment simplificador, permetia reduir-ho tot a la *unitat*, un cop fixada. A més, era totalment intranscendent què usessin com a unitat, perquè qualsevol magnitud era igualment apta per fer aquest paper. Aquest fet geomètric es traduïa en un resultat aritmètic molt important. Els únics nombres que calien per amidar-ho tot eren els *nombres enters* i els *nombres racionals* o *fraccionaris positius*.[8]

És en aquest sentit que hem d'entendre la capacitat, molt evolucionada, de les Matemàtiques egípcia i mesopotàmica d'expressar les *quantitats fraccionàries*. Certament que cada un d'aquests pobles assoleix una manera ben diferent de representar-les:

- Per als escribes egipcis solament existeixen les *fraccions unitàries*; és a dir, les fraccions de la forma $\frac{1}{m} = \overline{m}$. Qualsevol altra fracció s'ha d'expressar com una suma de fraccions unitàries. D'aquí la necessitat de disposar d'una *taula de descomposició de fraccions del tipus* $\frac{2}{n} = \overline{\overline{n}}$ en fraccions unitàries:[9]

Taula de les fraccions unitàries egípcies

$\overline{\overline{5}} = \overline{3} + \overline{15}$	$\overline{\overline{37}} = \overline{24} + \overline{111} + \overline{296}$	$\overline{\overline{71}} = \overline{40} + \overline{568} + \overline{710}$
$\overline{\overline{7}} = \overline{4} + \overline{28}$	$\overline{\overline{41}} = \overline{24} + \overline{246} + \overline{328}$	$\overline{\overline{73}} = \overline{60} + \overline{219} + \overline{292} + \overline{365}$
$\overline{\overline{11}} = \overline{6} + \overline{66}$	$\overline{\overline{43}} = \overline{42} + \overline{86} + \overline{129} + \overline{301}$	$\overline{\overline{77}} = \overline{44} + \overline{308}$
$\overline{\overline{13}} = \overline{8} + \overline{52} + \overline{104}$	$\overline{\overline{47}} = \overline{30} + \overline{141} + \overline{470}$	$\overline{\overline{79}} = \overline{60} + \overline{237} + \overline{316} + \overline{790}$
$\overline{\overline{17}} = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$	$\overline{\overline{49}} = \overline{28} + \overline{196}$	$\overline{\overline{83}} = \overline{60} + \overline{332} + \overline{415} + \overline{498}$
$\overline{\overline{19}} = \overline{12} + \overline{76} + \overline{114}$	$\overline{\overline{53}} = \overline{30} + \overline{318} + \overline{795}$	$\overline{\overline{85}} = \overline{51} + \overline{255}$
$\overline{\overline{23}} = \overline{12} + \overline{276}$	$\overline{\overline{55}} = \overline{30} + \overline{330}$	$\overline{\overline{89}} = \overline{60} + \overline{356} + \overline{534} + \overline{890}$
$\overline{\overline{25}} = \overline{15} + \overline{75}$	$\overline{\overline{59}} = \overline{36} + \overline{236} + \overline{531}$	$\overline{\overline{91}} = \overline{70} + \overline{130}$
$\overline{\overline{29}} = \overline{24} + \overline{58} + \overline{174} + \overline{232}$	$\overline{\overline{61}} = \overline{40} + \overline{244} + \overline{488} + \overline{610}$	$\overline{\overline{95}} = \overline{60} + \overline{380} + \overline{570}$
$\overline{\overline{31}} = \overline{20} + \overline{124} + \overline{155}$	$\overline{\overline{65}} = \overline{39} + \overline{195}$	$\overline{\overline{97}} = \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}$
$\overline{\overline{35}} = \overline{30} + \overline{42}$	$\overline{\overline{67}} = \overline{40} + \overline{568} + \overline{710}$	$\overline{\overline{101}} = \overline{101} + \overline{202} + \overline{303} + \overline{606}$

[8] Hi ha un text molt complet sobre les fraccions, el seu significat i història: [Benoit:1992].

[9] Les fraccions unitàries de denominador $n = \dot{3}$ són de la forma $\overline{\overline{3\,k}} = \overline{2\,k} + \overline{6\,k}$ i per això les ometem, malgrat que, en el papir Rhind, s'hi exposen de forma explícita. [Pla:2016*a*], § 1.8.4, p. 54–58. Pel que fa al *papir Rhind* i al *papir Kahum*, vegeu [Clagett:1999], p. 24–42, 122–133, 242–243.

- Per als escribes mesopotàmics, les fraccions són, de fet, expressables en base seixanta de la mateixa manera que els enters, atès que la fracció $\frac{m}{n}$ és el mateix que $m * n^{-1}$, en el ben entès que n és un *nombre regular* respecte de la base 60. Calen, doncs, les *taules d'inversos*:[10]

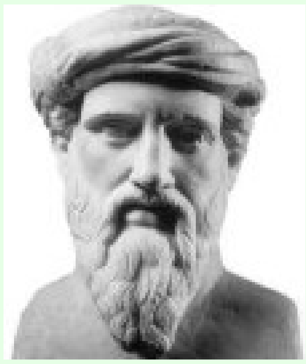
Taula mesopotàmica d'inversos

$1: \ 2 = 30$	$1: 16 = 3,45$	$1: 45 = 1,20$
$1: \ 3 = 20$	$1: 18 = 3,20$	$1: 48 = 1,15$
$1: \ 4 = 15$	$1: 20 = 3$	$1: 50 = 1,12$
$1: \ 5 = 12$	$1: 24 = 2,30$	$1: 54 = 1, \ 6,40$
$1: \ 6 = 10$	$1: 25 = 2,24$	$1: \ 1 = 1$
$1: \ 8 = \ 7,30$	$1: 27 = 2,13,20$	$1: \ 1, \ 4 = 56,15$
$1: 10 = \ 6$	$1: 32 = 1,52,30$	$1: \ 1,12 = 50$
$1: 12 = \ 5$	$1: 36 = 1,40$	$1: \ 1,20 = 45$
$1: 15 = \ 4$	$1: 40 = 1,30$	$1: \ 1,21 = 44,26,40$

Aleshores, tot càlcul, fins i tot quan és d'índole geomètrica, admet una resposta fraccionària exacta.

Només en aquest sentit podem entendre el *pensament pitagòric* quan sosté que «els nombres són les coses», «les coses es componen de nombres». Així,

> D'acord amb la seva exposició, els pitagòrics consideraven els nombres com la naturalesa substancial ($o\upsilon\sigma\iota\alpha$) de les coses o perímetre el seu origen ($\alpha\rho\chi\acute{\epsilon}$), un concepte que, d'altra banda, s'aplica als elements primitius dels filòsofs jònics antics.[11]



Pitàgores
[Samos, ~569–Metapont, ~475 aC]

Aquesta concepció numèrica permetia

[10] D'aquí la necessitat de disposar de *tauletes d'inversos*. Això explica l'existència de certes tauletes que contenen taules de multiplicar per nombres força complexos, com ara $44,26,40$. Vegeu [Waerden:1961], p. 42–44 i [Pla:2016*a*], § 2.6.3, p. 162–168.

Cal recordar que inicialment no disposaven de cap símbol per indicar el zero, amb tot el que això suposa a l'hora de representar-los.

[11] Vegeu [Becker:1959], traducció castellana de 1966, 17, i, en particular, p. 17–20.

Totes aquestes idees són recollides a la *Metafísica* d'Aristòtil, com podem veure a A 5, 987a, 18; A 8, 1017a, 20, pel nombre entès com $o\upsilon\sigma\iota\alpha$; i A 5, 986a, 16, pel que fa al nombre entès com a $\alpha\rho\chi\acute{\epsilon}$, a [Aristòtil:1994], p. 89 i 224. Vegeu [Pla:2016*b*], p. 110–112.

calcular-ho tot,[12] arrels quadrades i cúbiques —i, de retruc, el que anomenem equacions de segon i tercer graus.[13] De fet, tot el que cal manejar són nombres i, per tant, no hi ha cap mena d'inconvenient a *sumar* una àrea i un costat,[14] com fan amb tota naturalitat els matemàtics egipcis i babilònics, com podem constatar, per exemple, tot llegint la tauleta AO 8862, de Senkereh, de l'època d'Hammurabi [∼1800 aC]:

> *Longitd i amplada. Les he multiplicat i m'ha donat una superfície. La sumo a l'excés de la longitud respecte de l'amplada i obtinc* $3,3(=183)$. *La longitud i l'amplada fan* 27.[15]

El que interessa remarcar és el fet que l'escriba sumi $x\,y$ —que és una superfície— amb $x-y$ —que és una longitud. Però, per a la seva mentalitat, no hi ha cap mena de dificultat: «tot són nombres i, per tant, són susceptibles de ser sumats».

