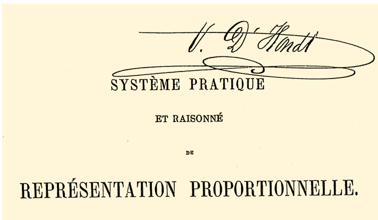
*MAT*$^2$

**MATerials MATemàtics**
Volum 2013, treball no. 4, 34 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

# La regla de Jefferson - d'Hondt i les seves alternatives

**Xavier Mora**

Quina és la lògica de la regla de d'Hondt? És veritat que afavoreix els partits més grans? En quin sentit? Quin paper hi juga la mida de les circumscripcions? Quin és l'efecte d'excloure els partits que no assoleixen un mínim concret, com ara el 3%? Quines alternatives hi ha? En aquest article mirarem de respondre a aquestes preguntes des de la lògica rigorosa de les matemàtiques.


SYSTÈME PRATIQUE
ET RAISONNÉ
DE
REPRÉSENTATION PROPORTIONNELLE.

## 1 El problema

**1.1** En termes generals, el problema de la representació proporcional es pot plantejar així: Una **societat** vol elegir un conjunt de **representants** on les diverses opinions i punts de vista hi estiguin presents en la mateixa proporció que a tota la societat; com s'ha de procedir?

> El 1789, mesos abans de la Revolució Francesa, Honoré Gabriel Riquetti, comte de Mirabeau, ho comparava amb la representació que un mapa fa d'un territori [21].

Per concretar el llenguatge, ens referirem al conjunt de representants com a **parlament,** i als seus membres com a **diputats.** El parlament consta d'un cert nombre d'**escons,** els quals seran ocupats per les persones que siguin elegides com a diputats. A fi d'elegir-les, es demana a cada membre de la societat, més exactament a cada **elector**, que expressi les seves preferències al respecte de diversos **candidats** preestablerts. La qüestió que ens interessa és la manera de fer aquesta consulta i de determinar quins candidats resulten elegits com a representants.

Tradicionalment, els diversos punts de vista i opinions a reflectir es concreten en uns determinats **territoris**, també anomenats 'circumscripcions' o 'districtes', i uns determinats **partits** polítics. El problema s'acostuma a descompondre llavors en dues parts: En la primera es reparteixen els escons de tot el parlament entre els diferents territoris. En la segona es reparteixen els de cada territori entre els diferents partits.

Quan el problema es descompon en les dues parts esmentades, llavors convé vetllar per la proporcionalitat en totes dues. En la primera part, el repartiment territorial, es tracta en principi de buscar la proporcionalitat entre el nombre d'escons de cada territori i la seva respectiva **població**

> Dit això, tot sovint el repartiment territorial es desvia expressament de la proporcionalitat poblacional en el sentit d'igualar més la representació dels diferents territoris. Freqüentment, cada territori rep d'entrada un determinat nombre d'escons, i després es reparteix la resta segons la població. Un cas extrem el trobem en el País Basc espanyol, on els tres territoris que el composen es reparteixen el parlament per igual independentment de la seva població.
>
> En el cas de les Eleccions al Parlament de Catalunya, la desproporció més gran es dóna entre la circumscripció de Barcelona, on actualment un escó correspon a 46 141 electors (i a 65 285 habitants), i la de Lleida, on correspon a 20 036 electors (i a 29 491 habitants). Aquesta desviació respecte a la proporcionalitat és el resultat de la llarga interinitat d'una disposició transitòria de 1979 que ja s'apartava de la proporcionalitat.

En la segona part, el repartiment entre partits dins de cada territori, es tracta de buscar la proporcionalitat entre el nombre d'escons de cada partit i el **nombre de vots** que aquest hagi obtingut. Aquí estem suposant que cada elector es pronuncia per un partit i només un, tal com fem actualment en les eleccions al Parlament de Catalunya, en les del Congrés de Diputats d'Espanya i en les del Parlament Europeu. En totes elles utilitzem el sistema de **llistes tancades,** on els electors es limiten a escollir un partit, sense poder expressar cap preferència per uns o altres candidats concrets (a diferència d'altres possibilitats que esmentarem a l'epíleg (§ 8)

> En lloc de pronunciar-se per un partit, els electors poden optar també pel vot en blanc, el vot nul, o l'abstenció; tanmateix, cap d'aquestes "opcions" té efecte sobre el repartiment dels escons llevat del vot en blanc, el qual no aconsegueix altra cosa que dificultar l'obtenció de representació als partits minoritaris.

> El plantejament precedent té com a premissa que el nombre d'escons del parlament està fixat. Alternativament, es pot deixar que varií i fixar en

canvi la quantitat de vots que dóna dret a un diputat. A cada candidatura li corresponen llavors tants diputats com el resultat de dividir el nombre de vots per la quantitat estipulada i arrodonir després la xifra obtinguda. El més natural és arrodonir a l'enter més proper. Un sistema d'aquest tipus admet alhora candidatures d'àmbit local, associades a circumscripcions concretes, i d'àmbit regional o global. La mida del parlament resultant depèn de la participació i també —en menor grau— de la manera concreta en què els vots es reparteixin entre candidatures. Aquest sistema de "divisor prefixat" va ser recolzat per Henri Poincaré [*30*] (que en diu sistema de "nombre únic"). A finals del segle XVIII havia estat utilitzat per al repartiment territorial del congrés estatunidenc. En el context del repartiment entre partits va ser utilitzat a Alemanya durant el període 1919–1933.

**1.2** Tornem, però, al nucli del problema en la seva versió més senzilla. Tant en el cas del repartiment entre territoris segons la població, com en el cas del repartiment entre partits segons els vots obtinguts, el problema matemàtic a resoldre és el mateix: Es tracta de repartir un determinat nombre $n$ de **places** (els escons) entre $\ell$ **sectors** (territoris o partits) en proporció a uns **pesos** $\boldsymbol{w} = (w_i \mid i = 1, 2 \ldots \ell)$ que ens vénen donats (les corresponents poblacions o nombres de vots obtinguts). En altres paraules, voldríem trobar uns nombres $\boldsymbol{n} = (n_i \mid i = 1, 2 \ldots \ell)$ que complissin les condicions

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots = n, \tag{1}$$

$$\frac{n_1}{w_1} = \frac{n_2}{w_2} = \frac{n_3}{w_3} = \ldots \tag{2}$$

En principi, estem davant del clàssic problema de *repartiment proporcional*, el mateix que es presenta a l'hora de repartir els beneficis d'una companyia. És per això que la seva solució, que es remunta a l'antiguitat, es coneix clàssicament com a *regla de companyies* (*regula societatum* en llatí).

Així anomenada la trobem, per exemple, en la *Suma de la Art de Arismètica* de Francesc Santcliment (Barcelona 1482).

Aquesta regla és la següent:

$$n_i = n\, w_i / w, \tag{3}$$

$$\text{on} \quad w = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots \tag{4}$$

Els valors de $n_i$ donats per (3) els anomenarem **quotes exactes.** Aquestes s'obtenen a partir de les dades $w_i$ multiplicant-les pel **factor** $r = n/w$, o equivalentment, dividint-les pel **divisor** $q = w/n$.

Per a deduir (3–4) a partir de (1–2) només cal reescriure (2) en la forma

$$n_i = r\, w_i, \tag{5}$$

on $r$ designa la raó comuna que requereixen les igualtats (2), sumar totes les igualtats de (5), i aplicar la propietat distributiva al segon membre.

En el cas que ens ocupa, les dades $w_i$ són les poblacions dels territoris o bé els nombres de vots obtinguts pels partits. El factor $r$, que en la pràctica tindrà un valor molt inferior a la unitat, és la fracció d'escó que correspon a cada individu, habitant o votant. El divisor $q = 1/r$ és la quantitat de gent representada per un escó. Des del punt de vista dels territoris i partits, $q$ es pot veure com el preu, en habitants o vots, que costa cada escó.

Malauradament, en el tema de les eleccions polítiques la terminologia clàssica que acabem d'introduir competeix amb altres accepcions dels mateixos termes, la qual cosa pot ser bastant desorientadora. Així, el terme 'quota' s'utilitza també en un sentit afí al concepte de 'divisor' (§ 3). Per enredar-ho encara més, el terme 'divisors' s'utilitza també per a referir-se als 'llindars' d'arrodoniment que trobarem més avall (§ 4).

Tot i que més amunt hem apuntat una terminologia general —places, sectors i pesos— en el que segueix usarem normalment una terminologia específica d'un context o altre —escons, territoris o partits, poblacions o nombres de vots—. Això serà bo per a mantenir-nos al cas del que realment interessa.

**1.3** Apliquem tot això a un exemple concret. Suposem que hem de repartir $n = 10$ escons entre quatre partits que han obtingut respectivament els següents nombres de vots: $\boldsymbol{w} = (4560,\ 3010,\ 1660,\ 770)$.

En total hi ha $w = 10000$ vots, de manera que el divisor és $q = w/n = 1000$. Dividint les dades per aquest valor, obtenim les següents quotes exactes: $\boldsymbol{n} = (4.56,\ 3.01,\ 1.66,\ 0.77)$.

Tal com passa en aquest exemple, la major part de les vegades ens trobarem que les quotes exactes no són pas nombres enters. Tanmateix, els escons i diputats són en principi indivisibles. Què podem fer davant d'això?

**1.4** Encara que les quotes exactes no siguin nombres enters, sempre es pot assolir una proporcionalitat exacta assignant a cada escó, i per tant cada diputat, un pes adequat, proporcional a la població o nombre de vots que li corresponen. Així, en l'exemple de més amunt podríem assignar als quatre partits en qüestió respectivament $(4, 3, 2, 1)$ escons amb uns pesos respectius iguals a $(4.56/4,\ 3.01/3,\ 1.66/2,\ 0.77/1) = (1.14,\ 1.033,\ 0.83,\ 0.77)$.

Com és que no s'aplica una solució d'aquest estil, que donaria proporcionalitat perfecta? L'obstacle sembla ser la desigualtat que llavors s'estableix entre els diferents diputats del parlament. Aquesta desigualtat està en conflicte amb una tradició que es remunta als ancestrals consells d'ancians de les tribus i als antics consells de patricis de les ciutats.

Els mètodes que veurem a continuació treballen sota la restricció que tots els diputats han de tenir el mateix pes en el parlament. Dit d'una altra manera, que les quotes han de ser enteres. Dins d'aquesta restricció, la idea és minimitzar d'alguna manera les desviacions respecte a la proporcionalitat, que ja hem vist que llavors són inevitables.

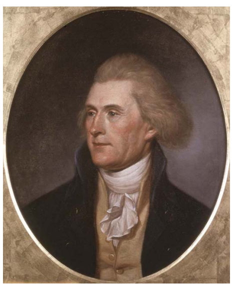
> Una desviació respecte a la proporcionalitat vol dir que no tots els electors obtenen la mateixa representació. Per tant, els mètodes que ens disposem a estudiar respecten la igualtat entre diputats a costa de sacrificar la igualtat entre electors.

**1.5** Considerem una vegada més l'exemple 1.3, en què les quotes exactes són $\boldsymbol{n} = (4.56,\ 3.01,\ 1.66,\ 0.77)$. Com hem d'arrodonir aquests nombres per tal de desviar-nos el menys possible respecte a la proporcionalitat?

La primera reacció a aquesta pregunta sol ser *assignar d'entrada tants escons com digui la part entera de la quota exacta, i després donar-ne un més als partits, o territoris, amb restes més grans.*

En l'exemple 1.3, les parts enteres de les quotes són $(4, 3, 1, 0)$, de manera que resten 2 escons, els quals són assignats a $i = 4$ i $i = 3$, els dos partits amb restes més grans. El repartiment final segons aquesta regla és doncs de $(4, 3, 2, 1)$ escons.

Aquesta manera de fer s'anomena regla de les **restes majors,** i va ser proposada el 1792 per Alexander Hamilton, un dels "pares fundadors" dels Estats Units d'Amèrica, amb motiu del repartiment territorial dels escons de la cambra baixa d'aquell país.


