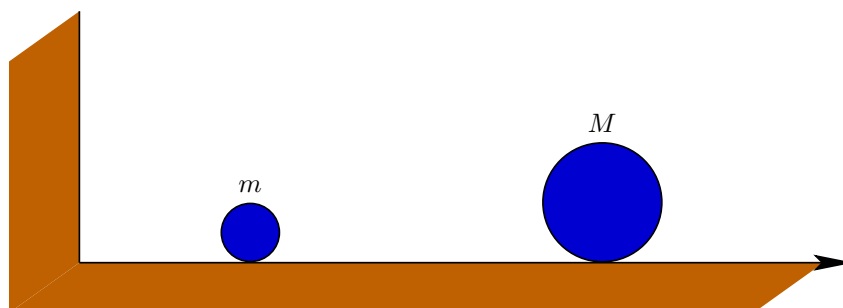


Xocs i el número π

Miquel Dalmau Vilaldach
Jordi Saludes Closa

1 Els fets

Considerem dues masses puntuals m i M que es mouen sense fregament sobre un terra horitzontal amb una paret a l'esquerra, així com es mostra a la figura que segueix. Les masses han estat dibuixades com a boles només amb finalitat descriptiva:



En l'estat inicial del sistema la massa puntual m és en repòs i la massa puntual M es mou cap a l'esquerra amb una certa velocitat. Suposem que totes les col·lisions (tant les bola-bola com les bola-paret) són totalment elàstiques. Això ens diu que hi ha conservació de l'energia a totes les col·lisions, que es conserva el moment lineal en les col·lisions bola-bola, i que en les col·lisions bola-paret la velocitat de m s'inverteix. Val a dir que no tindrem en compte efectes gravitacionals entre boles, ni relativístics.

Demostrem el resultat següent:

Teorema. Si $\frac{M}{m} = 10^{2k}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, el nombre total de col·lisions $N(k)$ és finit i , o bé coincideix amb, o bé és superior en una unitat al número natural format per les $k + 1$ primeres xifres decimals de π (tenint en compte el 3).

Així, per exemple, si $M = m$ hi hauria 3 col·lisions (M amb m , m amb la paret i finalment m amb M). Si $M = 100m$ n'hi hauria 31, si $M = 10^4 m$ s'en produirien 314, i així successivament.

És interessant remarcar, a més, que la segona eventualitat és molt excepcional ja que en aquest cas hi hauria d'haver una seqüència de $k - 1$ dígits 9 començant al lloc $k + 2$ en el desenvolupament decimal de π . (Fet que, pel que coneixen els autors, no s'ha trobat a π).

Aquest resultat va aparèixer primer a l'article *Dynamical billiard system for the number π* de G. Galperin [1] l'any 2001, exposat més extensament a *Playing pool with π (the number π from a billiard point of view)* del mateix autor [2] (2003) i, recentment, ha aparegut [5] tractant aquest mateix tema. La demostració que segueix, però, és diferent.

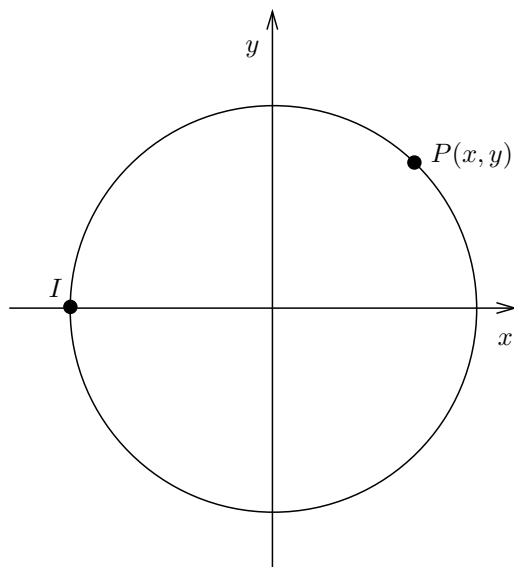
2 L'escena

Podem suposar que $m = 1$ (això és pensar la massa puntual m com unitat de massa). Les velocitats es consideren negatives si estan dirigides cap a l'esquerra i positives si ho estan cap a la dreta. Si les velocitats de les boles M i $m = 1$ són respectivament v_1 i v_2 , descriurem l'evolució del sistema en les coordenades $x = \sqrt{M} v_1$, $y = v_2$ (és a dir que en tindrem prou considerant les velocitats i ometrem les posicions). Representarem (x, y) en eixos cartesianes.