Vull indicar que la resolució és d'una gran originalitat perquè la fa basant-se en la resolució del cas general —ben conegut— que consisteix a resoldre sistemes provinents del coneixement de la superfície i el semiperímetre del rectangle; és a dir, sistemes del tipus $x\,y=a,\;\; x+y=b$, al qual arriba tot realitzant un canvi de variables.[16]

Aquesta mentalitat numérica racional la retrobem a l'*Aritmètica* de Diofant que, d'alguna manera, restringeix la seva aritmètica al món dels nombres racionals. Així per exemple, el problema 6 del llibre VI de l'*Aritmètica*, proposa:

---

[12] Contrasta la introducció del papir Rhind —«una recopilació detallada de les lleis de càlcul que permeten esbrinar les coses, i conèixer, de les que són misterioses, tots els secrets»— amb les paraules d'Aristòtil [Estagira, 384 aC–Chalcis, 322 aC], segons les quals «la matemàtica és una disciplina lliure» (παιδεια) [*Metafísica*, A 2, 982b, 25–28, a [ARISTÒTIL:1994], p. 77]. La ciència es cultiva per ella mateixa sense atendre a la seva utilitat, únicament per plaer.

[13] Al capítol quart de *Xiu Xang Suan Shu* [*Els nou capítols de la matemàtica xinesa*] [∼100 aC], titulat *Shao kuang* [*shao* = quant val; *kuang* = amplada], hi trobem un mètode de resolució de les arrels quadrades i cúbiques, basat en la llei del desenvolupament del binomi. [NOU CAPÍTOLS:2002], capítol quart, p. 313–335; 340–365. Vegeu [JOSEPH:1991], traducció castellana de 1996, p. 223.

[14] El problema de la *homogeneïtat*, que perdurarà fins a la *Géométrie* [1637] de René Descartes, és una herència de la mentalitat geomètrico-racional grega. Vegeu [PLA-VIADER:1999], p. XXX i XXXVI.

[15] En llenguatge algèbric modern, es tracta de resoldre el sistema d'equacions $x\,y+x-y=183,\;\; x+y=27$. [PLA:2016*a*], p. 208–210.

[16] Vegeu [WAERDEN:1961], p. 63.

> *Trobar un triangle rectangle en el qual la seva àrea més un dels catets sigui un nombre donat.*[17]

Considera que el triangle rectangle és del tipus $\langle 3\,x, 4\,x, 5\,x\rangle$ i que el nombre donat és 7. Aleshores obté l'equació

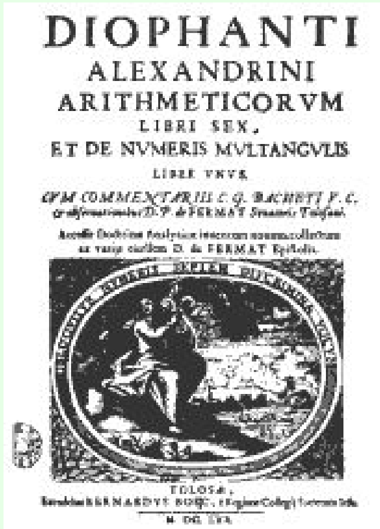
$$\boxed{6\,x^2 + 3\,x = 7.}$$

I diu:

> *Si l'equació fos resoluble, el quadrat de la meitat de x, juntament amb el producte del quadrat del coeficient de x^2 i el nombre 7 hauria de ser un quadrat.*[18]

Diofant exigeix, doncs, que el *discriminant* $\Delta = \frac{177}{4}$ sigui un quadrat perfecte per tal de poder resoldre el problema, evitant la possibilitat que la solució no sigui racional. Això l'obliga a canviar el triangle elegit originalment i agafar $\langle 1, b, c\rangle$, de manera que el discriminant sigui un quadrat: $\frac{1}{4} + \frac{7}{2}b = \square$.[19] Aleshores, traient denominadors, obté $\langle 7, 24, 25\rangle$ que pot posar en la forma $\langle 7\,x, 24\,x, 25\,x\rangle$. Finalment aconsegueix l'equació vàlida

$$\boxed{84\,x^2 + 7\,x = 7.}$$



Pàgina príncep de l'edició de Bachet de l'*aritmètica* de Diofant

Ara bé, fou al si de l'escola pitagòrica —l'escola de «tot és nombre»— on aparagué la *incommensurabilitat*.

No importa si la van trobar, com afirma gairebé tothom, en voler amidar la diagonal i el costat d'un quadrat amb una mateixa unitat de mesura, o bé si fou, com afirma Meschkowski,[20]

[17] Vegeu [Diofant:1959], edició castellana, volum II, p. 111–113.

[18] Vegeu [Diofant:1959], edició castellana, volum II, p. 112.

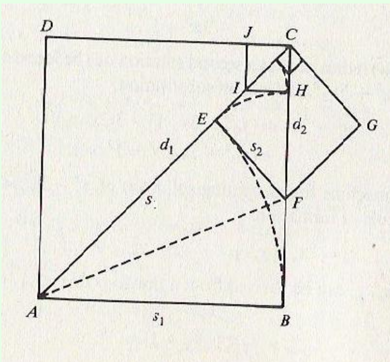
[19] D'aquesta manera té el sistema següent: $1 + 14\,b = v^2$, $1 + b^2 = c^2$. La diferència proporciona $v^2 - c^2 = (v+c)(v-c) = b\,(14-b)$ D'on, si fem $v + c = b$, $v - c = 14 - b$, resulta que $v = 7$. Per a més detalls, vegeu [Heath:1931], p. 505–506.

[20] [Mechskowski:1961], p. 9–10. Recordem que els membres de l'escola pitagòrica, racionals com eren, usaven, com a signe identificador, l'*estrella pentagonal*, que s'obté amb les diagonals del pentàgon regular. No és, doncs, estrany que els preocupés la relació existent entre la diagonal i el costat del pentàgon regular.

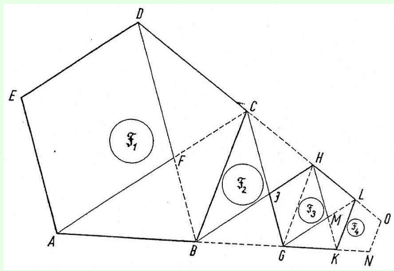
en voler-ho fer amb el costat i la diagonal del pentàgon tal com palesen les dues figures de la pàgina següent.

El que realment importa és adornar-se del fet que van descobrir un resultat realment inesperat i epistemològicament revolucionari, un resultat que estableix

> Hi ha segments que no poden ser amidats amb un mateix tercer segment de manera que les dues mides siguin exactes, o entre si de manera que les mesures respectives de l'una respecte de l'altre sigui racional.[21]



Incommensurabilitat de la diagonal respecte del costat en el quadrat
$s_1 = s_2 + d_2;\;\; d_1 = 2\,s_2 + d_2$



Incommensurabilitat de la diagonal respecte del costat en el pentàgon
$s_1 = d_2;\;\; d_1 = s_2 + d_2$

D'aquesta manera es va perdre quelcom molt important:

> El concepte mateix de nombre.

La definició de *nombre*, que ofereix Euclides al llibre VII, no deixa cap escletxa pel dubte:

> **Definició.** *Un nombre és la multitud que està composta d'unitats.*[22]

[21] Apareixen les *magnituds*, objectes geomètrics que no són necessàriament susceptibles d'un tractament numèric en el sentit que hem exposat.

Vegeu [Euclides:1970], edició francesa, II, 13–14, 38–39, 56–57, 131–136; catalana, volum I, p. 48–53, 264, 266.

Per a una anàlisi de les figures, vegeu [Pla:2010a], p. 79–80.

[22] [Pla:2018*b*], p. 84.

En l'àmbit dels nombres —es a dir, en l'àmbit pitagòric de la unitat— ens trobem amb una situació dual, però diversa: hi ha nombres que s'amiden l'un a l'altre mentre que n'hi ha altres que no ho fan. Euclides distingeix entre els «nombres que són 'part' d'un altre» i els «nombres que són 'parts' de l'altre».[23] I així apareix el concepte «ser parts» un nombre d'un altre, que és el concepte de «nombre racional».