T. Jefferson
1743–1826

Davant d'aquesta proposta, Thomas Jefferson, un altre d'aquells pares fundadors, en va fer una altra que al seu parer era més fidel a l'esperit del principi de proporcionalitat: *Disminuir el valor del divisor $q$ fins que, en formar els quocients $w_i/q$ i arrodonir el seu valor per defecte, la suma dels nombres enters obtinguts sigui exactament $n$.*

En l'exemple 1.3, això s'aconsegueix prenent $q$ en l'interval $770 < q \leq 830$, la qual cosa resulta en $(5, 3, 2, 0)$ escons.

Aquesta regla és exactament la mateixa que al cap de noranta anys proposaria l'advocat belga Victor d'Hondt amb motiu del repartiment entre partits. D'acord amb això, d'ara en endavant en direm regla de **Jefferson - d'Hondt** .

**1.6** Entre Jefferson i d'Hondt hi va haver diversos autors que també van proposar la mateixa regla.

Així, Charles de Comberousse [8 : p. 185–186] la donava el 1860 —en una forma diferent però equivalent— per repartir el contingent militar d'un districte entre els seus diversos territoris en proporció a la seva població.

En el camp de les eleccions parlamentàries, la regla de Jefferson - d'Hondt va ser proposada el 1863 per Gustav Burnitz i Georg Varrentrapp [6], i el 1874 per François J. F. Cantagrel [7].

Burnitz i Varrentrap van arribar a l'algorisme habitual que de seguida veurem, associat a la taula (9), com a resultat de valorar la representativitat de cada candidat en funció del seu número d'ordre en la llista presentada per la seva candidatura i del nombre de vots obtinguts per aquesta.

En el pamflet de Cantagrel —que el 1880 va ser transformat en proposta de llei— l'exemple final mostra clarament que la idea és la mateixa que la de Jefferson i d'Hondt: disminuir el divisor fins que les parts enteres sumin exactament $n$.

També és de notar que, contràriament al que es diu tot sovint, en el seu treball preliminar de 1878 d'Hondt no proposava encara la regla que ara associem al seu nom, sinó la de les restes majors [9]. Segons reconeix després, l'advocat Charles de Brouwer li va fer veure que aquesta regla no era prou conseqüent amb el principi de proporcionalitat [10 : p. 14].

**1.7** Encara que a la pràctica és molt poc freqüent, de vegades hi pot haver empats que donin lloc a indecisions en l'aplicació d'una o altra regla. En tals casos admetrem múltiples solucions. Naturalment, a la pràctica correspondrà preveure com resoldre aquests casos; una possibilitat és fer-ho per sorteig.

Per exemple, suposem que hem de repartir 2 escons entre dos partits que han obtingut respectivament $\boldsymbol{w} = (1500,\ 500)$ vots. El divisor és $w/n = 2000/2 = 1000$, de manera que els dos partits tenen exactament la mateixa resta, 0.500. Per tant, la regla de les restes majors queda indecisa davant de dues possibilitats: $(2, 0)$ i $(1, 1)$.

Amb la regla de d'Hondt tenim un empat, per exemple, en repartir 2 escons entre dos partits que han obtingut respectivament $\boldsymbol{w} = (2000,\ 1000)$ vots. Per a $q > 1000$ les parts enteres de $w_i/q$ són $(1, 0)$, mentre que per a $q \leq 1000$ són $(2, 1)$, cap dels quals repartiments dóna un total de 2 escons.

Per tal de poder obtenir $\sum_i n_i = n$, resulta convenient redefinir la part entera d'un nombre real $z$ de manera que quan $z$ sigui enter s'admetin llavors tant el mateix valor $z$ com $z - 1$. Amb aquesta finalitat farem ús de la notació següent:

$$\llbracket z \rrbracket = \begin{cases} \text{l'enter més gran inferior a } z, & \text{si } z \text{ no és enter;} \\ \text{o bé } z \text{ o bé } z-1, & \text{si } z \text{ és enter.} \end{cases} \tag{6}$$

Equivalentment, $\llbracket z \rrbracket$ és qualsevol enter que satisfaci les desigualtats

$$\llbracket z \rrbracket \leq z \leq \llbracket z \rrbracket + 1 \tag{7}$$

Per parlar amb tota propietat hauríem de considerar $\llbracket z \rrbracket$ com un conjunt i escriure $k \in \llbracket z \rrbracket$ en lloc de $k = \llbracket z \rrbracket$; tanmateix, per als nostres propòsits serà suficient suposar que s'ha fet una elecció concreta del valor de $\llbracket z \rrbracket$ sempre que $z$ sigui enter.

## 2 Diverses formulacions equivalents de la regla de Jefferson - d'Hondt

En aquesta secció ens mirarem amb més deteniment la regla de Jefferson - d'Hondt.

Tal com hem vist més amunt, la seva idea bàsica és disminuir progressivament el valor del divisor $q$ fins a aconseguir que els nombres enters $n_i = \llbracket w_i/q \rrbracket$ sumin $n$. Això passarà tard o d'hora, tant en absència d'empats com també en la seva presència, gràcies a haver adoptat la definició (6). En efecte, per a cada $i$ el valor de $\llbracket w_i/q \rrbracket$ salta de $k-1$ a $k$ cada vegada que $w_i/q$ creua un valor enter positiu $k$. Considerem ara la suma respecte a $i$. Si els salts dels diferents sumands no són simultanis, llavors la suma recorre tots els valors enters (quan $q$ disminueix des de $\infty$ cap a 0), de manera que certament existeix algun valor de $q$ que dóna com a resultat el valor desitjat $n$. Si hi ha salts simultanis, llavors pot succeir que la suma passi d'un valor estrictament inferior a $n$ a un altre estrictament superior a $n$. En aquest cas caldrà quedar-nos amb aquest valor de $q$ i fer ús de la llibertat que dóna la definició (6) per a concretar els valors de $n_i = \llbracket w_i/q \rrbracket$ de manera que la seva suma sigui exactament $n$.

En qualsevol cas, l'objectiu desitjat s'aconsegueix prenent

$$q = \max \left\{ x \in (0, \infty) \,\middle|\, \sum_i \lfloor w_i/x \rfloor \geq n \right\} \tag{8}$$

on $\lfloor \cdot \rfloor$ representa la part entera en el sentit usual; aquest valor de $q$ és el més gran —i potser també el més petit— que permet aconseguir l'objectiu desitjat.

Tot això es pot representar geomètricament tal com mostra la figura 1, que és una adaptació de [17] i [20: p. 162–163] a les dades de l'exemple 1.3, a saber $\boldsymbol{w} = (4560, 3010, 1660, 770)$ i $n = 10$. Les abscisses representen nombres de vots i les ordenades escons. En la vertical d'abscissa $w_i$ hi hem marcat els punts que corresponen a un nombre enter d'escons. La regla de Jefferson - d'Hondt consisteix en prendre una semirecta que passi per l'origen i augmentar progressivament el seu pendent fins que deixi a sota seu exactament $n$ d'aquests punts. Per a $n = 10$ això s'aconsegueix amb la semirecta $OQ$. Aquesta queda sempre per sobre de la de proporcionalitat exacta, anomenada $OP$ en la figura, la qual té pendent $n/w$ i interseca la vertical d'abscissa $w_i$ en la quota fraccionària exacta $nw_i/w$.

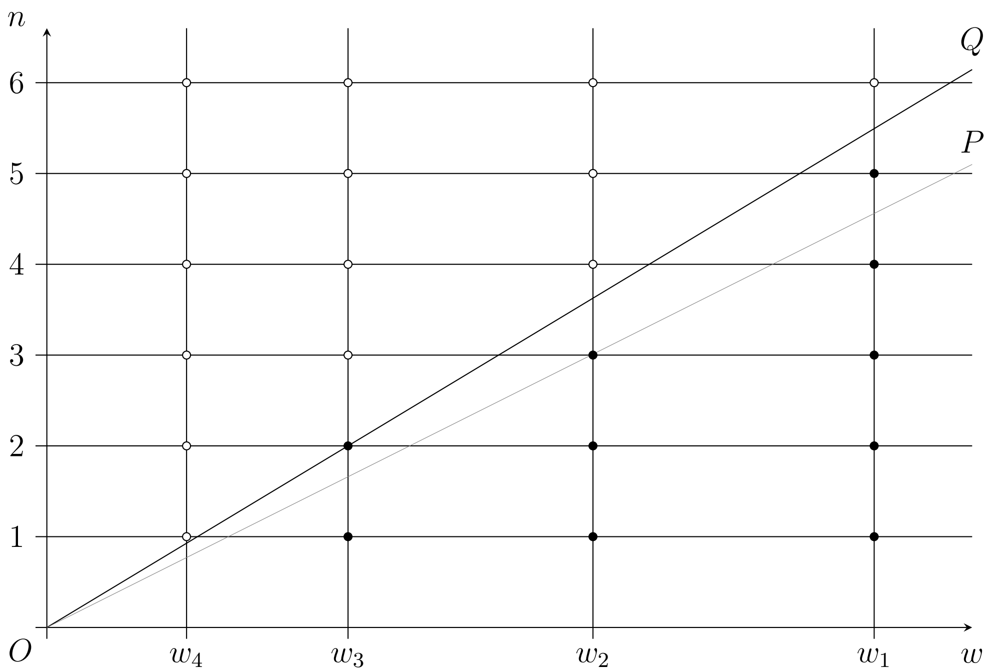



Figura 1. Representació geomètrica de la regla de Jefferson - d'Hondt.

El fet que, en disminuir el divisor $q$, el quocient $w_i/q$ creui un determinat valor enter positiu $k$ equival a dir que $q$ creua el valor $w_i/k$, (o que la semirecta $OQ$, de pendent $1/q$, creua el punt de coordenades $(w_i, k)$). Per tant, $\sum_i \llbracket w_i/q \rrbracket$ arribarà a valer $n$ quan $q$ hagi creuat els $n$ valors més grans de la forma $w_i/k$ amb $i = 1, 2, \ldots, \ell$ i $k = 1, 2, \ldots$, o millor dit, just quan arribi a l'$n$-èsim d'aquests valors (comptats amb la seva multiplicitat i permetent diverses possibilitats en el cas d'empats). Apareix així la formulació més coneguda de la regla de Jefferson - d'Hondt: Identifiquin-se els $n$ quocients més grans de la taula

$$\begin{array}{cccccc}
w_1/1 & w_2/1 & w_3/1 & \ldots & w_i/1 & \ldots \\
w_1/2 & w_2/2 & w_3/2 & \ldots & w_i/2 & \ldots \\
w_1/3 & w_2/3 & w_3/3 & \ldots & w_i/3 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
w_1/k & w_2/k & w_3/k & \ldots & w_i/k & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array} \tag{9}$$

i prengui's com a $n_i$ el màxim dels denominadors $k$ que acompanyen $w_i$ en aquest conjunt de quocients.

Així, en l'exemple 1.3 obtenim la taula següent, on hem indicat en negreta els 10 valors més grans, que donen el repartiment $(5, 3, 2, 0)$:

$$\begin{array}{llll}
\frac{4560}{1} = \mathbf{4560} & \frac{3010}{1} = \mathbf{3010} & \frac{1660}{1} = \mathbf{1660} & \frac{770}{1} = 770 \\[1ex]
\frac{4560}{2} = \mathbf{2280} & \frac{3010}{2} = \mathbf{1505} & \frac{1660}{2} = \mathbf{830} & \frac{770}{2} \\[1ex]
\frac{4560}{3} = \mathbf{1520} & \frac{3010}{3} = \mathbf{1003.3} & \frac{1660}{3} = 553.3 & \frac{770}{3} \\[1ex]
\frac{4560}{4} = \mathbf{1140} & \frac{3010}{4} = 752.5 & \frac{1660}{4} & \frac{770}{4} \\[1ex]
\frac{4560}{5} = \mathbf{912} & \frac{3010}{5} & \frac{1660}{5} & \frac{770}{5} \\[1ex]
\frac{4560}{6} = 760 & \frac{3010}{6} & \frac{1660}{6} & \frac{770}{6}
\end{array} \tag{10}$$

Noti's que si hi hagués més escons a repartir, el següent correspondria a la candidatura que ha rebut 770 vots. I el subseqüent aniria a parar novament a la de 4560 vots.