(i) L'energia cinètica del sistema és

$$E = \frac{1}{2}(M(v_1)^2 + (v_2)^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

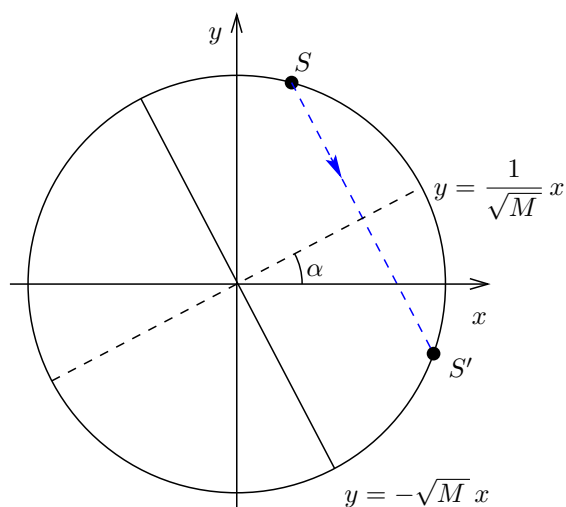
i aquesta magnitud es conserva. Això ho interpretem dient que $P = (x, y)$ rau a la circumferència de radi $\sqrt{2E}$. Hem posat en el gràfic següent l'estat inicial I (bola interior en repòs, bola exterior amb velocitat negativa):



- (ii) La conservació del moment en col·lisions bola-bola ens diu que el moment lineal del sistema

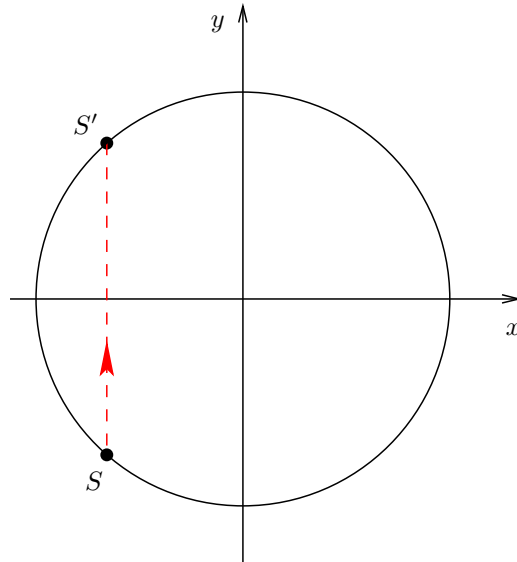
$$p = M v_1 + v_2 = \sqrt{M} x + y,$$

pren el mateix valor abans i després de la col·lisió. Dit d'una altra forma, $P = (x, y)$ rau a la recta $y = -\sqrt{M} x + p$ abans i després de la col·lisió. Tenint en compte (i) veiem que en el xoc bola-bola es produeix una transició $S \rightarrow S'$ com la representada en la figura següent:

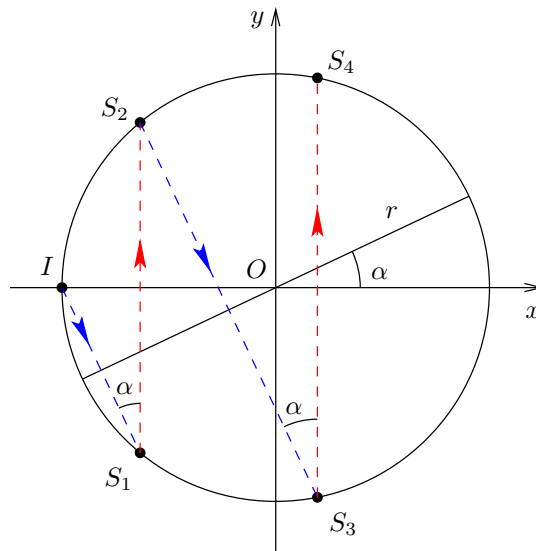


on hem dibuixat la recta $y = \frac{1}{\sqrt{M}} x$ que és l'eix de la reflexió $S \rightarrow S'$.