Per què racional? Doncs perquè, malgrat que un sigui «parts» d'un altre i no en sigui «part», ambdós admeten una «mesura comuna» —una unitat de mesura— i àdhuc una mesura comuna «màxima»: el «màxim comú divisor» que permet establir el lligam que hi ha entre els dos nombres.[24]

Tanmateix Euclides, malgrat que als llibres VII,VIII i IX —immediatament després dels llibres V i VI—, ofereix l'«aritmètica pitagòrica», evita tant com pot recórrer a la unitat i prefereix recórrer a la «relació» existent entre els nombres»: donats dos nombres, l'un sempre és «parts» de l'altre. és a dir, els enters són tractats com si fossin racionals.[25]


Èudox
[Cnidos, ∼408 aC-∼355 aC]

Cal indicar que Euclides ofereix, abans da l'aritmètica, la «teoria general de les proporcions» —llibres V i VI— que té el fonament en l'existència dels «incommensurables» basant-se en la gran intuïció d'Èudox. I només, un cop ha establert aquesta teoria, recorrent-hi quan li cal, introdueix la teoria dels nombres racionals.

Però, amb la descoberta pitagòrica de les *magnituds incommensurables* —objectes geomètrics no reductibles a una unitat—, el món del pensament grec queda irremeiablement dividit en dos àmbits irreconciliables:

El món del discret/el món del continu.

El món dels nombres/el món de les magnituds

El món amb màxim comú divisor/el món infinitament divisible.

[23] [Pla:2018*b*], p. 84.

[24] [Pla:2018*b*], p. 87–92. Vegeu també els excel·lents comentaris de Vitrac, edició francesa, volum II, 250–302.

[25] Val la pena d'indicar que, de fet, Euclides proporciona una teoria del nombre racional molt interessant amb la qual pot demostrar, per exemple, la «commutativitat de la multiplicació» dels nombres enters positius. Pensem que la seva és una teoria multiplicativa i no pas additiva, que té el fonament en els nombres primers i en l'existència d'una representació irreductible. [Pla:2018*b*], p. 3–5.

Allò que no té mida[26] —les magnituds lineals, per exemple,— ha de ser, d'alguna manera, «construïble». D'aquí la necessitat de limitar-se a alguna mena de ginys acceptables que, en el món grec, com sabem, són: el regle i el compàs.[27]

Però el que m'interessa posar en relleu ara és la darrera de les dualitats anteriors. L'existència de dos mons: un que és el regne del màxim comú divisor i un altre, potser menys clar, on el màxim comú divisor no existeix. Aquesta distinció és clau a la darrera part dels *Elements*. D'aquí la importància de les primeres proposicions del llibre X, on després d'haver establert, amb les mancances lògicodeductives de tots conegudes,[28] l'«arquimedianitat» de l'univers de les magnituds —la necessitat axiomàtica de la qual serà establerta per Arquimedes a la monografia *Sobre l'esfera i el cilindre* (Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου)—, estableix:

Proposició. *Hi ha magnituds que no tenen, entre si, màxim comú divisor i unes altres que sí. Aquestes darreres es comporten entre si com si fossin nombres naturals.*[29]

Tanmateix l'eina del màxim comú divisor, en l'obra grega, o en tot cas en el pensament sintètic d'Euclides, deixa de tenir el caràcter aritmètic que li és propi —que evidentment no desconeixia— per adquirir-ne un d'epistemològic transcendent i fonamental: és el que permet distingir la commensurabilitat de la incommensurabilitat.

Euclides
[∼325-Alexandria, ∼265 aC]

Ens trobem, doncs, davant d'un fet matemàtic que és interpretat i manejat de forma molt diferent en la mentalitat de la matemàtica —i filosofia— grega i en la de la matemàtica —i filosofia— oriental. Ja hi tornarem!

[26]Segons [BOYER:1949], p. 27, nota 57, sembla que Plató hauria defensat la necessitat d'establir una aritmètica basada en axiomes per tal de poder obviar la dificultat que havia generat l'incommensurable. És, però, una conjectura molt agosarada i molt difícil de constatar en els textos del filòsof. Vegeu [PLATÓ:1966], p. 1539.

[27]És molt corrent atribuir aquesta necessitat al filòsof Plató. Vegeu [BOYER:1949], p. 27, nota 52.

[28]Ometem qualsevol mena de comentari sobre la correcció i/o incorrecció en la presentació euclidiana perquè el que m'interessa és el fil conductor ideològic i no l'estrictament formal.

[29][PLA:2018*b*], llibre X, proposicions 5 i 6, p. 217–219.

3 La incommensurabilitat al món grec

Ara volem centrar l'atenció en una qüestió molt important en el pensament grec. Com ja hem dit, dues magnituds incommensurables no poden ser amidades, amb exactitud, amb cap mesura comuna. No hi ha manera de trobar una unitat que permeti reduir-les a nombres. La qüestió —fruit de la racionalitat— és la següent:

> Per què no evitem la unitat i, com si fossin racionals, no treballem amb la «relació» que hi hagi entre els ens geomètrics incommensurables?

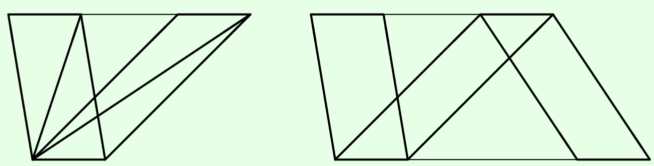
Aquesta és la qüestió que va plantejar i resoldre Èudox de Cnidos. Imaginem que volem establir el teorema següent:

> **Teorema.** *Dos triangles de la mateixa altura són com les seves bases.*[30]

En el **cas commensurable**, podem descompondre el triangle —per un mètode de *tangram* generalitzat—, en triangles més petits, diferents en forma —és a dir, no superposables—, però tots de la mateixa superfície, en el ben entès que dos triangles que tenen bases còngrues i es troben entre les mateixes paral·leles són equivalents.

La proposició bàsica és aleshores la següent:

> **Proposició.** *Dos paral·lelograms que tenen bases congrues i es troben col·locats entre les mateixes paral·leles són congruents o equivalents.*[31]



Aleshores, de retruc, resulta trivialment el corol·lari següent:

[30] [Pla:2018a], llibre VI, proposició 1, p. 302–304.

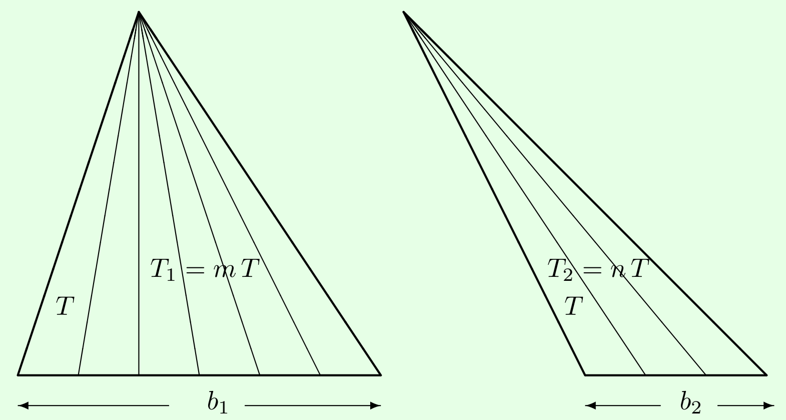
[31] Els resultats que ens calen són les proposicions 35 i 36 del llibre I, a [Pla:2018a], p. 134–136. Cal el postulat de les paral·leles. [Pla:2018a], p. 83.

Corol·lari. *Dos triangles col·locats a la mateixa base, o en bases còngrues, i entre les mateixes paral·leles són equivalents.*[32]

Disposem, doncs, de les eines necessàries per establir el teorema que hem proposat en el cas commensurable.

$$\boxed{T_1 = mT,\ \ T_2 = nT,}$$

on m és el nombre de trossos en què hem partit la base b_1 i n és el nombre de trossos en què hem partit la base b_2.

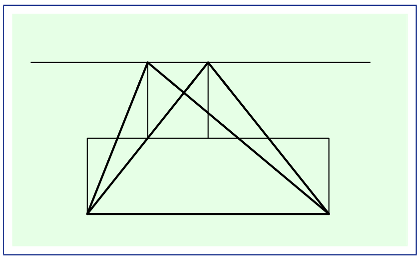


El teorema en el cas commensurable

Resulta, doncs, que

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n} = \frac{b_1}{b_2},}$$

[32] És important d'observar que, si bé la validesa del teorema, en el cas dels triangles és una conseqüència immediata del teorema en el cas dels paral·lelograms, és possible establir-la de forma immediata usant el mètode del tangram —descomposició d'una figura en peces congruents— com podem veure tot observant la figura adjunta. Vegeu les proposicions 37 i 38 del llibre I. [Pla:2018*a*], p. 136–138.