Això porta a la següent formulació recursiva: Per a $n = 0$, no hi ha altra possibilitat que $n_i = 0$ per a tota $i$. Els repartiments de $m = n + 1$ escons s'obtenen a partir dels de $n$ escons procedint de la manera següent:

$$m_i = \begin{cases} n_i + 1, & \text{per a una } i \text{ que maximitzi } w_i/(n_i + 1); \\ n_i, & \text{per a qualsevol altra } i. \end{cases} \tag{11}$$

Si el quocient $w_i/(n_i + 1)$ és maximitzat per més d'una $i$, llavors cadascuna d'elles dóna un repartiment admissible.

De la caracterització de $\llbracket\cdot\rrbracket$ per les desigualtats (7) se'n dedueix que la igualtat $n_i = \llbracket w_i/q \rrbracket$ equival a les desigualtats $w_i/n_i \geq q \geq w_i/(n_i+1)$. Donat que això és vàlid per a cada $i$, es compleix doncs la següent desigualtat:

$$\min_i \frac{w_i}{n_i} \geq \max_i \frac{w_i}{n_i+1}. \tag{12}$$

Recíprocament, si es compleix aquesta desigualtat, llavors qualsevol nombre real $q$ situat entremig dels dos membres de (12) resulta en la igualtat $n_i = \llbracket w_i/q \rrbracket$. Així doncs, la desigualtat (12) —junt amb la condició que les $n_i$ sumin $n$— constitueix una caracterització equivalent del repartiment de Jefferson - d'Hondt.

Una altra manera de mirar-s'ho és la següent: Els repartiments de Jefferson - d'Hondt maximitzen la quantitat

$$\min_i \frac{w_i}{n_i} \tag{13}$$

amb la restricció $\sum_i n_i = n$. Per quedar convençuts d'aquesta afirmació, es pot raonar de la manera següent: Suposem que $\boldsymbol{n}$ és un repartiment de Jefferson - d'Hondt i que $\boldsymbol{n'}$ és un altre repartiment diferent que també totalitza $n$ escons. Inevitablement es tindrà $n'_j \geq n_j + 1$ per a alguna $j$. Per tant, se'n dedueix que

$$\max_i \frac{w_i}{n_i+1} \geq \frac{w_j}{n_j+1} \geq \frac{w_j}{n'_j} \geq \min_i \frac{w_i}{n'_i}, \tag{14}$$

que combinat amb (12) demostra l'esmentat caràcter maximitzador del repartiment $\boldsymbol{n}$.

La implicació inversa és vàlida en absència d'empats: Si $\boldsymbol{n}$ maximitza la quantitat (13), i el mínim que apareix en aquesta expressió el realitza una sola $i$, llavors $\boldsymbol{n}$ és un repartiment de Jefferson - d'Hondt. En efecte, segons el que hem vist més amunt, si no fos així, s'incompliria (12), és a dir, existiria alguna $j$ amb $w_j/(n_j+1) > \min_i(w_i/n_i)$. Si aquest últim mínim el realitza una sola $i$, llavors se'n dedueix que la quantitat (13) augmenta estrictament si retirem un escó a aquesta $i$ i el donem a $j$, en contradicció amb el caràcter maximitzador de $\boldsymbol{n}$.

Però en presència d'empats no podem mantenir la mateixa afirmació. Per exemple, per a $\boldsymbol{w} = (2000, 1500, 1000)$ i $n = 3$ el repartiment $\boldsymbol{n} = (2, 0, 1)$ maximitza la quantitat (13) però no coincideix amb cap dels dos repartiments de Jefferson - d'Hondt: $(1, 1, 1)$ i $(2, 1, 0)$. En efecte, aquests tres repartiments donen respectivament les següents col·leccions de quocients $w_i/n_i$:

$$\begin{aligned}
(2,0,1) &\mapsto (1000, \ \infty \ , 1000), \\
(1,1,1) &\mapsto (2000, 1500, 1000), \\
(2,1,0) &\mapsto (1000, 1500, \ \infty \ ),
\end{aligned}$$

de manera que el quocient mínim és en els tres casos igual a 1000. Per tant, a més dels repartiments de Jefferson - d'Hondt, en aquest cas la quantitat (13) és maximitzada també per un altre repartiment.

Seguint amb aquest exemple, és interessant notar que els dos repartiments de Jefferson - d'Hondt tenen la virtut de maximitzar no solament el quocient mínim, sinó també el segon quocient més petit. D'altra banda, difereixen entre ells en la magnitud del tercer quocient més petit (que, havent-hi 3 partits, equival a dir el quocient més gran). En un d'ells, aquest tercer valor és igual a 2000, mentre que en l'altre és igual a $\infty$. Aquestes observacions condueixen al següent refinament dels resultats de més amunt:

Un repartiment $\boldsymbol{n}$ de $n$ escons és de Jefferson - d'Hondt si i només si maximitza la quantitat (13) i, a més, minimitza el nombre de sectors $i$ que realitzen el mínim que apareix a (13).

Per veure que els repartiments de Jefferson - d'Hondt tenen aquesta propietat només ens manca obtenir la segona part. Amb aquesta finalitat ens basarem en el punt de vista de seleccionar els $n$ quocients més grans de la forma $w_i/k$, on $i$ indexa els diversos sectors i $k$ recorre els enters positius. Suposem que ho hem fet així i que el darrer quocient seleccionat val $\xi$. Sigui $\mu \geq 1$ el nombre de vegades que hem inclòs aquest últim valor. Aquest nombre és certament inferior o igual al nombre $\nu$ de vegades que el valor $\xi$ està present en tota la taula. Si és inferior, llavors hi ha diverses maneres de seleccionar els $\mu$ últims quocients, però independentment d'això sempre passa que el valor $\xi$ apareix exactament $\mu$ vegades en els quocients seleccionats. D'altra banda, com que $\xi$ és el valor mínim, $w_i/k = \xi$ implica $k = n_i$. Per tant, també és cert que el valor $\xi$ apareix exactament $\mu$ vegades en els quocients $w_i/n_i$. En conseqüència, qualsevol repartiment de $n$ escons on aquests quocients tinguin un valor mínim igual a $\xi$, i incloguin més de $\mu$ vegades el valor $\xi$, no pot ser pas un repartiment de Jefferson - d'Hondt.

Ocupem-nos ara de la implicació inversa. Com abans, ho demostrarem per reducció a l'absurd partit del fet que si no fos certa la conclusió llavors existiria alguna $j$ amb $w_j/(n_j+1) > \min_i(w_i/n_i)$. Sigui $\xi$ el valor de la quantitat (13) i sigui $\mu$ el nombre de $i$ que realitzen el mínim de (13). Com abans, retirarem un escó a una d'aquestes $i$ —qualsevol d'elles anirà bé— i el donarem a $j$. Per a $\mu = 1$ ja hem vist que el repartiment resultant contradiu la hipòtesi que $\boldsymbol{n}$ maximitza la quantitat (13). Per a $\mu > 1$, llavors es contradiu la hipòtesi que $\boldsymbol{n}$ minimitza a més el nombre de $i$ que realitzen el mínim que apareix a (13). En efecte, en transferir dit escó resten $\mu - 1$ quocients iguals a $\xi$ i tots els altres són estrictament superiors, incloent $w_i/(n_i - 1)$ i $w_j/(n_j + 1)$.

En resum, la regla de Jefferson - d'Hondt està caracteritzada per cadascuna de les propietats recollides en el següent enunciat:

**Teorema 2.1.** *Siguin* $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_\ell)$ *uns nombres reals positius i* $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_\ell)$ *uns nombres enters no negatius restringits a sumar un valor donat* $n$*. Les següents condicions són totes elles equivalents:*

(a) *Existeix un nombre real positiu* $q$ *tal que* $n_i = [\![ w_i/q ]\!]$ *per a tota* $i$*.*

(b) $n_i$ *és el nombre de vegades que* $w_i$ *figura com a numerador en els* $n$ *quocients més grans de la forma* $w_i/k$ *amb* $i = 1, 2, \ldots, \ell$ *i* $k = 1, 2, \ldots$

(c) $\boldsymbol{n}$ *s'obté recursivament procedint de la manera següent: Per a* $n = 0$ *es posa* $n_i = 0$ *per a tota* $i$*. El pas de* $n$ *a* $n + 1$ *es fa assignant el nou escó a qualsevol sector* $i$ *que maximitzi la quantitat* $w_i/(n_i + 1)$*.*

(d) $\min_i w_i/n_i \geq \max_i w_i/(n_i + 1)$.

(e) $\boldsymbol{n}$ *maximitza la quantitat* $\min_i w_i/n_i$*, i a més, minimitza el nombre de sectors* $i$ *que realitzen el mínim que apareix en aquesta última expressió.*

El quocient $w_i/n_i$ es pot veure com el preu, en habitants o vots, que li costa cada escó al sector (territori o partit) $i$. Des d'aquest punt de vista, les desviacions respecte a la proporcionalitat no són més que diferències de preu entre els diferents sectors. La caracterització (e) de la regla de Jefferson - d'Hondt correspon doncs a dir que els sectors més afavorits siguin el menys afavorits possible, i que a més, el nombre d'aquests sectors sigui el més petit possible.

En el cas habitual d'absència d'empats entre els quocients $w_i/k$, aquesta caracterització, que aleshores es redueix al primer criteri que apareix en ella, va ser posada de relleu el 1901 per Léon Rouyer [*37*], i també el 1910 per Maurice Equer [*14*, *15*]. La caracterització general, vàlida en presència d'empats, es demostra, sembla que per primera vegada, a [*28*: Teor. 3.7].

# 3 El principi de Droop. Quota suficient i quota necessària per a obtenir un escó

**3.1** Considerem el cas extrem $n = 1$, és a dir, l'elecció d'un sol representant comú per a tothom. En aquest cas, la regla de d'Hondt certament atorga aquesta mena d'escó únic al partit més votat, diguem-ne $i$. Tanmateix, pot donar-se el cas que, entre els electors que han repartit els seus vots entre les altres opcions, n'hi hagi molts que se sentin totalment contraris a aquest partit $i$ més votat, i que aquests electors superin en nombre als que han donat el seu vot a dit partit $i$. És l'anomenada paradoxa de Borda [*26*]. Ara bé, aquesta possibilitat no existeix pas quan el partit més votat obté una majoria absoluta, és a dir, quan $w_i > w/2$. En efecte, aquesta desigualtat implica $w_i > w - w_i$, que assegura que els partidaris de $i$ superen al conjunt de possibles detractors de $i$. És per això que és tan acceptat el principi de la majoria: *Si $w_i > w/2$, llavors el càrrec de representant únic correspon a $i$.*

Quan en lloc d'un sol escó n'estem assignant $n$, llavors aquest principi es generalitza de la manera següent: Si $w_i > w/(n+1)$, llavors la candidatura $i$ ha de rebre almenys un escó. O més generalment: *Si $w_i > k_i\, w/(n+1)$ amb $k_i$ enter positiu, llavors la candidatura $i$ mereix almenys $k_i$ escons.* La raó de ser d'aquesta afirmació és que la condició que estem posant mai no atorga en total més de $n$ escons —sumant respecte a $i$ es veu de seguida que la desigualtat $\sum_i k_i \geq n+1$ implicaria $w > w$— i que, d'altra banda, $w/(n+1)$ és el mínim valor amb aquesta propietat —per a $q < w/(n+1)$ es pot tenir $w_i = q + \varepsilon$, amb $\varepsilon > 0$, per a $n+1$ partits $i$ diferents—.

