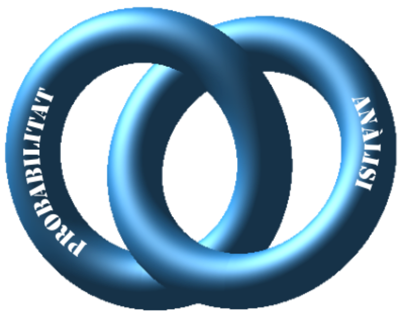
MAT²
MATerials MATemàtics
Volum 2013, treball no. 2, 26 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Probabilitat i Anàlisi, uns grans amics

Maria Jolis



La Probabilitat té la seva base en l'Anàlisi, des dels seus fonaments donats en l'axiomàtica de Kolmogorov (vegi's [K]), la teoria de la mesura i la integral de Lebesgue són al centre de la teoria. Això és ben conegut pels matemàtics. També és sabut que la Probabilitat té la seva aplicació més important (a part de resoldre problemes probabilístics, òbviament) en l'Estadística. De fet, la probabilitat és el llenguatge de l'Estadística matemàtica i els seus teoremes límit s'apliquen en els mètodes asimptòtics de la inferència estadística (és a dir, aquells mètodes que utilitzen la distribució aproximada de certs estimadors per a mostres grans). El que no és tan conegut és que la probabilitat té també un relativament ampli ventall d'aplicacions a l'anàlisi, incloent-hi també l'anàlisi numèrica i les equacions en derivades parcials. En aquest article veurem algunes d'aquestes aplicacions prenent com a fil conductor els teoremes límit de la Probabilitat.

Els teoremes límit constitueixen el cor de la Teoria de la Probabilitat. En les seves versions més clàssiques ens donen el comportament límit de les successives mitjanes aritmètiques d'una successió $\{X_n, n \geq 1\}$ de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes. El primer d'aquests teoremes límit és la *Llei dels grans nombres* que, en la seva versió forta, ens diu que si les X_n tenen esperança finita aleshores la successió de les mitjanes aritmètiques convergeix, amb probabilitat 1, cap a la mitjana o esperança comuna de les X_n. Un cas particular molt important és aquell en què les nostres variables aleatòries X_n valen 1 o 0 segons es produeixi o no un cert esdeveniment aleatori A en una successió de proves independents. En aquest cas, la mitjana aritmètica de X_1, $X_2, \ldots, X_n$ no és més que la freqüència relativa d'ocurrència de l'esdeveniment A en les n primeres proves. Per altra banda l'esperança de les X_n és precisament la probabilitat de l'esdeveniment A. Així, el que la Llei forta dels grans nombres ens diu és que les freqüències relatives d'ocurrència d'un cert esdeveniment A, en una successió de proves independents, tendeix a la probabilitat de l'esdeveniment. Aquest fet es va constatar en la pràctica des dels inicis de la teoria de la probabilitat i és el que es coneix com a *interpretació freqüentista de la probabilitat*. De fet, històricament hi va haver molts intents de definir probabilitat a partir d'aquesta idea que no van acabar de funcionar. El fet que aquest resultat es pogués demostrar a partir de la teoria axiomàtica introduïda per Kolmogorov va ser un dels motius importants pels quals aquesta teoria va ser acceptada per la gran majoria del món matemàtic.

El segon teorema límit, i el més important des del punt de vista de les aplicacions, és el *Teorema Central del Límit* que ens diu que, si també son finits els moments de segon ordre, les mitjanes aritmètiques estandarditzades (restant la seva esperança i dividint per la seva desviació típica, de manera que un cop fet això tinguin mitjana 0 i desviació típica 1) quan n tendeix a infinit tendeixen en distribució cap a una distribució normal estàndard. Això, a efectes pràctics ens diu que les mitjanes aritmètiques tenen asimptòticament distribució normal i quan es disposa de mostres grans això té una immensa aplicació a Estadística.

El tercer teorema límit, l'anomenada *Llei del Logaritme Iterat*, és més difícil de descriure sense haver introduït les notacions i els altres teoremes amb més precisió. Per tant l'enunciarem a la secció següent.

Com hem comentat, el que farem aquí és donar aplicacions de la probabilitat a l'anàlisi, basades en els teoremes límit. Concretament, veurem la demostració probabilística que va donar S. Bernstein del teorema d'aproximació de Weierstrass i en el món de l'anàlisi numèrica introduirem el mètode de Monte-Carlo d'aproximació de certes quantitats mitjançant la simulació de variables aleatòries. Els teoremes límit permeten assegurar la convergència del mètode i trobar el seu ordre de convergència. El mètode de Monte-Carlo es pot usar també per a resoldre numèricament equacions en derivades parcials si es pot donar una representació de la solució en termes probabilístics. Aquestes representacions tenen interès per si mateixes i donen lloc a un ampli ventall d'interrelacions entre les probabilitats i l'anàlisi.

Es començarà amb un resum dels teoremes límit, en les seves versions més clàssiques, per tal de fixar notacions i recordar aquests resultats. Després veurem la demostració probabilística del teorema de Weierstrass. Seguidament farem una introducció al mètode de Monte-Carlo i, finalment, veurem alguns resultats senzills de representació en termes probabilístics de les solucions de certes equacions en derivades parcials.