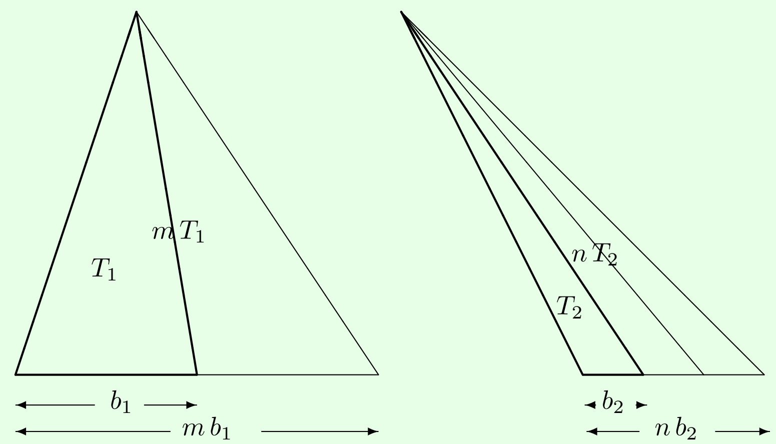
i podem obviar la unitat de mesura i fins i tot la naturalesa de les magnituds, sempre que les magnituds T_1, T_2, i b_1, b_2 siguin, dues a dues, magnituds de la mateixa naturalesa o gènere.

Ara bé, en el **cas incommensurable**, és del tot impossible «trencar» la figura en peces tipus *tangram*, però podem fer-ne còpies. Cada una de les còpies, en tenir la mateixa base i altura que la peça original, té la mateixa superfície, malgrat que no siguin superposables. Per tant, si

$$n\,b_1 > m\,b_2,$$

tindrem que

$$n\,T_1 > m\,T_2.$$



El teorema en el cas incommensurable

En canvi, si

$$n\,b_1 < m\,b_2,$$

tindrem

$$n\,T_1 < m\,T_2.$$

En conseqüència, d'acord amb Èudox, podem dir que

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Així és com Euclides estableix la demostració del teorema que hem enunciat a la pàgina 12 i que correspon al el teorema primer del llibre VI dels *Elements*.[33]

D'aquesta manera trobem, de forma natural, la famosa definició d'Èudox del concepte de «proporció», que inaugura la metodologia grega per tractar les magnituds incommensurables, incloent-hi les commensurables. S'estableix la baula indispensable per poder formular la famosa «teoria de la proporció».[34]

Definició. *Si A, B i Γ, Δ són dues parelles de magnituds, relativament del mateix gènere, aleshores A, B i Γ, Δ tenen la mateixa raó si, i només si, equimúltiples de la primera i de la tercera sobrepassen, són iguals, o estan per dessota dels corresponents equimúltiples de la segona i la quarta.*

Quan les quatre magnituds tenen, dues a dues, la mateixa raó diem que estan en proporció o que són proporcionals.[35]

En concret, formalment,

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta} \text{ si, i només si, } \forall m, n \in \mathbb{N} \left(mA \gtreqless nB \longrightarrow m\Gamma \gtreqless n\Delta \right).$$

Aquesta definició —la definició cinquena del llibre V dels *Elements* d'Euclides— i la següent —que ofereix la desigualtat entre raons de magnituds del mateix gènere—,[36] proporcionen a Èudox una eina «operativa» —fora

[33][PLA:2018*a*], llibre VI, proposició 1, p. 302–304.

[34]En els *Elements* d'Euclides aquesta teoria es desenvolupa als llibres V i VI. Constitueixen la base del «mètode d'exhaustió», desenvolupat al llibre X i, sobretot, al XII i que, en mans del genial Arquimedes, es transforma amb una eina de càlcul d'una potència insospitada.

[35]Llibre V, definició 5, [PLA:2018*a*] p. 266-267.

El cas en què es dona la igualtat és el cas de la commensurabilitat que hem tractat abans.

[36]Diu:

Definició. *Si A, B i Γ, Δ són dues parelles de magnituds, relativament del mateix gènere , quan, d'una banda el múltiple de la primera sobrepassa el múltiple de la segona i, d'una altra banda, el múltiple de la tercera no sobrepassa el de la quarta, aleshores diem que la primera [magnitud] té amb la segona una raó que és més gran que la que la tercera té relativament amb la quarta.*

En concret,

millor dir «matemàtica»— molt notable que li permet evitar la qüestió epistemològica d'un gran calat.[37]

El concepte que hi ha dessota de la teoria de la proporció —el concepte de «raó» entre magnituds del mateix gènere, $\frac{A}{B}$,— està embolcallat de foscor. És precisament la inexistència d'un concepte ontològic clar d'aquesta raó el que fa que les magnituds siguin incommensurables. Tanmateix, Euclides, a les definicions 3 i 4 del llibre V, intenta posar de manifest què cal entendre per «raó» entre magnituds», però les seves definicions no aclareixen res de res.[38]

De fet, Euclides mira de mantenir un paral·lelisme complet amb els conceptes aritmètics corresponents. Això fa que hi hagi una total coincidència entre les definicions 1 i 2 del llibre V —on exposa la teoria general de la proporció— i les definicions 1 i 2 del llibre VII —on exposa la teoria de la divisibilitat aritmètica. Allà on es trenca el pretès paral·lelisme entre magnituds i nombres és en la definició de «parts» —pròpia de l'àmbit aritmètic—, ja prou ambigua en l'àmbit numèric, però que quan es vol traslladar al món de les magnituds es transforma en la definició de «raó» —pròpia de la teoria de la proporció— en l'àmbit de les magnituds i sotmesa a la dificultat de la incommensurabilitat.

Fixem-nos amb la deficinió euclidiana de «raó entre dues magnituds del mateix gènere»:

Definició. *La raó és «qualsevol mena de relació», segons la mida existent, entre dues magnituds del mateix gènere.*[39]

Si existeixen $m, n \in \mathbb{N}$ tals que $\left(mA > nB \longrightarrow m\mathit{\Gamma} < n\mathit{\Delta}\right)$, aleshores $\dfrac{A}{B} > \dfrac{\mathit{\Gamma}}{\mathit{\Delta}}$.

És la definició 7 del llibre V [PLA:2018a], p. 267.

[37]Pensem que l'única definició de «magnitud», força pobre, la proporciona Aristòtil. Vegeu [PLA:2018a], p. 48, nota 160. I, si no es disposa d'una definició prou precisa del concepte de «magnitud», com podem entendre el que és la «raó de dues magnituds»? I no obstant això, Èudox proporciona la igualtat i la desigualtat i ho fa basant-se en els nombre naturals, en la igualtat i en la desigualtat de magnituds d'un mateix gènere. Quina gran genialitat.

[38][PLA:2018a], p. 266. Vegeu també els assenyats comentaris de Vitrac a [VITRAC:1994], p. 36–39.

[39]Llibre V, definició 3, [PLA:2018a], p. 266.

Vegeu la incongruència tan enorme que hi ha entre la necessitat del concepte de raó —a la qual hem de recórrer perquè no disposem de la mida de les magnituds— i aquesta definició que fa menció explícita de la mida existent entre les magnituds que han d'estar en una certa raó.

I, en qualsevol cas, en un intent clarificador, diu: «hi ha raó, si hi ha arquimedianitat».[40]

Fins aquí aquesta primera reflexió relativa al concepte de nombre en l'antiguitat egípcia i mesopotàmica i al pensament lògicodeductiu grec. En la mentalitat oriental, el nombre és la mida de les coses —i ho seguirà sent, encara que hagi de ser una mida aproximada. A la Grécia clàssica cal recórrer a la teoria de la proporció, en la qual es perd el referent a la unitat i, de retruc, qualsevol referència al concepte de nombre.[41]

4 Un resultat realment notable de la matemàtica egípcia

Si bé és cert que el text matemàtic més conegut i complet de la matemàtica egípcia és el famós papir Rhind,[42] nosaltres parlarem d'un resultat concret del papir de Moscou.[43]

Ens referim al problema 14, en el qual l'escriba:

> Dona l'algorisme que cal per calcular el volum del tronc d'una piràmide de base quadrada.[44]

[40] És la definició 4 del llibre V [Pla:2018*a*], p. 266. Diu:

> **Definició**. *Diem que dues magnituds tenen una certa raó, l'una amb l'altra, quan hi ha un múltiple d'una d'elles que sobrepassa l'altra.*