Aquest principi va ser introduït per l'advocat anglès Henry Richmond Droop; en el cas particular $k_i = 1$ el va proposar el 1868 en el context del vot únic transferible [12]; el cas $k_i > 1$ apareix per exemple a [13 : p. 173]. La quantitat $w/(n+1)$ que en ser superada dóna dret a un escó es coneix com a **quota de Droop**; d'ara endavant nosaltres la denotarem $q_D$. Una altra manera d'enunciar el que a partir d'ara en direm **principi de Droop** és la següent: *Cada candidatura $i$ ha de rebre almenys tants escons com $\lfloor w_i/q_D \rfloor$, el quocient enter del seu nombre de vots $w_i$ per la quota de Droop $q_D = w/(n+1)$; si el residu d'aquesta divisió és nul, llavors es permet que la candidatura $i$ rebi un escó menys.*

El compliment d'aquest principi implica, en particular, la següent propietat de respecte a la majoria absoluta: Si $w_i/w > \frac{1}{2}$, llavors $n_i/n \geq \frac{1}{2}$; quan $n$ és parell, llavors la desigualtat de la hipòtesi no cal que sigui estricta; quan $n$ és senar, llavors la conclusió es compleix amb desigualtat estricta.

> També es pot considerar la implicació anàloga amb les desigualtats oposades, és a dir, que $w_i/w < \frac{1}{2}$, impliqui $n_i/n \leq \frac{1}{2}$. Tanmateix, ja es veu que no podem pretendre tenir ambdues implicacions alhora, ja que això correspondria a una proporcionalitat exacta que no és possible amb nombres enters (si més no quan $n$ és senar).

**3.2** La primera de les dues proposicions que segueixen assegura que la regla de Jefferson - d'Hondt compleix el principi de Droop: Una candidatura que supera la quota de Droop multiplicada per $m$ obté almenys $m$ escons. La proposició que ve després va en direcció contrària: Si no s'arriba a una altra quota concreta multiplicada per $m$, llavors el nombre d'escons és inferior a $m$. El primer resultat està lligat al nom d'Eduard Hagenbach-Bischoff, qui l'aplicava sistemàticament tot dividint les dades per la quota de Droop i utilitzant el resultat com a punt de partida del procediment recursiu d'assignació d'escons [18, 19]. Ambdós resultats van ser obtinguts per d'Hondt en el cas $m = 1$ [11]. Les demostracions que segueixen no són més que les respectives generalitzacions dels seus arguments.

**Proposició 3.1** (d'Hondt, 1883; Hagenbach-Bischoff, 1888)**.** *Si $w_i/w > m/(n+1)$, llavors la regla de Jefferson - d'Hondt dóna a la candidatura i almenys $m$ escons.*

*Demostració.* Sigui $q$ el divisor de d'Hondt, és a dir l'$n$-èsim valor més gran de la forma $w_j/k$ amb $j = 1, 2, \ldots, \ell$ i $k = 1, 2, \ldots$ Sumant les desigualtats $n_j \leq w_j/q$ respecte a $j \neq i$ s'obté que

$$n - n_i \leq \frac{w - w_i}{q}. \tag{15}$$

D'altra banda, de l'acotació inferior que estem suposant sobre $w_i$ se'n dedueix que $w - w_i < w\,(n - m + 1)/(n + 1)$, és a dir

$$\frac{w - w_i}{q_D} < n - m + 1, \tag{16}$$

on $q_D$ denota la quota de Droop $w/(n + 1)$. A partir d'aquí procedirem per reducció a l'absurd. Suposem que no tinguessim la desigualtat $n_i \geq m$, sinó la desigualtat contrària $n_i \leq m - 1$. Combinant-la amb (15) i (16) s'obté que $q < q_D$. Usant novament la hipòtesi d'acotació inferior de $w_i$, veiem doncs que tindríem $q < w/(n + 1) < w_i/m$. Però $q$ és el divisor de d'Hondt, que sabem que compleix $q \geq w_i/(n_i + 1)$. Per tant, se'n dedueix que $n_i + 1 > m$, és a dir $n_i \geq m$. □

**Proposició 3.2** (d'Hondt, 1883)**.** *Si $w_i/w < m/(n + \ell - 1)$, on $\ell$ denota el nombre de candidatures, llavors el nombre d'escons que la regla de Jefferson - d'Hondt dóna a la candidatura i és inferior a $m$.*

*Demostració.* Demostrarem la implicació contrarecíproca: Si $n_i \geq m$ llavors $w_i/w \geq m/(n + \ell - 1)$. Sigui $q$ el divisor de d'Hondt, és a dir l'$n$-èsim valor més gran de la forma $w_i/k$ amb $k = 1, 2, \ldots$. Sumant les desigualtats $w_j/q \leq n_j + 1$ respecte a $j \neq i$ s'obté que $(w - w_i)/q \leq n - n_i + \ell - 1 \leq n - m + \ell - 1$. D'altra banda, la hipòtesi que $n_i \geq m$ implica que $w_i \geq n_i q \geq mq$. Combinant a través de $q$ les dues desigualtats obtingudes, resulta que $(w - w_i)/(n - m + \ell - 1) \leq w_i/m$, d'on en surt que $w_i/w \geq m/(n + \ell - 1)$. □

**3.3** Posant $m = 1$, la Proposició 3.1 ens diu que la regla de Jefferson-d'Hondt exclou automàticament del repartiment qualsevol candidatura que no obtingui almenys $w/(n+\ell-1)$ vots. Tot i així, moltes institucions que utilitzen aquesta regla especifiquen directament un (altre) llindar concret que cal superar per tal d'optar a algun escó.

> Per exemple, la llei electoral espanyola requereix un mínim del 3% (Llei Orgànica 5/1985 de Règim Electoral General, art. 163). En la pràctica de les Eleccions Generals Espanyoles, aquest llindar addicional no és gaire més restrictiu que el llindar automàtic que acabem de veure. De fet, només és rellevant en circumscripcions grans, com ara Madrid i Barcelona, que en les darreres eleccions tenien respectivament $n = 36$, $\ell = 17$, $1/(n+\ell-1) = 1.9\%$ i $n = 31$, $\ell = 12$, $1/(n+\ell-1) = 2.4\%$. De tota manera, fins ara aquest llindar addicional no ha tingut mai cap efecte en les Eleccions Generals Espanyoles.
>
> No es pot dir el mateix de les Eleccions al Parlament de Catalunya, on el llindar del 3% actua de tant en tant en la circumscripció de Barcelona, que disposa de $n = 85$ escons.

# 4 Alternatives

**4.1** A diferència de la regla de restes majors, la de Jefferson-d'Hondt pot resultar en quotes $n_i$ que s'apartin en més d'una unitat respecte a la proporcionalitat exacta. A primera vista, aquest fet és indesitjable. Tanmateix, no és gens contrari a la proporcionalitat: Si una quota petita pot desviar-se de la proporcionalitat exacta en prop d'una unitat, aleshores una quota gran se n'ha de poder desviar encara més.

Un altre problema, més greu, de la regla de Jefferson-d'Hondt és que tendeix a afavorir els sectors grans a costa dels petits.

Aquests fets, que estudiarem amb més deteniment a la secció §7, van donar arguments als defensors de la regla de les restes majors, a la vegada que van motivar la recerca d'altres mètodes.

Així, el 1832 l'ex-president estatunidenc John Quincy **Adams** va proposar la regla següent [2: p. 26–28]: *Ajustar el valor del divisor $q$ de manera que les quotes resultants arrodonides per excés sumin exactament $n$.* Si no s'hi afegeix cap condició de mínim, aquesta regla implica que cada sector rep almenys un escó; l'única possibilitat que no fos així seria que el seu pes fos exactament zero. Aquesta manera de fer és força indicada per al repartiment territorial, que era el problema que considerava Adams.

Arran de la proposta d'Adams, Daniel **Webster**, que presidia una comissió del senat nord-americà dedicada al problema del repartiment territorial, va introduir una altra possibilitat [2 : p. 30–33]: *Ajustar el valor del divisor* $q$ *de manera que les quotes resultants arrodonides a l'enter més proper sumin exactament* $n$. Aquesta regla era equivalent a la que el 1910 proposaria André **Sainte Laguë** en el context del repartiment entre partits [39, 40].

**4.2** Les regles de Jefferson - d'Hondt, Adams, Webster - Sainte Laguë, i altres dues que van ser proposades respectivament per James Dean, el 1832 [2 : p. 29–30], i per Joseph A. Hill, el 1911 [2 : p. 47–49], són totes elles casos particulars dels anomenats **mètodes de divisor,** o de llindars (o de 'divisors').

Aquests mètodes consisteixen tots ells en el següent: *Ajustar el valor del divisor* $q$ *de manera que les quotes resultants* $w_i/q$*, després de ser arrodonides segons s'especifica a continuació, sumin exactament* $n$. L'arrodoniment $[\![z]\!]$ d'una quota $z$ es fa per excés o per defecte segons que $z$ superi o no un determinat llindar $s(k)$ que s'especifica entre cada dos enters consecutius $k-1, k$. És a dir,

$$[\![z]\!] = \begin{cases} k-1, & \text{si } k-1 \leq z \leq s(k); \\ k, & \text{si } s(k) \leq z \leq k. \end{cases} \tag{17}$$

Equivalentment, $[\![z]\!]$ és un enter $k$ tal que

$$s(k) \leq z \leq s(k+1). \tag{18}$$

Quan $z = s(k)$, llavors $[\![z]\!]$ admet tant el valor $k$ com $k-1$. Tot i que també són coneguts com a 'divisors', nosaltres ens referirem als nombres $s(k)$ ($k = 1, 2 \ldots$) com a **llindars d'arrodoniment.** En el que segueix suposarem que compleixen o bé $k-1 \leq s(k) < k$ per a tota $k$, o bé $k-1 < s(k) \leq k$ per a tota $k$; aquesta condició garanteix que si les quotes exactes són totes enteres llavors coincideixen amb les arrodonides [42 : Thm. 2].

> Seguint altres autors, numerem els llindars d'arrodoniment des de 1, i no des de 0, com fan Balinski i Young [2]. La correspondència entre ambdues notacions és $s(k) = d(k-1)$ per a tot enter $k \geq 1$.

Les cinc regles dalt esmentades corresponen respectivament a les següents eleccions dels llindars: Jefferson - d'Hondt: $s(k) = k$, el llindar màxim; Adams: $s(k) = k-1$, el llindar mínim; Webster - Sainte Laguë: $s(k) = k - \frac{1}{2}$, la mitjana aritmètica de $k$ i $k-1$; Dean: $s(k) = k(k-1)/(k-\frac{1}{2})$, la mitjana harmònica de $k$ i $k-1$; Hill: $s(k) = \sqrt{k(k-1)}$, la mitjana geomètrica de $k$ i $k-1$.

Qualsevol mètode de divisor admet una representació geomètrica similar a la de la figura 1. L'únic canvi a fer és que els punts que cal vigilar si queden o no a sota de la semirecta de pendent ajustable són els de coordenades $(w_i, s(k))$ amb $k = 1, 2, \ldots$ i $i = 1, 2, \ldots, \ell$. Com a § 2, es tracta d'ajustar el pendent de manera que la semirecta deixi a sota seu exactament $n$ d'aquest punts. En el cas particular de Jefferson - d'Hondt el pendent en qüestió és superior o igual a $n/w$, el pendent de la proporcionalitat perfecta, i en el cas d'Adams és inferior o igual a aquest valor, però en general pot ser tant superior com inferior.

Quan $s(1) = 0$, com passa amb els mètodes d'Adams, Dean i Hill, llavors $z > 0$ implica $[\![z]\!] \geq 1$, de manera que la condició $\sum_i [\![w_i/q]\!] = n$ no es pot satisfer si hi ha més de $n$ sectors amb $w_i > 0$. En aquest cas és raonable convenir que obté un escó cadascun dels $n$ sectors més grans. Això correspon a admetre valors infinits de diversos graus per a $q$. En relació amb això, en el que segueix convindrem en considerar $u/0 > v/0$ sempre que es tingui $u > v > 0$ (i $u/0 > v$ per a qualssevol $u, v > 0$).

Amb aquests convenis val, amb una demostració totalment anàloga, la següent generalització del Teorema 2.1, on hem afegit un apartat (f) que s'obté de manera molt anàloga a (e).