- (iii) Finalment en xocs bola-paret la velocitat de la bola de massa 1 canvia de signe; la transició $S \rightarrow S'$ és una reflexió respecte l'eix Ox .



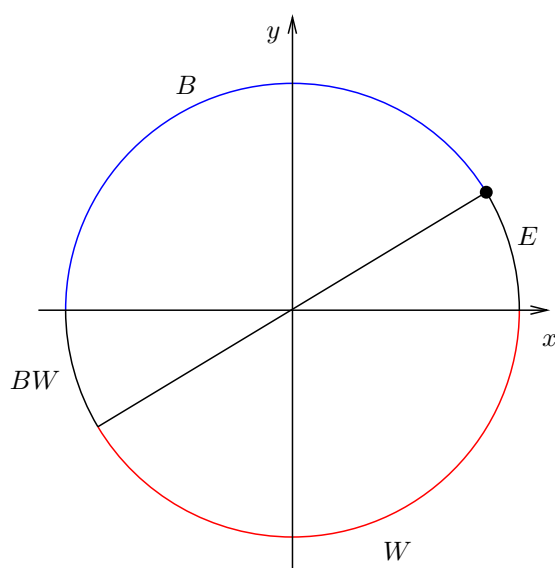
Segons el que hem vist, l'evolució del sistema a partir de l'estat inicial I és com es mostra en la figura següent:



Notem que la composició de les dues simetries axials és un gir de centre O i d'angle -2α . En efecte, l'angle $\widehat{IS_1S_2}$ veu l'arc IS_2 sota un angle α ; aquest arc vist des del centre és abastit per un angle doble, $\widehat{IOS_2} = 2\alpha$. El

mateix s'aplica a les altres parelles de simetries. Dit d'una altra forma, cada parell de col·lisions partint de I ve representat per un gir d'angle -2α amb $\alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{M}}$.

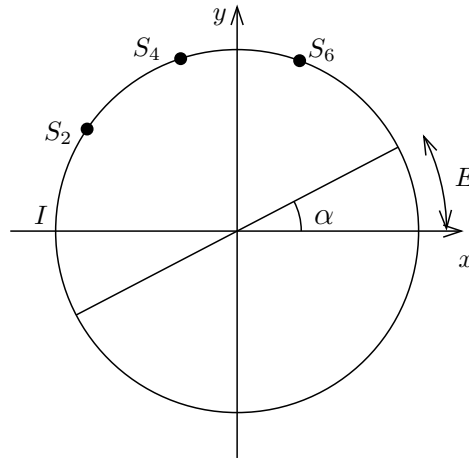
D'altra banda remarquem que els arguments precedents divideixen la circumferència d'energia constant en quatre sectors:



A B està en camí una col·lisió bola-bola; a W es produirà una col·lisió bola-paret; E és el sector d'escapament: si el punt P entra a E ja no hi haurà més xocs; a BW els dos tipus de xoc són possibles, però no tenim prou informació per a saber quin d'ells es produirà.