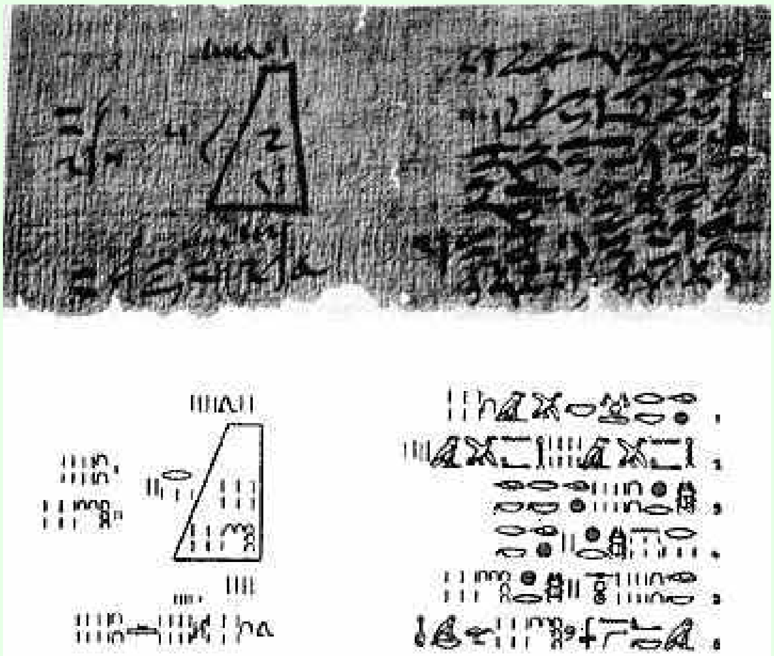
[41] Per a un estudi més complet de l'evolució de la concepció numèrica, vegeu, per exemple, [Dhombres:1978], capítols 1 i 2, p. 19–110.

[42] Aquest papir deu el seu nom a A. Henry Rhind que el va comprar a Luxor l'any 1858. Després el va cedir al British Museum, on es troba actualment, llevat d'un tros que és al Museu de Brooklin. És una còpia realitzada per l'escriba Ahmés pels volts el 1650 aC. L'original caldria datar-lo entre el 2000 i el 1800 aC. Està escrit en escriptura hieràtica —la que usaven els escribes en els seus documents— més cursiva que no pas la jeroglífica —molt més pròpia dels monuments. Té 18 peus de llargada i 1 d'amplada i conté més de vuitanta problemes, la majoria dels quals són problemes concrets, molt quotidians. L'objectiu, com dèiem, és «descobrir els misteris ocults».

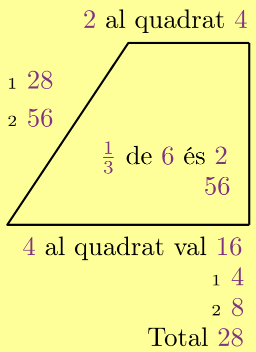
[43] Data probablement del 1850 aC. Actualment es troba al Museu de Belles Arts de Moscou. Està escrit en hieràtic i té 18 peus de llargada, dels quals se'n conserven només una quarta part. L'any 1893, Wladimir Golenischeff el va comprar a Tebes a un membre de la família Abd el Rassoul, que deia haver-lo trobat a la necròpoli de Dra Abou'l Naggai. L'autor és desconegut. El papir conté 25 problemes de tipus pràctic.

[44] És un resultat realment notable i, molt més encara, si tenim en compte que els matemàtics babilònics, quan intenten de resoldre el mateix problema, donen, en ocasions, una expressió errònia. Tanmateix, sorprèn que en cap dels papirs que ha arribat a les nostres

La figura mostra el text contingut al papir i la traducció jeroglífica. La traducció catalana és a sota.[45]



Problema 14 del papir de Moscou amb una traducció en jeroglífic



Exemple de càlcul d'un tronc de piràmide.
Si algú et diu: «Heus ací una piràmide d'altura 6, base 4 i sostre 2»,
fes:
El quadrat de 4, que val setze.
El doble de 4; el resultat és 8.[46]
El quadrat de 2, que és 4.
Afegeix el 16, el 8 i el 4.
El resultat és 28. Has de prendre una tercera part de 6, que és 2.
Pren dues vegades 28. El resultat és 56.
Així doncs el resultat és 56.
El que has fet és correcte.

---

mans hi ha cap problema que demani el volum de la piràmide. Hi ha, en canvi, problemes que demanen la inclinació —*sket*— o pendent.

[45] A l'actualitat disposem de la traducció a l'anglès, amb comentaris i notes, dels papirs matemàtics més importants: papirs Rhind, de Moscou, Kahun, [Clagett:1999], p. 113–204, 205–237, 239–248.

[46] El doble de 4 resulta de multiplicar les dues bases, una de les quals val 2.

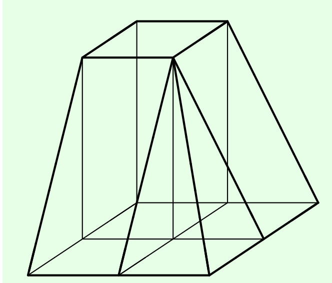
L'escriba simplement aplica la fórmula següent:

$$\boxed{V = \tfrac{1}{3}h\bigl(a^2 + ab + b^2\bigr),}$$

que contrasta amb la resolució mesopotàmica.[47]

Es planteja naturalment la qüestió de quina manera havien aconseguit trobar aquesta fórmula per aconseguir el valor del volum del tronc de piràmide.

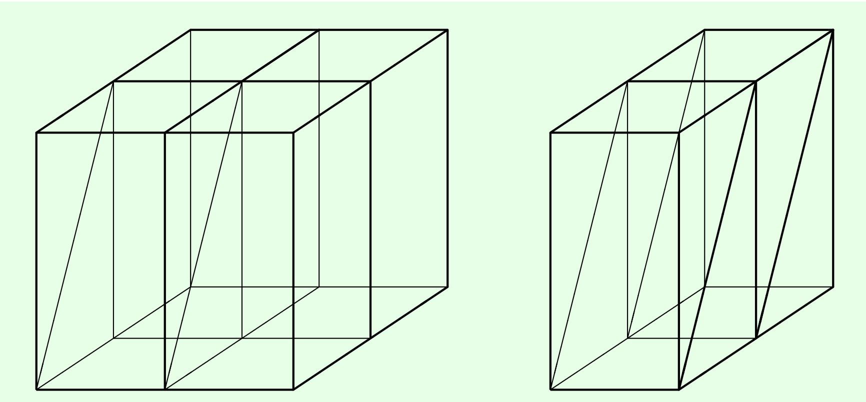
Per explicar-ho seguirem el mètode exposat per Cassina, en el qué suposa, com succeeix al papir de Moscou, que la superfície d'una base és quatre vegades la de l'altra.[48]



Tronc de piràmide

És clar que tres vegades el tronc de piràmide proporciona tres paral·lelepípedes, sis mitjos paral·lelepípedes i tres piràmides.

Els tres paral·lelepípedes i dos mitjos paral·lelepípedes proporcionen un volum de $a^2\,h$, els quatre mitjos paral·lelepípedes restants proporcionen $a\,b\,h$. Queden les tres piràmides que, d'acord amb la fórmula del papir, proporcionen un volum total igual al del paral·lelepípede $b^2\,h$.



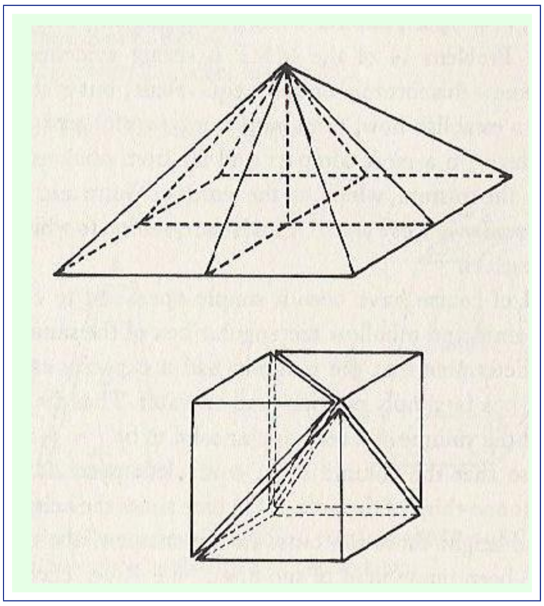
[47] Vegeu [Waerden:1961], 75–76, i 81; [Pla:2016a], p. 104–106.

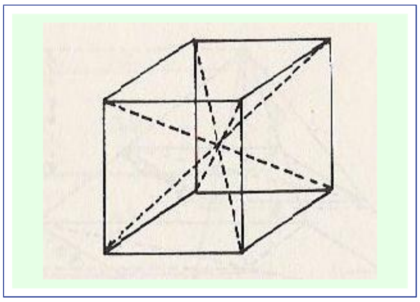
La fórmula més corrent era la simple generalització del cas del trapezi; és a dir, $V = \frac{1}{2}h\bigl(a^2 + b^2\bigr)$. [Pla:2016a], p. 239.