**Teorema 4.1.** *Siguin $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_\ell)$ uns nombres reals positius i $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_\ell)$ uns nombres enters no negatius restringits a sumar un valor donat $n$. Les següents condicions són totes elles equivalents:*

(a) *Existeix un nombre real positiu $q$ tal que $n_i = [\![w_i/q]\!]$ per a tota $i$.*

(b) *$n_i$ és el nombre de vegades que $w_i$ figura com a numerador en els $n$ quocients més grans de la forma $w_i/s(k)$ amb $i = 1, 2, \ldots, \ell$ i $k = 1, 2, \ldots$*

(c) *$\boldsymbol{n}$ s'obté recursivament procedint de la manera següent: Per a $n = 0$ es posa $n_i = 0$ per a tota $i$. El pas de $n$ a $n + 1$ es fa assignant el nou escó a qualsevol sector $i$ que maximitzi la quantitat $w_i/s(n_i + 1)$.*

(d) $\min_i w_i/s(n_i) \geq \max_i w_i/s(n_i + 1)$.

(e) *$\boldsymbol{n}$ maximitza la quantitat $\min_i w_i/s(n_i)$, i a més, minimitza el nombre de sectors $i$ que realitzen el mínim que apareix en aquesta última expressió.*

(f) *$\boldsymbol{n}$ minimitza la quantitat $\max_i w_i/s(n_i + 1)$, i a més, minimitza el nombre de sectors $i$ que realitzen el màxim que apareix en aquesta última expressió.*

Tal com comentàvem a continuació del Teorema 2.1, l'apartat (e) mostra que la regla de Jefferson - d'Hondt ($s(k) = k$) aconsegueix que els sectors més afavorits siguin el menys afavorits possible (i que el seu nombre sigui el més petit possible). Al seu torn, l'apartat (f) mostra que la regla d'Adams ($s(k) = k - 1$) aconsegueix la condició dual que els sectors menys afavorits siguin el més afavorits possible (i que el seu nombre sigui el més petit possible).

**4.3** Les regles que prenen $s(1) = 0$, com les d'Adams, Dean i Hill, donen un escó a $i$ sempre que es tingui $w_i > 0$ i hi hagi prou escons. Segons hem convingut més amunt, si el nombre de sectors $i$ amb $w_i > 0$ és superior al nombre d'escons, aleshores reben un escó, i només un, els $n$ sectors amb pesos $w_i$ més grans.

Aquestes regles poden ser adients en el context del repartiment territorial, però no en el context del repartiment entre partits, on són relativament freqüents els partits molt minoritaris. Aquests rebrien un escó a canvi de molts pocs vots, en tremenda desproporció respecte als partits més nombrosos.

La regla de Webster - Sainte Laguë, o dels llindars aritmètics $s(k) = k - \frac{1}{2}$, no té pas aquest defecte. Com amb la regla de Jefferson - d'Hondt, aquí no es pot obtenir un escó si no es reuneix un determinat nombre de vots. Més concretament, uns arguments ben bé anàlegs als de § 3.2 condueixen al següent resultat, que es pot trobar en el treball de Ladislaus von Bortkiewicz [5] (vegi's també [25]):

**Proposició 4.2** (Bortkiewicz, 1920)**.** *La regla de Webster - Sainte Laguë té les següents propietats, on $\ell$ denota el nombre de candidatures:*

(a) *Si $w_i/w > (m - \frac{1}{2})/(n - \frac{1}{2}\ell + 1)$, llavors la candidatura i obté almenys $m$ escons.*

(b) *Si $w_i/w < (m - \frac{1}{2})/(n + \frac{1}{2}\ell - 1)$, llavors la candidatura i no arriba a obtenir $m$ escons.*

## 5 Minimitzar la desigualtat

**5.1** La proporcionalitat perfecta consisteix en que els quocients $w_i/n_i$ siguin tots ells exactament iguals, i per tant iguals a $w/n$. Si no es pot assolir, tal com passa tot sovint degut a que els $n_i$ estan restringits a ser enters, llavors és natural fixar-se com a objectiu que aquests quocients siguin el "més iguals" possible.

Tanmateix, això admet diverses interpretacions.

Entre altres coses, no és el mateix buscar la igualtat dels quocients $w_i/n_i$ que la dels seus inversos $n_i/w_i$. Per exemple, no costa gaire de comprovar que per a $\boldsymbol{w} = (630, 230, 140)$ i $n = 10$ el repartiment $(6, 2, 2)$ és millor que $(7, 2, 1)$ en termes de la diferència màxima entre els quocients $w_i/n_i$, però el segon és millor que el primer en termes del mateix criteri aplicat als quocients $n_i/w_i$.

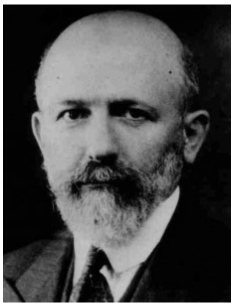
Davant d'això, s'imposa de reflexionar sobre el significat dels dos tipus de quocients per veure quins són els que realment interessa fer el més iguals possible. Clarament, el quocient $w_i/n_i$ ens diu quants electors corresponen a cada escó del partit $i$, i el quocient invers $n_i/w_i$ ens diu quants escons —usualment una fracció molt inferior a la unitat— corresponen a cada elector d'aquest partit. Podem dir, doncs, que el primer quocient mesura la càrrega o responsabilitat de representació de cada diputat del partit $i$, mentre que el segon mesura la quantitat de representació o influència en el parlament de cada elector d'aquest partit. D'aquests dos conceptes, sembla bastant clar que el que més mereix vetllar per la màxima igualtat possible és el segon: la representació o influència dels diversos electors en el parlament. Després de tot, són els diputats qui han d'estar al servei dels electors i no a l'inrevés. Per tant, els quocients que ens interessa que siguin el més iguals possible són $n_i/w_i$.

Dit això, l'objectiu de minimitzar la desigualtat dels quocients $w_i/n_i$ pot ser pertinent en altres contextos on el tractament equitatiu dels elegits sigui preferible al de tota la població. Aquest podria ser el cas del problema de repartiment de contingents militars que hem esmentat a § 1.6.

**5.2** Segons ja hem vist, les regles de Jefferson - d'Hondt i d'Adams compleixen sengles criteris propers a aquest punt de vista. Concretament, la regla de Jefferson - d'Hondt minimitza el màxim dels quocients $n_i/w_i$ mentre que la d'Adams en maximitza el mínim. A diferència del que hem vingut fent fins ara, aquí no ens expressem en termes del quocient $w_i/n_i$, sinó del seu invers $n_i/w_i$. Aquest últim mesura la quantitat de representació que obté cadascun dels electors que han votat el partit $i$. Així doncs, la regla de Jefferson - d'Hondt minimitza la representació dels electors més representats, mentre que la d'Adams maximitza la representació dels menys representats.

Tanmateix, cap d'aquests dos criteris és ben bé el mateix que minimitzar les diferències de representació entre electors. En aquest sentit es tractaria, en tot cas, de minimitzar la diferència entre la representació màxima i la mínima, és a dir la quantitat $\max_{i,j} |n_i/w_i - n_j/w_j| = (\max_i n_i/w_i) - (\min_i n_i/w_i)$. Aquest criteri va ser proposat el 1910 per Maurice Equer [14]. L'algorisme recursiu que proposa aquest autor no assoleix sempre l'objectiu desitjat, però sempre és possible resoldre el problema mitjançant algorismes més exhaustius. De tota manera, aquest criteri té l'inconvenient que fàcilment dóna lloc a molts repartiments diferents. Això es deu a que només es preocupa de la diferència més gran i no gens de les altres.

**5.3** Aquest problema que en podríem dir de manca de resolució desapareix amb un altre criteri que va ser proposat el mateix any 1910 per André Sainte Laguë [39, 40]. La seva proposta consisteix en minimitzar la suma dels quadrats de les diferències entre la quantitat de representació que obté cada elector i la que obtindria si la proporcionalitat fos perfecta. La representació que obté un elector que ha votat el partit $i$ és el quocient $n_i/w_i$ del nombre d'escons que rep aquest partit pel nombre d'electors que l'han votat. Si la proporcionalitat fos perfecta, tots aquests quocients serien iguals, i valdrien per tant $n/w$. Tenint en compte que el partit $i$ ha estat votat per $w_i$ electors, la proposta de Sainte Laguë consisteix doncs en trobar el repartiment $\boldsymbol{n}$ que minimitza la següent quantitat:


A. Sainte-Laguë
1882–1950

$$\gamma = \sum_i w_i \left( \frac{n_i}{w_i} - \frac{n}{w} \right)^2 . \tag{19}$$

En terminologia estadística, les quantitats $n/w$ i $\gamma/w$ no són altra cosa que la mitjana i variança de les representacions dels electors, és a dir dels nombres $n_i/w_i$ repetits cadascun d'ells amb la freqüència $w_i$. Uns càlculs prou elementals mostren que $\gamma$ es pot reescriure de les dues maneres següents:

$$\gamma = \frac{1}{2w} \sum_{i,j} w_i w_j \left( \frac{n_i}{w_i} - \frac{n_j}{w_j} \right)^2 = \left( \sum_i \frac{n_i^2}{w_i} \right) - \frac{n^2}{w}. \tag{20}$$

La primera d'aquestes expressions alternatives mostra que $\gamma$ es pot veure també com la suma dels quadrats de les diferències de representació entre totes les parelles possibles d'electors.

Donat que $n$ i $w$ estan fixades, la darrera expressió mostra que el nucli del problema és minimitzar la suma $\sum_i n_i^2/w_i$. Ara bé, com que $k^2 = 1+3+5+\cdots+(2k-1)$, la suma precedent equival a considerar la taula següent i sumar-ne els primers $n_1$ termes de la primera columna més els primers $n_2$ de la segona, els primers $n_3$ de la tercera, etcètera:

$$\begin{array}{cccccc}
1/w_1 & 1/w_2 & 1/w_3 & \ldots & 1/w_i & \ldots \\
3/w_1 & 3/w_2 & 3/w_3 & \ldots & 3/w_i & \ldots \\
5/w_1 & 5/w_2 & 5/w_3 & \ldots & 5/w_i & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
(2k-1)/w_1 & (2k-1)/w_2 & (2k-1)/w_3 & \ldots & (2k-1)/w_i & \ldots \\
(2k+1)/w_1 & (2k+1)/w_2 & (2k+1)/w_3 & \ldots & (2k+1)/w_i & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array} \tag{21}$$

Com que els termes de cada columna creixen a mida que ens desplacem cap avall, la suma que estem considerant serà mínima —sota la restricció que els $n_i$ sumin $n$— quan prenguem els $n$ termes més petits de la taula. Així doncs, el problema es redueix a seleccionar els $n$ quocients més petits de la forma $(2k+1)/w_i$ amb $i = 1, 2, \ldots, \ell$ i $k = 0, 1, 2, \ldots$, que òbviament equival a seleccionar els $n$ quocients més grans de la forma $w_i/(k+\frac{1}{2})$. Tenim, doncs, el següent resultat, que també va ser obtingut independentment, amb la mateixa demostració, per Frederick William Owens el 1921 [29]:

**Teorema 5.1** (Sainte Laguë, 1910; Owens, 1921)**.** *El criteri de minimitzar la suma dels quadrats de les diferències de representació entre els electors equival al mètode dels llindars aritmètics* $s(k) = k - \frac{1}{2}$.

Si en lloc de minimitzar la desigualtat entre electors penséssim en minimitzar la desigualtat entre diputats, aleshores correspondria minimitzar la quantitat $\sum_i n_i \left((w_i/n_i) - (w/n)\right)^2$. Sainte Laguë demostra que això correspon al mètode dels llindars geomètrics $s(k) = \sqrt{k(k-1)}$.

D'altra banda, Sainte Laguë recull també un altre argument, que atribueix a Louis Zivy, que mostra que la regla de les restes majors correspon a minimitzar la suma de quadrats $\sum_i (n_i - (nw_i/w))^2$. Aquí la diferència que s'eleva al quadrat compara el nombre d'escons que rep el partit $i$ amb el nombre (fraccionari) que li correspondria en el supòsit de proporcionalitat perfecta. Però aquest objectiu de tractament equitatiu dels partits no és pertinent des del moment que pot entrar en conflicte amb el principi molt més evident de tractament equitatiu dels electors. Tal com observa Sainte Laguë, un partit que compta amb molt pocs electors no ha de rebre pas el mateix tractament que un altre que compta amb molts electors.