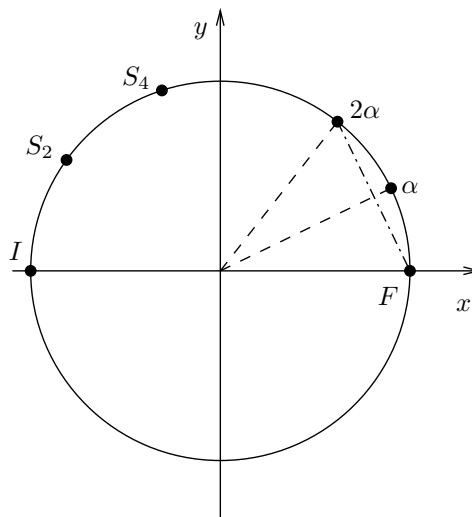
3 Nombre de col·lisions

És clar que sempre que $v_2 < 0$ hi haurà una col·lisió de la bola de massa 1 amb la paret. Per tant, a fi que no hi hagi més col·lisions, ha de ser $0 \leq v_2$. Llavors veiem que, per evitar una nova col·lisió amb l'altra bola, la bola de massa 1 ha d'anar cap a la dreta amb velocitat major (o igual) que v_2 , és a dir que s'ha de complir $v_2 \leq v_1$. Per tant hem de tenir $0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{M}} x$, que és el sector d'escapament E , on no hi ha més xocs, mostrat en la figura següent:



Demostrem que P , el punt representatiu de les velocitats, sempre entra a la regió E i comptem N , el nombre total de col·lisions. És clar que després d'un cert nombre n de *rotacions* d'angle -2α el punt representatiu entrarà en el sector angular $[0, 2\alpha)$. Distingim quatre casos:

- (i) Hi ha un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\pi - n2\alpha = 0$



Al cap de $n - 1$ rotacions, el punt P representatiu de les velocitats del sistema estarà al punt de coordenada angular 2α . Una col·lisió més durà P a F ; per tant el nombre total de xocs, és $2n - 1$ i tenim $N = \frac{\pi}{\alpha} - 1$.

- (ii) Hi ha un $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \pi - n2\alpha < \alpha$:

$$2n < \frac{\pi}{\alpha} < 2n + 1$$

P estarà a la regió d'escapament E i no hi haurà més col·lisions. $N = 2n = \lfloor \frac{\pi}{\alpha} \rfloor$ (els claudàtors indiquen la part entera).

(iii) Hi ha un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha < \pi - n2\alpha < 2\alpha$:

$$2n + 1 < \frac{\pi}{\alpha} < 2n + 2$$

Un xoc més durà P a la regió d'escapament E . Per tant $N = 2n + 1 = \lfloor \frac{\pi}{\alpha} \rfloor$.

(iv) Després de n rotacions el punt representatiu P ocupa la posició angular α , és a dir $\pi - n2\alpha = \alpha$. En aquest cas $N = 2n = \frac{\pi}{\alpha} - 1$.

Resumint, el nombre total de xocs és $N = \lfloor \frac{\pi}{\alpha} \rfloor$, excepte quan $\frac{\pi}{\alpha}$ és un enter positiu o nul, en el qual cas $N = \frac{\pi}{\alpha} - 1 = \lfloor \frac{\pi}{\alpha} \rfloor - 1$.

Ara bé, d'aquestes excepcions en realitat només n'hi ha una, quan $k = 0$, és a dir quan les dues masses són iguals. En aquest cas tenim $\alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{M}} = \arctan 1 = \pi/4$. El nombre de xocs és $N = \frac{\pi}{\alpha} - 1 = 3$ que és el primer decimal de π .

I no hi ha cap altre d'excepció perquè si p, q són nombres naturals diferents $\frac{1}{\pi} \arctan \frac{p}{q}$ no és un nombre racional (vegeu [3] o [4]), és a dir que $\frac{180}{\pi} \arctan \frac{p}{q}$ no és racional. Aplicat al nostre cas en què $M = 10^{2k}$ resulta que $\frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\arctan 10^{-k}}$ no és racional.

4 Relació del nombre de xocs amb π

Si $M = 10^{2k}$, $k = 1, 2, \dots$ hem vist que el nombre de xocs és $N(k) = \lfloor \frac{\pi}{\arctan 10^{-k}} \rfloor$.

De la sèrie alternada $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ deduïm, d'una banda que $\arctan x < x$ si $x > 0$, i d'una altra que $\lim_{x \rightarrow 0} (\arctan x - x) = 0$. En conseqüència, per a x petit $\arctan x \approx x$; en particular si $x = 10^{-k}$ és raonable considerar l'aproximació

$$\frac{\pi}{\arctan 10^{-k}} \approx \frac{\pi}{10^{-k}}$$

Suposem primer que les parts enteres coincideixen:

$$N(k) = \lfloor \frac{\pi}{\arctan 10^{-k}} \rfloor = \lfloor \pi 10^k \rfloor$$

Escrivint

$$\pi = a_0.a_1a_2\dots a_k a_{k+1} \dots$$

veiem que

$$N(k) = \lfloor \pi 10^k \rfloor = a_0 a_1 a_2 \dots a_k$$

i el nombre de xocs per a $M = 10^{2k}$ dona les $k + 1$ primeres xifres decimals de π (començant per 3).