[48] [Cassina:1942]. Val a dir que aquest mètode és fàcilment generalitzable al cas general, com palesa [Waerden:1961], p. 35–36.

Hi ha d'altres descomposicions, com ara les que podem trobar a [Gillings:1972], p. 180–193 i, en particular, p. 187–193.

La qüestió és, doncs, aclarir si tres piràmides fan un paral·lelepípede. Però això, en el cas general, no és fàcil. Tanmateix hi ha certs exemples senzills que, com ara els següents, fan que sigui plausible:



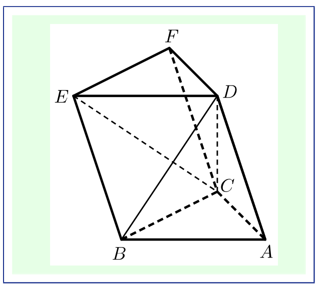


En aquests exemples tan particulars, veiem que tres piràmides de base quadrada i altura igual al costat de la base fan un cub, i que sis piràmides de base quadrada i altura la meitat del costat fan un cub de costat igual a la base de la piràmide.

De fet, Euclides a la Proposició 7 del llibre XII dels *Elements* estableix el resultat següent:

> **Teorema.** *Un prisma triangular descompon en tres piràmides triangulars congruents.*[49]

La demostració és, aparentment, simple, com podem constatar observant la figura adjunta. Les piràmides $CABD$ i $CEDB$ tenen la mateixa altura (la distància de C a la cara $ABED$) i com a bases les dues meitats del paral·lelogram $ABED$. Anàlogament, les piràmides $DCBE$ i $DECF$ tenen la mateixa altura (la distància de D a la cara $BEFC$) i com a bases les dues meitats del paral·lelogram $BEFC$.

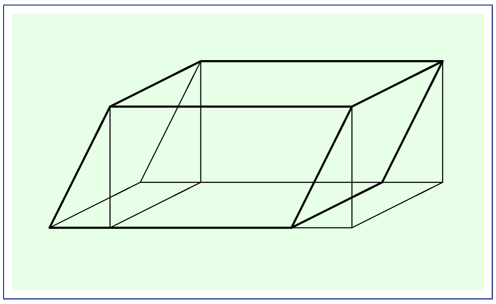


[49] [Pla:2018*b*], p. 512.

El problema, però, consisteix a demostrar un teorema estereomètric anàleg al que Euclides ha establert per als paral·lelograms i els triangles.[50] És a dir, basat en la metodologia tangram.

De fet és fàcil veure que hi ha teoremes anàlegs pel que fa als paralel·lepípedes.[51]

Aleshores, seguint l'analogia amb el cas pla (pàgina 12), cal reduir el volum de la piràmide a la del paralel·lepípede. El volum del paral·lelepípede, com sintetitzem en la figura adjunta, està determinat per la base i l'altura.[52]



Però, el lligam entre piràmides i paral·lelepípedes és molt més complex que el que hi ha entre paral·lelograms i triangles.

Cal demostrar el teorema anàleg al que regeix en el cas dels triangles:

Teorema. *Les piràmides triangulars —i, de retruc, totes les piràmides poligonals— que tenen la mateixa altura són com les seves bases.*[53]

Aleshores, de fet, tot rau en una propietat de «descomposició» de les piràmides triangulars que és la que permet aplicar el mètode d'exhaustió i la doble reducció a l'absurd:

Teorema. *Tota piràmide triangular descompon en dues piràmides iguals i semblants a la inicial i en dos prismes equivalents.*[54]

Usant el punts mitjans de les sis arestes Euclides descompon una piràmide triangular en dues piràmides $DHKL$ i $HAEG$ iguals entre si i semblants a l'original i en dos prismes triangulars $BFKEGH$ i $CFGLHK$ equivalents.

Observa que, atès que cada prisma conté una piràmide igual a $DTKL$, resulta que els primes són més de la meitat de la piràmide original.

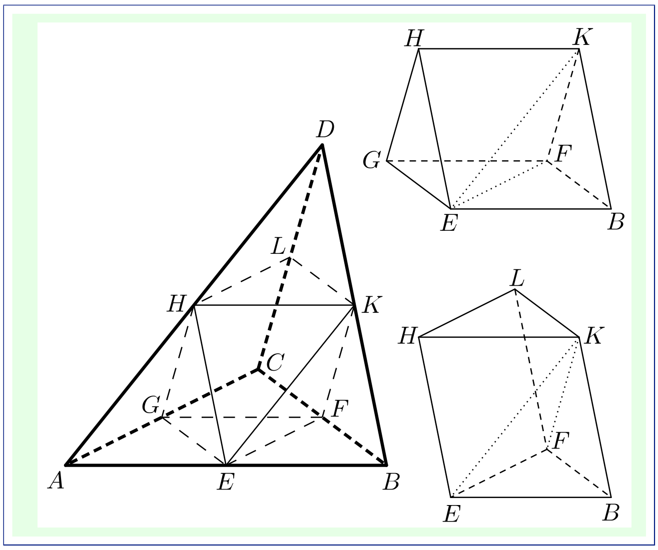
[50] Proposicions 41 i 45. [Pla:2018*a*], p. 140 i 145–147.

[51] Són les proposicions 25, 31, 32, 33 i 34 del llibre XI dels *Elements*. [Pla:2018*b*], p. 464–466 i 472–483.

[52] [Irem:1993], p. 59–62.

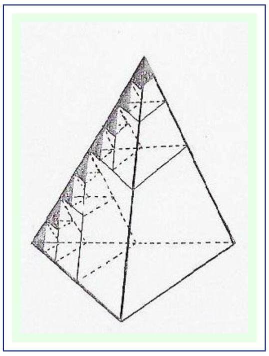
[53] Llibre XII, proposicions 5 i 6. [Pla:2018*b*], 508–512.

[54] Llibre XII, proposició 3, [Pla:2018*b*], p. 505–505.



Ara tot és a punt per a fer la demostració del teorema pel mètode grec d'exhaustió:[55]

Teorema. *Si Π, Π' són dues piràmides que tenen la mateixa altura i bases respectives B i B', aleshores $\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{B}{B'}$.*[56]



Suposem que $\frac{\Pi}{\Pi'} < \frac{B}{B'}$. Aleshores existeix un sòlid $\Xi < \Pi'$ que satisfà $\frac{\Pi}{\Xi} = \frac{B}{B'}$.[57] Ara, en la piràmide Π', reiniciem, una vegada i una altra, la descomposició usant els punts mitjos de les arestes de les dues piràmides petites.

Aconseguirem una figura com l'adjunta. Si ajuntem els prismes que anem obtenint que, cada cop valen més de la meitat de la piràmide corresponent, per exhaustió, obtindrem un volumen Σ' tal que $\Pi' - S' < \Pi' - \Xi$. D'on: $\Sigma' > \Xi$.

[55] Recordem que, en la metodologia grega, l'«exhaustió» estableix que

Donades dues magnituds Γ i Δ, si de Γ en sostraiem més de la meitat, del que queda més de la meitat i repetim el procés, amb un nombre finit de passos, aconseguirem una magnitud més petita que Δ.

És la primera proposició del llibre x. [Pla:2018*b*], p. 210–212.

[56] És el teorema de la pàgina anterior expressat de manera més simbòlica.

[57] Tanmateix, aquesta existència —que podríem acceptar per continuïtat basant-nos en la propietat de «valor mitjà»— Euclides no la justifica. Només l'afirma i l'usa.

Ara fem el mateix dins la piràmide Π. Els prismes construïts dins Π i Π' són el mateixos en nombre i tots tenen les mateixes altures.[58] Els seus volums són, dos a dos, com les seves bases i, de retruc, que les bases de les piràmides.

Això val per a les sumes Σ i Σ' dels prismes corresponents.

En definitiva, podem escriure

$$\boxed{\frac{\Sigma}{\Sigma'} = \frac{B}{B'} = \frac{\Pi}{\Xi}.}$$

Per tant,

$$\boxed{\frac{\Sigma}{\Pi} = \frac{\Sigma'}{\Xi}.}$$

Però, el sòlid Σ està inclòs en Π. És a dir, $\Sigma < \Pi$. De la darrera igualtat en resulta que $\Sigma' < \Xi$, en contradicció amb la desigualtat anterior. Per tant no pot ser que $\frac{\Pi}{\Pi'} < \frac{B}{B'}$.[59]

Així, la pretesa igualtat queda demostrada. Per tant, tres vegades una piràmide és igual al prisma de la mateixa base i altura i l'expressió del tronc de piràmide de l'escriba egipci és correcta.