Aquests resultats van ser obtinguts també per Owens.

**5.4** En el context del repartiment territorial, el 1911 Joseph A. Hill va introduir un altre punt de vista molt remarcable [2: p. 47–49]. En lloc de minimitzar una combinació de totes les diferències per parelles, Hill va proposar de minimitzar per separat cadascuna d'elles (en valor absolut) respecte a transferències d'escons d'un partit a l'altre. El que és remarcable és simplement que això sigui possible, ja que en general els problemes matemàtics d'optimització només permeten optimitzar un sol objectiu.

Més concretament, les diferències que Hill proposa de minimitzar comparen els valors dels quocients $w_i/n_i$, i són, a més, diferències relatives, és a dir, dividides per la magnitud del més petit d'aquests quocients. Es tracta, doncs, de les quantitats $|(w_i/n_i) - (w_j/n_j)|/\min(w_i/n_i, w_j/n_j)$. El 1921 Edward V. Huntington va demostrar que aquesta optimització de múltiples objectius és realment possible i que la realitza el mètode dels llindars geomètrics $s(k) = \sqrt{k(k-1)}$ [22, 23].

Però, segons hem argumentat a § 5.1, els quocients que ens interessa que siguin el més iguals possible no són els de la forma $w_i/n_i$, sinó els seus inversos $n_i/w_i$. A aquest respecte, dos anys abans que Huntington, Bortkiewicz havia observat ja que el mètode dels llindars aritmètics de Webster - Sainte Laguë té també una propietat del tipus de Hill per a aquests quocients [4, 5]:

**Teorema 5.2** (Bortkiewicz, 1919)**.** *El mètode dels llindars aritmètics $s(k) = k - \frac{1}{2}$ es caracteritza pel fet de minimitzar totes i cadascuna de les diferències $|(n_i/w_i) - (n_j/w_j)|$ respecte a transferències d'escons entre $i$ i $j$.*

*Demostració.* Suposem que $n_i/w_i \geq n_j/w_j$. Certament, això implica la desigualtat $(n_i + 1)/w_i \geq (n_j - 1)/w_j$. Per tant, la diferència $(n_i/w_i) - (n_j/w_j)$ serà mínima respecte a transferències d'escons entre $i$ i $j$ si i només si

$$\frac{n_j + 1}{w_j} - \frac{n_i - 1}{w_i} \geq \frac{n_i}{w_i} - \frac{n_j}{w_j}. \tag{22}$$

D'altra banda, es comprova fàcilment que aquesta desigualtat equival a la següent:

$$\frac{w_i}{n_i - \frac{1}{2}} \geq \frac{w_j}{n_j + \frac{1}{2}}. \tag{23}$$

Per completar la demostració només cal notar que, segons l'apartat (d) del Teorema 4.1, la validesa d'aquesta desigualtat per a qualssevol $i$ i $j$ caracteritza la regla de Webster - Sainte Laguë. □

Un raonament anàleg mostra que si busquem una propietat d'aquest tipus per a les diferències $|(w_i/n_i) - (w_j/n_j)|$ ens trobem amb el mètode dels llindars harmònics de Dean [22, 23].

Les regles de Jefferson - d'Hondt i d'Adams també tenen sengles propietats d'aquest tipus [23 : p. 100–103]. Aquestes propietats es refereixen a les diferències $\xi_{ij}$ i $\eta_{ij}$ definides respectivament per

$$\xi_{ij} = \max\left(n_i \frac{w_j}{w_i} - n_j,\, n_j \frac{w_i}{w_j} - n_i\right). \tag{24}$$

$$\eta_{ij} = \max\left(n_i - n_j \frac{w_i}{w_j},\, n_j - n_i \frac{w_j}{w_i}\right). \tag{25}$$

**Teorema 5.3** (Huntington, 1928)**.** *La regla de Jefferson - d'Hondt minimitza totes i cadascuna de les diferències $\xi_{ij}$ respecte a transferències d'escons entre $i$ i $j$. La regla d'Adams té la propietat anàloga per a les diferències $\eta_{ij}$.*

# 6 La qüestió de la monotonia

El 1871 i 1881, amb bastant més de ressò en aquesta segona data, es va descobrir que la regla de les restes majors tenia un comportament gens desitjable: Sense variar les poblacions o nombres de vots $\boldsymbol{w}$, un augment de $n$, el nombre d'escons a repartir, pot resultar en una disminució del nombre d'escons que rep un determinat territori o partit! Aquest fet es coneix com a **paradoxa d'Alabama**, per l'estat que resultava perjudicat en un determinat escenari d'aquest tipus.

Aquesta paradoxa no es pot donar mai amb un mètode de llindars. Això és obvi des del moment que aquests mètodes tenen una formulació recursiva que en cada pas afegeix un escó a algun dels territoris o partits.

Una altra paradoxa que tampoc afecta als mètodes de llindars però sí a la de restes majors és l'anomenada **paradoxa de la població**: En variar les poblacions pot passar que $w_i/w_j$ augmenti i en canvi $n_i/n_j$ disminueixi!

Segons van demostrar vers 1980 Michel L. Balinski i H. Peyton Young, els mètodes de llindars són els únics que disfruten d'una certa propietat de monotonia que evita aquestes i altres paradoxes afins [2 : Thm. 4.3].

# 7 Magnitud i signe de les desviacions respecte a la proporcionalitat

**7.1** Segons el que hem vist a § 2, la regla de Jefferson - d'Hondt té la propietat que $n_i$ supera o iguala sempre la quota fraccionària arrodonida per defecte, és a dir el valor $\lfloor nw_i/w \rfloor$. Tanmateix, pot passar perfectament que $n_i$ superi aquest últim valor en més d'una unitat (a diferència de la regla de restes majors). Per exemple, en les Eleccions al Parlament de Catalunya de 2010, i més concretament en la circumscripció de Barcelona, que comptava amb $n = 85$ escons, el partit més votat va obtenir el 37.97% dels vots vàlids no buits, de manera que la seva quota fraccionària era de $nw_i/w = 85 \times 0.3797 = 32.27$ escons; tot i així, la regla de Jefferson - d'Hondt li va atorgar 35 escons!

Tot i que s'han proposat variacions de la regla de Jefferson - d'Hondt que eliminen tals desviacions [2 : App. A, § 7], aquest fenomen no deixa de ser bastant raonable des del punt de vista de la proporcionalitat: Si un partit petit pot haver de desviar-se respecte la seva quota fraccionària en prop d'una unitat, llavors hem d'admetre que un partit gran se'n desviï més. La representació gràfica de la figura 1 ajuda bastant a convèncer-se d'aquesta afirmació.

Amb la regla d'Adams passa un fenomen similar però en l'altra direcció: $n_i$ queda sempre per sota o igual a la quota fraccionària arrodonida per excés, és a dir el valor $\lceil nw_i/w \rceil$, però la desviació respecte aquest valor pot ser superior a una unitat.

Amb la regla de Webster - Sainte Laguë també es poden donar desviacions $\delta_i = n_i - nw_i/w$ de magnitud superior a la unitat. Tanmateix, això passa menys sovint que amb les altres regles de divisors [2: § 10]. D'altra banda, el repartiment de Webster - Sainte Laguë té la propietat que la transferència d'un escó de $i$ a $j$ mai no disminueix a la vegada les magnituds de les dues desviacions $|\delta_i|$ i $|\delta_j|$.

En efecte, l'única manera en què tal transferència podria disminuir a la vegada ambdues desviacions seria la següent:

$$nw_i/w - (n_i - 1) \;<\; n_i - nw_i/w, \tag{26}$$

$$(n_j + 1) - nw_j/w \;<\; nw_j/w - n_j. \tag{27}$$

Però això es pot reescriure així:

$$n_i - nw_i/w \;>\; \tfrac{1}{2}, \qquad nw_j/w - n_j \;>\; \tfrac{1}{2}, \tag{28}$$

o també

$$\frac{w_j}{n_j + \frac{1}{2}} > \frac{w}{n} > \frac{w_i}{n_i - \frac{1}{2}}, \tag{29}$$

que és incompatible amb la regla de Webster - Sainte Laguë (Teorema 4.1, apartat (d), amb $s(k) = k - \frac{1}{2}$).

Menys obvi és el fet que la regla de Webster - Sainte Laguë és l'única regla de llindars amb aquesta propietat [2: Thm. 6.2]. I també és interessant remarcar que aquesta propietat era realment el que perseguia Daniel Webster el 1832 [2: p. 31].

Segons com es miri, però, el problema no radica tant en la magnitud de les desviacions $\delta_i = n_i - nw_i/w$ com en el seu signe, que és l'aspecte que considerem en els següents paràgrafs.

**7.2** Tant en el context del repartiment territorial com en el del repartiment entre partits es va veure de seguida que la regla de Jefferson - d'Hondt tenia tendència a afavorir els sectors (territoris o partits) més grans. Més concretament, passa que les desviacions $\delta_i$ tendeixen a ser positives per als sectors grans i negatives per als petits. Aquest fenomen es coneix com a **biaix** a favor dels sectors més grans.

L'algorisme gràfic de la figura 1 ajuda a entendre una mica què està passant: Quan la semirecta $OQ$ va augmentant el seu pendent en busca de punts $(w_i, k)$ que completin el nombre prefixat d'escons, aquests punts poden correspondre tant a valors grans com a valors petits de $w_i$, però és més freqüent el primer cas que el segon. El resultat és que els sectors grans tenen més probabilitat que els petits d'augmentar la seva representació respecte a la quota de proporcionalitat exacta, alhora que els petits tenen una major probabilitat de quedar-se per sota.

Amb la regla d'Adams passa a l'inrevés. Aquí la semirecta $OQ$ no puja sinó que baixa respecte a la de proporcionalitat exacta. A conseqüència d'això, les desviacions tendeixen a ser positives per als sectors petits i negatives per als grans.

En canvi, la regla de Webster - Sainte Laguë es comporta de manera bastant neutra. Això es deu a que en aquest cas la semirecta $OQ$ pot quedar tant per sobre com per sota de la de proporcionalitat exacta.

**7.3** Les figures 2 i 3 il·lustren aquests fets amb dades reals. Han estat elaborades amb les dades de les Eleccions al Parlament de Catalunya,[1] des de 1980 fins a 2012, en les seves quatre circumscripcions.

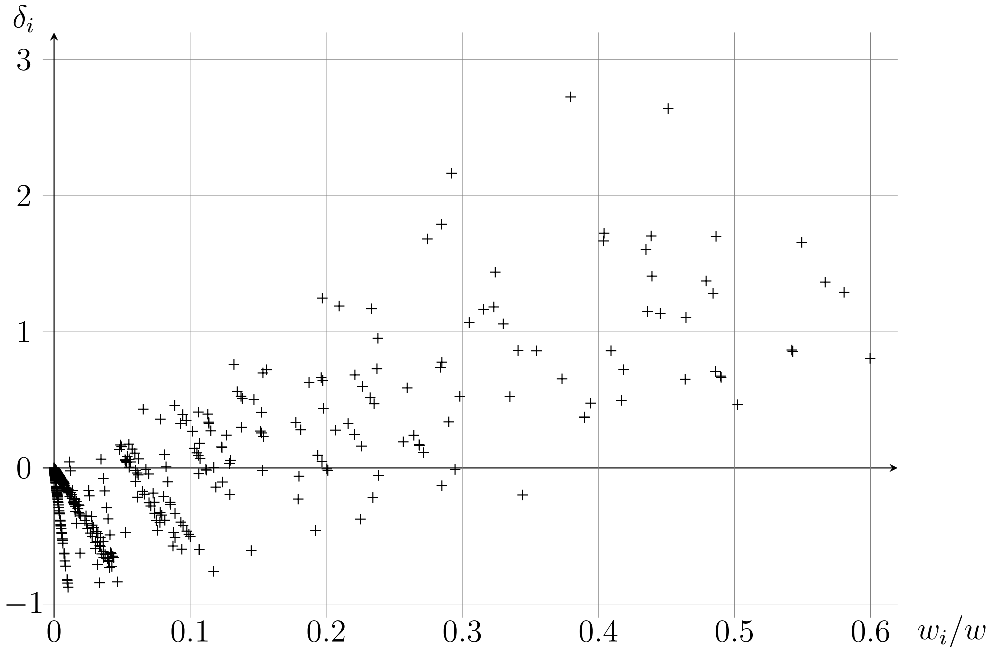



Figura 2. Desviació respecte la quota de proporcionalitat exacta.
Dades empíriques. Regla de Jefferson - d'Hondt.