Ara bé, les parts enteres de dos números prou propers poden diferir, però només en una unitat; examinem aquest cas. Atès que $\arctan x < x$ haurà de ser

$$N(k) = \lfloor \frac{\pi}{\arctan 10^{-k}} \rfloor = \lfloor \pi 10^k \rfloor + 1$$

Ara el nombre de xocs serà

$$N(k) = \lfloor \pi 10^k \rfloor + 1 = a_0 a_1 a_2 \dots a_k + 1$$

que ens donaria, en principi, només k xifres decimals de π (la darrera no seria bona). Però, a més, si $a_k = 9$ aleshores són errònies les dues darreres xifres decimals; i si hi ha ℓ nous (9) les $\ell + 1$ darreres xifres decimals no són bones.

Ara mostrarem com la no igualtat de parts enteres és un fet rar (si és que es produeix). Veiem primer que per a $x > 0$ es té $\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} < x$ o, equivalentment, $(1+x^2) \arctan x - x > 0$. La funció $f(x) = (1+x^2) \arctan x - x$ té derivada $f'(x) = 2x \arctan x > 0$ i satisfà $f(0) = 0$; això prova la desigualtat. Per a $x = 10^{-k}$ és

$$\frac{\pi}{\arctan 10^{-k}} - \frac{\pi}{10^{-k}} < \pi 10^{-k}$$

Atès que

$$\pi 10^k < \lfloor \pi 10^k \rfloor + 1 = \lfloor \frac{\pi}{\arctan 10^{-k}} \rfloor < \frac{\pi}{\arctan 10^{-k}}$$

usant la desigualtat

$$\lfloor \pi 10^k \rfloor + 1 - \pi 10^k < \pi 10^{-k}$$

És a dir

$$\begin{aligned} \lfloor \pi 10^k \rfloor + 1 - \pi 10^k &= a_0 a_1 \dots a_k + 1 - a_0 a_1 \dots a_k \cdot a_{k+1} \dots = \\ &= 1 - 0.a_{k+1} a_{k+2} \dots < \pi 10^{-k} < 10^{-k+1} \end{aligned}$$

i

$$10^{k-1} - a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{2k-1} \cdot a_{2k} \dots < 1$$

que ens diu que $a_{k+1} = a_{k+2} \dots = a_{2k-1} = 9$. En el cas de π aquesta possibilitat és molt poc probable i menys si considerem k grans.

Referències

- [1] G. Galperin. *Dynamical billiard system for the number π* . *Mathematicheskoye Prosvschenye* 3: 137–138, 2001.
- [2] G. Galperin. *Playing pool with π (the number π from a billiard point of view)*. *Regular and chaotic dynamics* 8, n° 4, pp. 375–394, 2003. (DOI: [10.1070/RD2003v008n04ABEH000252](https://doi.org/10.1070/RD2003v008n04ABEH000252))
- [3] J. M. H. Olmsted. *Discussions and Notes: Rational Values of Trigonometric Functions*. *Amer. Math. Monthly* 52, n° 9, pp. 507–508, 1945. (DOI: [10.2307/2304540](https://doi.org/10.2307/2304540))
- [4] D. O. Shklarsky, N. N. Chentzov i I. M. Yaglom. *The USSR Olympiad problem book*, Dover, N.Y. 1993. Problema 239 (b).
- [5] P. D. Weidman. *On the digits of π* . *Math. Intelligencer* 35, n° 4, pp. 43–50, 2013. (DOI: [10.1007/s00283-013-9393-5](https://doi.org/10.1007/s00283-013-9393-5))



miquel.dv@gmail.com

jordi.saludes@upc.edu

Dep. Matemàtica Aplicada 2

UPC

Publicat el 20 de juny de 2014