De bell nou, hem anat de la resolució numèrica simple i directa, típica de la matemàtica oriental, a la demostració rigorosa de la regla usada en el càlcul concret, fruit indiscutible de la racionalitat grega. Però, com és preceptiu en la racionalitat grega, hem evitat l'infinit. Ho hem fet, però, usant el recurs de la demostració indirecta: el «mètode de reducció a l'absurd».

* * *

Ara bé, els matemàtics xinesos —i, en particular, Liu Hui— havien aconseguit calcular el volum d'una piràmide.[60]

---

[58] És la proposició 32 del llibre XI. [PLA:2018b], p. 434–435.

[59] De forma anàloga, Euclides refuta l'altra desigualtat: $\frac{\Pi}{\Pi'} > \frac{B}{B'}$.

L'anàlisi que fa Beppo Levi d'aquesta demostració és realment interessant: la lliga a la quadratura de la paràbola d'Arquimedes. Però, Levi fa una mica de trampa perquè interpreta la proposició XI, 33, que estableix que «la relació dels volums dels paral·lelepípedes semblants és com la raó triplicada de la seves arestes», en termes numèrics afirmant que el més petit de dos paral·lelepípedes de raó $\frac{1}{2}$ té amb el primer una raó de $\frac{1}{8}$. Aleshores, el volum de la piràmide correspon a la suma de la sèrie $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots$.[LEVI:1947] edició de 2001, p. 201–202. Però aquesta manera de pensar els volums no és pròpia de la manera de pensar i fer d'Euclides.

[60] Vegeu [WAGNER:1979], p. 168–170.

D'entrada havien observat que una piràmide i una mena de tascó donaven un paral·lelepípede triangular.

A la vista d'aquesta descomposició, resulta que només cal demostrar el teorema següent:

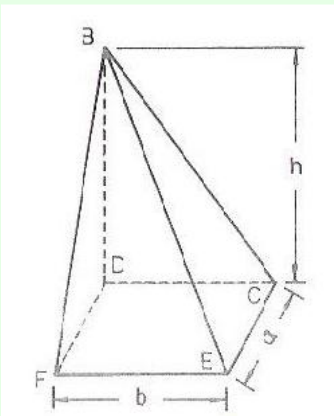
Teorema. *El volum de la piràmide és dues vegades el volum del tascó.*[61]

Liu Hui

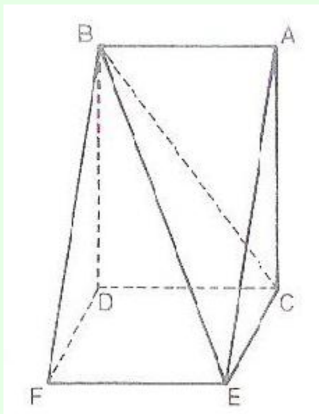
Wei 220–Xina 280

Per veure-ho va necessitar descompondre el tascó i la piràmide tal com mostra la figura de la pàgina següent que dona la descomposició de la piràmide i el tascó.[62]

Aleshores, si observem la figura anterior, veiem que, en la descomposició de la piràmide i del tascó, els dos parel·lelepípedes del tascó $GAILMJ$ i $ILMJPC$ valen la meitat que els tres parel·lepípedes de la piràmide: $HILKDRON$, $KLONQF$ i $LIROCP$. Si iterem el procés amb els tascons $BGIL$ i $LMPE$ i amb les piràmides $BHILK$ i $LOPEQ$ i després tornem a iterar, resulta que efectivament el volum de la piràmide és el doble que el volum del tascó.[63]



Piràmide



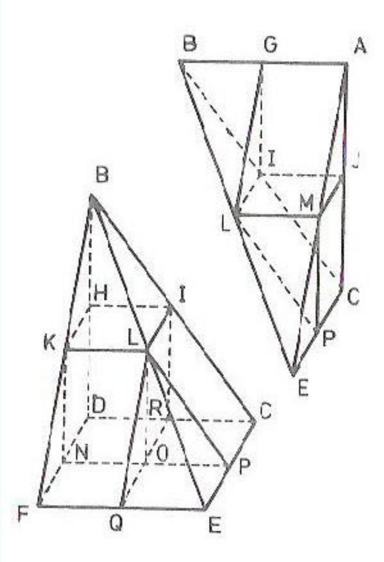
Piràmide i tascó

[61] Vegeu [Wagner:1979], p. 171–172.

[62] És obvi que el volum del paparel·lelepípede piràmide+tascó val $\frac{1}{2}ab\,h$.

[63] De fet, el volum del paral·lelepípede, suma de $GAILMJ$ i $ILMJPC$, val $\frac{1}{8}ab\,h$. D'on el volum del tascó val $\frac{1}{8}ab\,h(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots)=\frac{1}{8}\frac{4}{3}ab\,h=\frac{1}{6}ab\,h$ i el volum de la piràmide $\frac{1}{3}ab\,h$ i junts, com era d'esperar, valen $\frac{1}{2}ab\,h$.

Per a una exposició detallada del càlcul de volums en la matemàtica xinesa, consulteu [Kangshen:1999], p. 251–306.



Descomposició de la piràmide i del tascó

Això obligava Lui Hui a realitzar una descomposició a l'infinit. Per tal d'aconseguir allò que buscava —el volum de la piràmide— fa el raonament següent:

> *Subdividint més i més arribem a romanents molt petits, però els sòlids molt petits no tenen forma. Per qué preocupar-nos, doncs, d'ells?*[64]

En definitiva, els romanents massa petits són menyspreables, i obtenim allò que volíem.[65]

En el matemàtic xinès no hi ha l'*horror infiniti* que hi ha a la matemàtica grega clàssica hereva dels plantejaments —limitacions— imposats per Aristòtil.[66]

*   *   *

A la vista d'aquests càlculs del volum de la piràmide,[67] queda oberta una pregunta:

64[Wagner:1979], p. 173.

65És la manera que té d'establir la convergència de la série.

66[Pla:2016*b*], p. 348–351, i 588–595. És realment interessant el text.

67I de molts d'altres que hem omés. Vegeu [Irem:1993], p. 59–62.

És possible fer una descomposició finita de la piràmide, tal com succeïa amb el triangle?

Aquesta és, de fet, la pregunta que planteja David Hilbert al problema tercer de la célebre conferència *Els problemes futurs de la matemàtica* l'any 1900 a París. En síntesi demana:

Donats dos tetraedres de bases i altures iguals, és possible descompondre'n un amb un nombre finit de peces de manera que un cop tornades a compondre no donin l'altre?[68]

La resposta, no gens simple, la dona el deixeble de Hilbert, Max Dehn, el mateix any 1900:

David Hilbert
[Könisberg 1862–Göttingen 1943]

Max Dehn
[Hamburgg 1878–Mountain 1952]

Un tetraedre regular no es pot descompondre en un cub, ni tampoc en un tetraedre rectangle i isòsceles del mateix volum.
I encara més: hi ha una infinitat de parelles de tetraedres que no són equidescomposables.[69]

Així, més de dos mil anys després de les demostracions d'Euclides i de Liu Hui, queda establert de forma definitiva que no és possible calcular el volum d'una piràmide de forma elemental.[70]

[68] [Hilbert:1900], traducció castellana, a [Gray:2000], p.277.
[69] [Dehn:1902].
[70] Vegeu [Irem:1993], p. 59–62, i [Gray:2000], p. 109–112. Per a una exposició més tècnica, vegeu [Boltianskii:1978].

Referències

[Aristòtil:1994] Aristòtil. *Metafísica*, a cura de T. Calvo Martínez. Biblioteca Editorial Gredos. Madrid, 1994. En línia, en castellà, traducció de P. d'Azcárate, <http://www.cervantesvirtual.com/obra-visor/metafisica--0/html/>.

[Barzun:2001] Barzun, Jacques (2001). *From Dawn to Decadence. 500 Years of Western Cultural Life. 1500 to the Present*. Traducció castellana d'E. Rodríguez i J. Cuéllar, *Del amanecer a la decadencia. 500 años de vida cultural en Occidente (de 1500 a nuestros días)*. Madrid: Grupo Santillana de Ediciones, S. A.

[Becker:1959] Becker, Oskar (1959). *Grässe und Grenze der mathematischen Denkweise*. Verlag Karl Albert GmbH, Freiburg-München. Traducció castellana de M. de Guzman, *Magnitudes i l?mites del pensamiento matemàtico*. Madrid: Ediciones Rialp.