[1] Generalitat de Catalunya. Departament de Governació i Relacions Institucionals. http://www20.gencat.cat/portal/site/governacio/

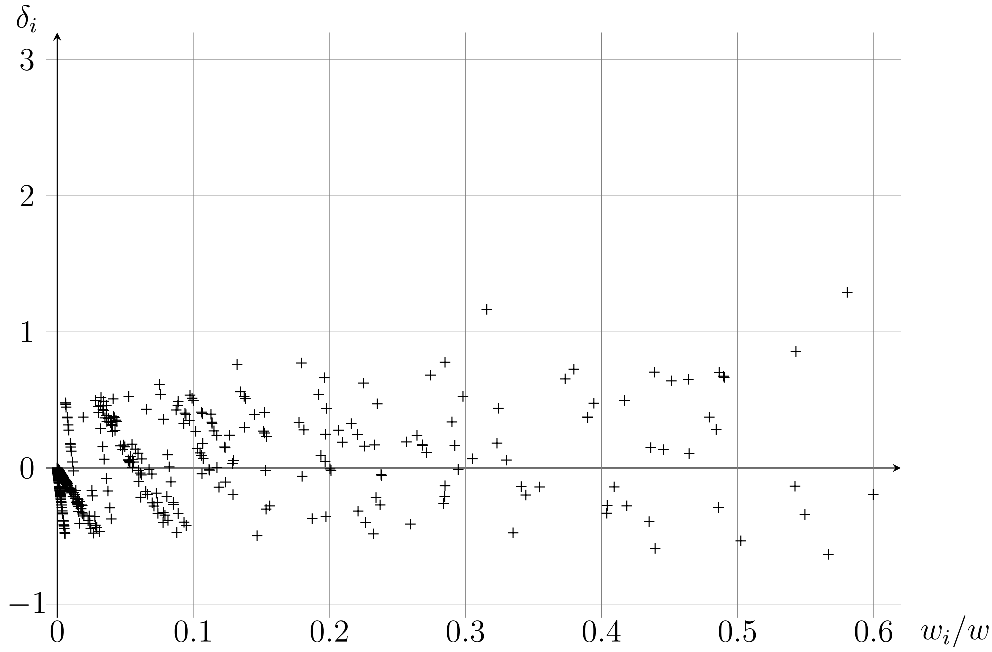



Figura 3. Desviació respecte la quota de proporcionalitat exacta. Dades empíriques. Regla de Webster - Sainte Laguë.

Els punts es corresponen amb totes les candidatures que s'han presentat en aquestes diverses eleccions i circumscripcions. Cada punt té com a abscissa la fracció $w_i/w$ de vots obtinguts per la candidatura. L'ordenada és la desviació del nombre d'escons respecte a la quota fraccionària de proporcionalitat exacta, és a dir, el valor $\delta_i = n_i - nw_i/w$. La figura 2 mostra això per als resultats que s'obtenen en aplicar la regla de Jefferson - d'Hondt (sense el llindar legal del 3%) i la figura 3 mostra el que s'obté amb la regla de Webster - Sainte Laguë.

Com es pot veure, amb la regla de Jefferson - d'Hondt les desviacions positives estan més concentrades en els partits grans i les negatives en els petits (els resultats oficials encara tenen més aquesta tendència degut al llindar legal del 3%, que ha actuat diverses vegades a la circumscripció de Barcelona). En canvi, la regla de Webster - Sainte Laguë és bastant més neutra.

Els punts $(x, y) = (w_i/w,\, n_i - nw_i/w)$ se situen tots ells sobre les rectes $y = k - nx$ amb $k = 0, 1, \ldots n$. Això explica les acumulacions en línia recta que s'observen en aquestes gràfiques.

**7.4** El 1918 Georg Pólya va analitzar el biaix de diferents regles de repartiment mitjançant les eines de la teoria de probabilitats [31, 33]. Considerant 3 partits i suposant que totes les particions $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ són equiprobables, Pólya va calcular el valor mitjà de la desviació $\delta_i$ per al partit $i$ més gran, el mitjà i el més petit. En el cas de la regla de Jefferson - d'Hondt va obtenir que aquests tres valors s'acosten a $5/12, -1/12, -4/12$ a mida que creix $n$. És a dir, que en promig el partit més gran tendeix a ser afavorit en $5/12 = 0.417$ escons respecte a la quota de proporcionalitat exacta, mentre que el partit més petit tendeix a ser perjudicat en $4/12 = 0.333$ escons i el mitjà en $1/12 = 0.083$ escons. En canvi, tant la regla de Webster - Sainte Laguë com la de les restes majors tenen la propietat que els valors mitjans de les desviacions s'acosten tots ells a zero.

En el cas de 2 partits, les regles de Jefferson - d'Hondt i de les restes majors ja havien estat examinades des d'un punt de vista similar —molt breument— per Henri Poincaré [*30*].

Els càlculs de Pólya han estat reproduïts i estesos en diverses direccions en el treball [*41*], que també mostra una clara concordància dels resultats amb les dades empíriques.

**7.5** En principi, el caràcter no esbiaixat de la regla de Webster - Sainte Laguë es refereix al límit $n \to \infty$. Per a valors petits de $n$ les desviacions es mantenen petites, però, com veurem més avall, poden acumular-se en valors més importants quan hi ha moltes circumscripcions.

També és de notar que la regla de Webster - Sainte Laguë adquireix un biaix a favor dels partits grans quan s'hi afegeix un llindar d'exclusió superior al seu llindar automàtic. Segons hem vist a l'apartat (b) de la Prop. 4.2, aquest últim val $1/(2n + \ell - 2)$, que és inferior al valor $1/(n + \ell - 1)$ del llindar automàtic de la regla de Jefferson - d'Hondt (Prop. 3.2).

> En particular, i en contrast amb el que hem observat a § 3.3 en referència a la regla de Jefferson - d'Hondt, el llindar del 3% que posa la llei electoral espanyola sí que actuaria tot sovint en les Eleccions Generals Espanyoles si aquestes usessin la regla de Webster - Sainte Laguë.

També adquireixen un biaix a favor dels partits grans les versions modificades de la regla de Webster - Sainte Laguë que substitueixen el valor $s(1) = 1/2$ per un valor superior, com ara el valor $s(1) = 7/10$ que va adoptar Suècia en l'any 1952 i que han imitat altres països.

> De fet, sembla que aquesta modificació es va introduir realment amb la intenció de seguir afavorint els partits grans a costa dels petits, tal com ja feia la regla de Jefferson - d'Hondt usada fins llavors [*24* : § C.2.4].

El biaix de les diferents regles de repartiment és estudiat també des d'un altre punt de vista a [*2* : § A.5], on es demostra que la regla de Webster - Sainte Laguë és, en un sentit concret que no detallem aquí, l'únic mètode de llindars no esbiaixat [*2* : Prop. 5.2].

**7.6** *La tendència de la regla de Jefferson - d'Hondt a afavorir els partits grans s'amplifica quan hi ha moltes circumscripcions.*

Això es deu a que les desviacions segueixen sent prou grans per a valors petits del nombre d'escons a repartir.

Per exemple, per a tres partits en la hipòtesi d'equiprobabilitat de Pólya, la desviació per al partit més gran té un valor mitjà de 0.369 escons per a $n = 6$ [41 : § 5]. Per tant, per a 60 circumscripcions d'aquesta mida, totalitzant $60 \times 6 = 360$ escons, si el partit més gran fos el mateix en totes elles, aleshores la desviació a favor seu tindria un valor mitjà de $60 \times 0.369 = 22.1$ escons, en lloc dels 0.416 escons que tenim de desviació mitjana en el supòsit d'una sola circumscripció de 360 escons.

Si en lloc de la hipòtesi d'equiprobabilitat suposem que dos dels tres partits es mouen al voltant del 45% dels vots (±5%) mentre que el tercer es mou al voltant del 10%, aleshores una petita simulació[2] mostra que amb 60 circumscripcions de 6 escons els dos primers partits són beneficiats cadascun d'ells en 12.3 escons de mitjana —i el tercer és perjudicat en 24.6 escons— mentre que amb una sola circumscripció de 360 escons les desviacions mitjanes són respectivament de 0.175 i $-0.35$ escons.

Tot i el caràcter purament il·lustratiu d'aquests càlculs, ja es veu que el fet de tenir moltes circumscripcions propicia que la regla de Jefferson - d'Hondt acumuli desviacions importants a favor dels partits grans i en contra dels petits.

**7.7** És natural preguntar-se si en tot això hi té més culpa la regla de Jefferson - d'Hondt o bé el fet de tenir un gran nombre de circumscripcions petites.

A aquest respecte, els exemples precedents ja mostren que *amb una sola circumscripció (de mida gran) les desviacions a què dóna lloc la regla de Jefferson - d'Hondt són inofensives.*

D'altra banda, *la regla de Webster - Sainte Laguë (sense les modificacions esmentades a § 7.4) aconsegueix resultats millors.* Per exemple, en el darrer escenari que hem considerat —60 circumscripcions de 6 escons amb tres partits al voltant de 45%, 45%, 10%— aquesta regla dóna unes desviacions mitjanes de $-0.64$ escons per a cadascun dels dos partits grans (que en aquest cas resulten lleugerament perjudicats).

De tota manera, *si baixem molt la mida de les circumscripcions el problema acaba apareixent també amb la regla de Webster - Sainte Laguë.* Així, en el mateix escenari però amb 120 circumscripcions de 3 escons, els dos partits grans surten beneficiats cadascun d'ells en 9.44 escons de mitjana, i el tercer

[2]Concretament, suposem que les fraccions $w_1/w$ i $w_2/w$ obeeixen ambdues independentment a una distribució uniforme sobre l'interval $[0.40, 0.50]$.

és perjudicat en 18.9 escons.

Per tant, *el problema resideix en gran part en el fet de tenir un gran nombre de circumscripcions petites.*

De fet, en el cas extrem $n = 1$ totes les regles que estem considerant es redueixen al sistema majoritari, és a dir que donen l'únic escó de cada circumscripció al partit més votat en ella. Això afavoreix certament els partits grans; de fet, el sistema majoritari és l'antítesi clàssica de la proporcionalitat.

> Aquestes observacions mostren que és massa simplista la classificació que sovint es fa entre sistemes 'majoritaris' i 'proporcionals' segons que les circumscripcions tinguin $n = 1$ o $n > 1$. Un sistema on totes les circumscripcions tinguessin $n = 2$ i s'usés la regla de Jefferson - d'Hondt seria classificat com a proporcional, però estaria molt lluny de ser-ho.

**7.8** Cal dir que hi ha sistemes que aconsegueixen millorar la proporcionalitat tot mantenint una divisió en circumscripcions relativament petites.

Una manera de fer-ho consisteix en reservar una part dels escons per a assignar-los a nivell global (o regional) en proporció als vots que hagin sobrat a cada partit en el conjunt de circumscripcions. Aquest procediment de "múltiples nivells" s'usa per exemple a Suècia [16 : p. 76].

A Alemanya i altres països s'usa l'anomenat sistema "mixte", on el repartiment dels escons entre partits es determina a nivell global, però una part dels escons de la cambra s'assignen a nivell molt local, en circumscripcions d'un sol escó, i els altres s'assignen a nivell regional. Per més detalls referim el lector a [16 : ch. 5].

També és força interessant el mètode "biproporcional", recentment adoptat pel cantó de Zürich [3, 35, 36]. En aquest mètode, l'assignació d'escons a cada partit dins de cada circumscripció s'ajusta per tal de servir a la vegada a la proporcionalitat entre partits a nivell global i a la proporcionalitat entre circumscripcions a nivell global (o en lloc d'aquesta última, qualsevol repartiment territorial predefinit). A canvi d'aquest doble objectiu, es renuncia a la proporcionalitat entre partits dins d'una circumscripció.

# 8 Epíleg

Els sistemes que hem estudiat en aquest article suposen que cada elector s'identifica amb un partit i només un, i que els altres són rebutjats tots ells per igual. Això pot estar bastant allunyat de la realitat i pot comportar resultats desencertats.

En particular, pot arribar a passar, tal com ja va mostrar Jean - Charles de Borda en el segle XVIII, que l'opció més votada tingui més detractors que partidaris: Per exemple, amb quatre partits que obtinguessin respectivament el 40%, 20%, 20% i 20% dels vots, podria ser que els votants dels tres últims, que sumen un 60%, estiguéssin tots ells d'acord que la pitjor opció és el primer.

Una altra important font d'error és el fenomen del "vot útil": Els partidaris d'opcions minoritàries —les que tenen escasses perspectives d'obtenir un diputat en la circumscripció en qüestió— troben inútil votar per la seva opció realment preferida i es veuen conduïts a votar una altra opció que sí tingui possibilitats d'obtenir algun diputat; això suposant que alguna d'aquestes opcions els sembli mínimament acceptable; si no és així, llavors aquests electors fàcilment opten per l'abstenció. Òbviament, això desfigura o silencia les veritables preferències dels electors.

Aquestes deficiències es poden resoldre fins a un cert punt mitjançant certes formes de vot que no es limiten a escollir una sola opció, com són el vot preferencial i el vot d'aprovació. Les opcions poden ser aquí els diferents partits o bé directament els diferents candidats. Un vot preferencial consisteix en una llista d'opcions ordenades per ordre de preferència, mentre que un vot d'aprovació és una llista no ordenada de totes les opcions que l'elector considera acceptables, o si més no, oportunes.

Amb aquestes formes de vot no està clar com s'ha d'entendre la noció de proporcionalitat. Tanmateix, aquesta noció està ben present com a objectiu en els procediments anomenats de vot únic transferible, que es basen en el vot preferencial i van ser introduïts ja a mitjan el segle XIX. Menys conegut, però força interessant, és un altre mètode, proposat a finals d'aquell segle pel matemàtic suec L. Edvard Phragmén, on es vetlla per la proporcionalitat en el marc del vot d'aprovació. Aquests mètodes seran objecte d'un proper article [27].

**Agraïments.** Diversos punts d'aquest article han estat millorats gràcies als comentaris de l'Aureli Alabert i de la Rosa Camps.

# Referències

En la llista de referències que segueix fem ús de la notació següent: el símbol $\equiv$ indica una publicació subseqüent del mateix treball; el símbol $\gg$ indica una traducció; finalment, el símbol $>$ indica un resum o altres dades bibliogràfiques.

[1] Aureli Alabert, 2001. Sistemes electorals. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 16, n. 2: 7–30.

[2] Michel L. Balinski, H. Peyton Young, 1982[1], 2001[2]. *Fair Representation. Meeting the Ideal of One Man, One Vote.* Washington: Brookings Institution Press.

[3] Michel L. Balinski, Friedrich Pukelsheim, 2007. Die Mathematik der doppelten Gerechtigkeit. *Spektrum der Wissenschaft*, 4/2007 : 76–80.

[4] Ladislaus von Bortkiewicz, 1919. Ergebnisse verschiedener Verteilungssysteme bei der Verhältniswahl. *Annalen für soziale Politik und Gesetzgebung*, 6 : 592–613.

[5] Ladislaus von Bortkiewicz, 1920. Zur Arithmetik der Verhältniswahl. *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft*, 18 : 17–24.

[6] Gustav Burnitz, Georg Varrentrapp, 1863. *Methode, bei jeder Art von Wahlen sowohl der Mehrheit als den Minderheiten die ihrer Stärke entsprechende Zahl von Vertretern zu sichern.* Frankfurt am Main: I. D. Sauerländer. / ≫ A method of assuring to the minorities as well as to the majority, at all kinds of elections, the number of representatives corresponding to their strength. Appendix B (p. 159–174) de Matthias N. Forney, 1894: *Political Reform by the Representation of Minorities* (New York).

[7] François J. F. Cantagrel, 1874. *De l'Élection Véridique. Le vote au bulletin de ralliement.* Paris: A. Lechevalier.

[8] Charles J. F. de Comberousse, 1860. *Cours de Mathématiques.* Tome premier: *Arithmétique - Algèbre élémentaire.* Paris: Mallet-Bachelier.

[9] [Victor d'Hondt], 1878. *La Représentation Proportionnelle des Partis, par un électeur.* Bruxelles: Bruylant-Christophe.

[10] Victor d'Hondt, 1882. *Système Pratique et Raisonné de Représentation Proportionnelle.* Bruxelles: C. Muquardt. / > *Resum*: *La Représentation Proportionnelle, Organe de l'Association Réformiste*, 1 : 29–30, 33–35.

[11] Victor d'Hondt, 1883. Formule du minimum dans la représentation proportionnelle; Moyen facile de trouver le diviseur. *La Représentation Proportionnelle, Revue Mensuelle*, 2 : 117–128; 129–130.

[12] Henry R. Droop, 1868. *On Methods of Electing Representatives.* London: Macmillan.

[13] Henry R. Droop, 1881. On methods of electing representatives. *Journal of the Statistical Society of London*, 44, n. 2 : 141–202. / ≡ *Voting Matters*, 24 : 7–46 (2007).

[14] Maurice Equer, 1910. *Arithmétique et représentation proportionnelle.* Édition de *la Grande Revue*, 32 p. (Quatorzième année, No. 12, 25 juin 1910, Supplément).

[15] Maurice Equer, 1911. Relation entre la méthode d'Hondt et la proportionnalité. *La Grande Revue*, 65 : 130–137 (10 janvier 1911).

[16] David M. Farrell, 2001[1], 2011[2]. *Electoral Systems. A Comparative Introduction*. Palgrave Macmillan.

[17] Eduard Hagenbach-Bischoff, 1886. Proportionale Vertheilung · Démonstration géometrique. *Bulletin de la Société Suisse pour la Représentation Proportionnelle - Bulletin des Schweizerischen Wahlreform-Vereins für Proportionale Volksvertretung*, 3: 143–144.

[18] Eduard Hagenbach-Bischoff, 1888. *Die Frage der Einführung einer Proportionalvertretung statt des absoluten Mehres*. Basel: H. Georg.

[19] Eduard Hagenbach-Bischoff, 1888. Manière de trouver le chiffre répartiteur · Bestimmung der Vertheilungszahl. *Bulletin de la Société Suisse pour la Représentation Proportionnelle · Bulletin des Schweizerischen Wahlreform-Vereins für Proportionale Volksvertretung*, 5: 235–241 · 242–243. / ≡ *La Représentation Proportionnelle, Revue Mensuelle*, 7: 266–272.

[20] Eduard Hagenbach-Bischoff, 1890. La solution du problème de la répartition proportionnelle. *La Représentation Proportionnelle, Revue Mensuelle*, 9: 159–171.

[21] Clarence Gilbert Hoag, George Hervey Hallett Jr, 1926. *Proportional Representation*. New York: Macmillan.

[22] Edward V. Huntington, 1921. A new method of apportionment of representatives. *Quarterly Publications of the American Statistical Association*, 17: 859–870. / > *Resum*: The mathematical theory of the apportionment of representatives. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 7: 123–127.

[23] Edward V. Huntington, 1928. The apportionment of representatives in Congress. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30: 85–110.

[24] Svante Janson, 2012–2013. *Proportionella Valmetoder*. http://www2.math.uu.se/~svante/papers/sjV6.pdf.

[25] Arend Lijphart, Robert W. Gibberd, 1977. Thresholds and payoffs in list systems of representation. *European Journal of Political Research*, 5: 219–244.

[26] Xavier Mora, 2010. Votar: no tan fàcil com sembla, però podriem fer-ho millor!. *Materials Matemàtics*, 2010, n. 1. http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2010/v2010n01.pdf. / ≡ Votar: no tan fácil como parece, ¡pero podríamos hacerlo mejor! *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 13: 471–198.

[27] Xavier Mora, Maria Oliver, (en elaboració). Eleccions mitjançant el vot d'aprovació: El mètode de Phragmén i algunes variants.

[28] Maria Oliver, 2012. *El mètode de Phragmén per assignar escons en eleccions parlamentàries*. Treball de Fi de Grau, Grau de Matemàtiques, Univ. Autònoma de Barcelona.

[*29*] Frederick William Owens, 1921. On the apportionment of representatives. *Quarterly Publications of the American Statistical Association*, 17 : 958–968.

[*30*] Henri Poincaré, 1911. [ Préface (p. iii–xii) del llibre *La Représentation Proportionnelle en France et en Belgique*, de Georges Lachapelle ]. Paris: Félix Alcan.

[*31*] Georg Pólya, 1918. Über die Verteilungssyteme der Proportionalwahl. *Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft*, 54 : 363–387.

[*32*] Georg Pólya, 1919. Über die Systeme der Sitzverteilung bei Proportionalwahl. *Wissen und Leben*, Jahrgang 12, Band 21 : 259–268, 307–312.

[*33*] Georg Pólya, 1919. Proportionalwahl und Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, 74 : 297–322.

[*34*] Georg Pólya, 1919. Sur la représentation proportionelle en matière électorale. *L'Enseignement Mathématique*, 20 : 355–379. / ≡ *Collected Works*, vol. 4 (ed. G. C. Rota, MIT 1984), p. 32–56.

[*35*] Friedrich Pukelsheim, 2008. Zürcher Zuteilung: Wie die Stochastik einer alten Demokratie ein neues Wahlsystem beschert. *Forschung, Das Magazin der Deutschen Forschungsgemeinschaft*, 3/2008 : 22–24. / ≫ Zurich's New Apportionment: How mathematics has played an essential role in giving an ancient democracy a new electoral system. *German Research, Magazine of the Deutsche Forschungsgemeinschaft*, 2/2009 : 10–12.

[*36*] Friedrich Pukelsheim, (preprint). Biproportional matrix scaling and the iterative proportional fitting procedure. http://www.math.uni-augsburg.de/stochastik/pukelsheim/2013x-version2-preprint.pdf.

[*37*] Léon Rouyer, 1901. Théorie mathématique de la représentation proportionnelle. Ligue pour la Représentation Proportionnelle, manuscript, 12p. / ≡ Appendix (p. 31–58) de la *Proposition de Loi ayant pour objet l'application de la représentation proportionnelle aux élections législatives* (Ligue pour la Représentation Proportionnelle, Paris, 1903).

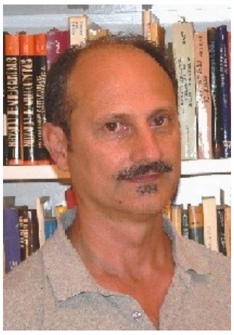
[*38*] Antoni Rovira i Virgili, 1932. *Els Sistemes Electorals.* Barcelona: Barcino. / ≡ *2a edició*: Barcelona, Ed. Undarius, 1977.

[*39*] André Sainte Laguë, 1910. La représentation proportionelle et la méthode des moindres carrés. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3), 27 : 529–542. / > *Resum*: *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, 151 : 377–378. / > *Traducció del resum*: Proportional representation and the method of least squares. Appendix 2 (p. 241–242) de [25].

[*40*] André Sainte Laguë, 1910. La représentation proportionelle et les mathématiques. *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, 21 : 846–852.

[41] Karsten Schuster, Friedrich Pukelsheim, Mathias Drton, Norman R. Draper, 2003. Seat biases of apportionment methods for proportional representation. *Electoral Studies*, 22 : 651–676.

[42] Douglas R. Woodall, 1986. How proportional is proportional representation? *The Mathematical Intelligencer*, 8, n. 4 : 36–46.



Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
xmora@mat.uab.cat

*Publicat el 17 de juliol de 2013*

UAB