[Benito:2007] Benito, Manuel; Fernández, Emilio; Sánchez, Mercedes (2007). *Diofanto de Alejandría. La aritmètica y el libro Sobre los números poligonales*. Madrid: Nivola.

[Benoit:1992] Benoit, Paul; Chemla, Karine; Ritter, Jim (1992). *Histoire des fractions, fractions d'histoire*. Basilea: Birkhäuser.

[Boltianskii:1978] Boltianskii, V. G. (1978). *Hilbert's Third Problem*, traduït per R. A. Silverman. Nova York: Winston and Sons.

[Boyer:1949] Boyer, Carl B. (1949). *The History of the calculus and its conceptual deveolpment*. Nova York: Dover Publications.

[Cassina:1942] Cassina, Ugo (1942). «Sula geometria egiziana». *Periodico di matematica*, **22**, 1–29.

[Chemla:1992] Chemla, Karine; Shuchun, Guo. *Les Neufs Chapitres*. París: Dunod.

[Clagett:1999] Clagett, Marshall (199). *Ancient Egyptian Science. A Source Book*, tercer volum. Filadelfia: American Philosophical Society.

[Dehn:1902] Dehn, Max (1902). «Ueber der Rauminhalt». *Mathematische Annalen*, **55**, p. 465–478.

[Dhombres:1978] Dhombres, Jean (1978). *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire*. París: Cedic/Fernand Natha

[Diofant:1959] Diofant d'Alexandria (1959). *Aritmètica*. Edició castellana, [Benito:2007] (2 volums); anglesa, [Heath:1910]; francesa, [Eecke:1959].

[Eecke:1959] Eecke, Paul ver (1959). *Les six livres arithmètiques*. París: Librairie Blanchard.

[Euclides:1970] Euclides (1970). *Elements* (Στοιχεῖα). Edició catalana, [Pla:2018*a*] i [Pla:2018*b*]; castellana, [Vera:1970] o [Puertas:1991]; anglesa, [Heath:1925]; francesa, [Vitrac:1990]; i italiana, [Frajese:1970]. [En línia, en diverses llengües, <http://euclides.org/menu/elements_cat/indexeuclides.htm>]

[Frajese:1970] Frajese, Attilio i Macchioni, Lamberto (1970). *Gli Elementi*. Torino: Utet.

[Gillings:1972] Gillings, Richard J. (1972), *Mathematics in the Timr of the Pharaons*. Cambridge. Massachusetts: MIT Press.

[Gray:2000] Gray, Jeremy J. (2000). *The Hilbert Challenge*. Oxford: Oxford University Press. Oxford. Traducció castellana de Javier García Sanz, *El reto de Hilbert*. Crítica. Barcelona, 2003.

[Heath:1910] —— (1910). *Diophantus of Alexandria*. Cambridge University Press. Cambridge.

[Heath:1894] Heath, Thomas L. (1894). *The Works of Archimedes, Edited in Modern Notation*. Cambridge: Cambridge University Press. [Reeditat per Dover Publishing, Inc., *The Works of Archimedes* i *The Method of Archimedes*. Nova York. 2002]

[Heath:1925] —— (1925). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Toronto, Canadà: General Publishing Company, Ltd. [Reeditat per Dover Publications. Nova York, 1956, en 3 volums. Edició de la traducció, sense notes, en un volum, *Euclid's Elements*. Ann Arbor, Michigan. Green Lion Press, 2002. Reeditat el 2003 i 2007. En línia, a <http://en.wikisource.org/wiki/The_Elements_of_Euclid>]

[Heath:1931] —— (1931). *A Manual of Greek Mathematics*. Oxford: The Clarendon Pres. [Reeditat l'any 1963, amb el títol *Greek Mathematics*. Dover, Inc. Nova York]

[Hilbert:1900] Hilbert, David. «Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900». *Göttinger Nachrichten*, 1900, p. 253-297; i *Archiv der Mathernatik una Physik*, volum 1 (1901), p. 44-63 i 213-237. En línia, a <https://de.wikipedia.org/wiki/Hilbertsche_Probleme#Geschichte>. Traducció anglesa de M. Winston Newson, a [Hilbert:1901], i castellana, a [Gray:2000], p. 263–314.

[Hilbert:1901] —— (1901). «Mathematical Problems. Lecture delivered before the international Congress of Mathematicians at Paris in 1900». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8 (1902), p. 437-479. En línia, a <http://www.ams.org/journals/bull/1902-08-10/home.html>.

[Irem:1993] I.R.E.M. (1993). *Histoire des problemes. Histoire des mathématiques*. París: Edition Marketin.

[Joseph:1991] Joseph, George Gheverghese (1991). *The crest of the peacock: Non-European Roots of Mathematics*. Londres:World Scientific.

[Kangshen:1999] Kangshen, Shen; Crossley, John N.; Lun, Anthony W.-C. (1999). *The Nine Chapters on the Mathematical Art*. Oxford: Oxford University Press.

[Levi:1947] Levi, Beppo (1947). *Leyendo a Euclides*. Rosario. Reeditat per Libros de Zorzal. Argentina, 2001.

[Mechskowski:1961] Mechskowski, Herbert (1961). *Denkeweisen großer Mathematiker*. Vieweg & Son. Braunswick.

[Nou Capítols:2002] —— (2002). *Les Neufs Chapitres.* Edició anglesa, [Kangshen:1999]; francesa, [Chemla:1992].

[Pla:2010a] —— (2010a). *Una aproximació* [εἰσαγωγή] *a la filosofia de la matemàtica grega des d'un punt de vista matemàtic*: *De Tales de Milet als 'Elements' d'Euclides.* Barcelona: Societat Catalana de Filosofia. Institut d'Estudis Catalans.

[Pla:2016*a*] —— (2016*a*). *Història de la matemàtica. Egipte i Mesopotàmia.* Barcelona: IEC.

[Pla:2016*b*] —— (2016*b*). *Història de la matemàtica. Grècia I. De Tales i Pitàgores a Plató i Aristòtil.* Barcelona: IEC.

[Pla:2018*a*] —— (2018*a*). *Història de la matemàtica. Grècia II a. Els Elements* (Στοιχεῖα) *d'Euclides: llibres i, ii, iii, iv, v i vi.* Barcelona: IEC. [Pendent de publicació]

[Pla:2018*b*] —— (2018*b*). *Història de la matemàtica. Grècia II b. Els Elements* (Στοιχεῖα) *d'Euclides: llibres vii, viii, ix, x, xi, xii i xiii.* Barcelona: IEC. [Pendent de publicació]

[Pla-Viader:1999] Pla Carrera, Josep i Viader i Canals, Pelegrí. (1999). *René Descartes. Geometria*, introducció, traducció i notes. Barcelona: Publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans.

[Plató:1931] Plató (1931-2011). *Diàlegs.* Barcelona: Bernat Metge.

[Plató:1966] Plató (1966-1969). *Obras completas.* Madrid: Aguilar S. A. de ediciones. Vegeu també [Plató:1931].

[Puertas:1991] Puertas, María Luisa (1991). *Elementos. Libros* i-iv. Madrid: Gredos. [Introducció de Luis Vega; traducció i notes de María Luisa Puertas Castaños]

[Vera:1970] Vera, Francisco. (1970). *Científicos griegos.* Madrid: Aguilar. [2 volums]

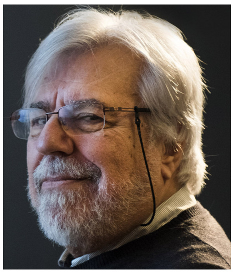
[Vitrac:1990] Vitrac, Jean (1990). *Euclide. Les Éléments. Livres* i *à* iv. París: puf.

[Vitrac:1994] —— (1994). *Euclide. Les Éléments. Livres* v *à* ix. París: puf.

[Waerden:1961] Waerden, Bartel Leenert van der (1961). *Science Awakening*. Oxford University Press. Nova York.

[Waerden:1983] —— (1983). *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Springer-Verlag. Berlín.

[Wagner:1979] Wagner, Donald Blackmore (1979). «An early chinese derivation of the Volume of a Pyramid: Liu Hui, Third Century A.D.». *Historia mathematica* (1979), 6, p. 164-188. En línia, a <https://ac.els-cdn.com/0315086079900764/1-s2.0-0315086079900764-main.pdf?_tid=bc0ee98e-df4e-11e7-bf20-00000aacb35f&acdnat=1513091671_42f101eb5c179ea9ab2a0c63b426e9e6>.



Professor emèrit
Universitat de Barcelona

Publicat el 20 de juny de 2018