1 Els teoremes límit

Considerem una successió $\{X_n,\, n \geq 1\}$ de variables aleatòries independents, totes elles amb la mateixa distribució (podem pensar que són observacions aleatòries independents d'una mateixa variable X). Denotarem per S_n les successives sumes parcials de les X_i, és a dir,

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Si $E(|X_1|) < \infty$ es denota

$$\mu = E(X_1)$$

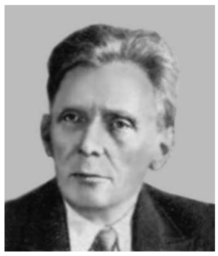
i si, a més, tenim moment de segon ordre finit $(E(X_1^2) < \infty)$ escriurem

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1).$$

La Llei Feble dels Grans Nombres (Versió de Khintxin)

Si les X_i tenen esperança finita (no cal suposar que el moment de segon ordre sigui finit), aleshores

$$\frac{S_n}{n} \to \mu, \quad \text{en probabilitat, quan } n \to \infty.$$



A. Ia. Khintxin
(1894–1959)

Tenint en compte la definició de convergència en probabilitat d'una successió de variables aleatòries, aquest resultat ens diu que per a tot $\varepsilon > 0$ es té

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Comentaris:

- L'adjectiu "feble" indica que la convergència és en probabilitat, per contraposició a les lleis "fortes" en què la convergènica és quasi segura. La convergència quasi segura implica la convergència en probabilitat.

- Notem que S_n/n no és més que la mitjana aritmètica de les n primeres variables de la nostra successió. Així, la llei feble ens diu que aquestes mitjanes aritmètiques convergeixen (en probabilitat) cap a l' esperança comuna de les X_i.

- Aquesta versió de la llei feble és força difícil de demostrar. És important des del punt de vista històric, degut a que, en la seva prova, Khintxin va utilitzar per primer cop eines que actualment són d'un ús molt estès com, per exemple, les funcions característiques i els truncaments. Ara bé, la llei forta de Kolmogorov (que s'enuncia més endavant) implica aquesta llei. Per aquest motiu i per la dificultat de la seva prova, als primers cursos de probabilitat moltes vegades no es demostra. El que sí s'acostuma a provar en aquests primers cursos és una versió més feble, en què se suposa que les variables tenen moment de segon ordre finit. En aquest cas, la demostració és una simple aplicació de la desigualtat de Txebixev, que recordem a continuació.

Desigualtat de Txebixev: *Sigui X una variable aleatòria amb esperança i variància finites. Aleshores, per a tot $\lambda > 0$, tenim que*

$$P\{|X - E(X)| \geq \lambda\} \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\lambda^2}\,.$$

P. L. Txebixev
(1821–1894)

Com hem comentat, usant aquesta desigualtat es pot provar molt fàcilment la llei feble dels grans nombres, suposant que les X_i tenen moment de segon ordre finit. Aquesta llei de vegades es coneix com a llei feble de Bernoulli.

Prova de la llei feble sota la condició de moments de segon ordre finits:
Hem de veure que per a tot $\varepsilon > 0$ tenim que

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right\}$$

tendeix a 0 quan $n \to \infty$. Degut a les propietats de linealitat de l'esperança

$$E\Big(\frac{S_n}{n}\Big) = E\Big(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\Big) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu}{n} = \mu$$

i llavors, usant la desigualtat de Txebixev, tenim

$$0 \leq P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n/n)}{\varepsilon^2}.$$

Així, si provem que el membre dret de la desigualtat anterior tendeix a 0 quan $n \to \infty$, ja tindrem el resultat. Com les X_i són variables independents, la variància de la seva suma és la suma de les variàncies i, usant el comportament de la variància d'una variable aleatòria multiplicada per una costant, tindrem

$$\frac{\mathrm{Var}(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\,\mathrm{Var}(S_n) = \frac{n\,\sigma^2}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}$$

que efectivament tendeix a 0 quan n va a infinit.

Observació: Fixem-nos que en realitat hem provat la convergència en mitjana quadràtica, no només en probabilitat. En efecte, hem vist que $\mathrm{Var}(S_n/n)$ tendeix a zero, i és clar que

$$E\Big[\Big(\frac{S_n}{n} - \mu\Big)^2\Big] = \mathrm{Var}\Big(\frac{S_n}{n}\Big).$$

Llei Forta dels Grans Nombres (Versió de Kolmogorov)

Si les X_i tenen esperança finita aleshores

$$\frac{S_n}{n} \to \mu, \quad \textit{quasi segurament,} \quad \textit{quan } n \to \infty.$$

A. N. Kolmogorov (1903–1987)

Recordant la definició de convergència quasi segura, això vol dir que $\frac{S_n}{n}$ convergeix amb probabilitat 1 cap a μ o, el que és el mateix, la probabilitat que no hi convergeixi és 0.

La primera aplicació important de la llei dels grans nombres va ser el tractament matemàtic dels errors en els mesuraments de les magnituds físiques. És un fet constant a la Ciència que quan es mesura una certa magnitud física no ens dóna gairebé mai el mateix resultat. Això es degut a que hi ha múltiples factors que produeixen errors. Els errors es classifiquen bàsicament en sistemàtics (per exemple si tenim els aparells mal calibrats, pot ser que sempre mesurem més del compte) i els errors aleatoris (són els que són deguts a multitud de petits factors ambientals que afecten els nostres mesuraments i fan que de vegades mesurem de menys i de vegades de més). Els científics experimentals poden arribar a eliminar pràcticament els errors sistemàtics, però els aleatoris encara que també es poden reduir, són inevitables. Per "lluitar" contra aquest fet, quan un científic vol donar un valor més acurat del valor de la magnitud que està mesurant, el que fa és prendre un gran nombre de mesuraments i fer-ne la mitjana aritmètica. Això, que intuïtivament sembla clar que millora la nostra aproximació, pot justificar-se matemàticament usant la llei dels grans nombres.

Efectivament, podem suposar que els resultats numèrics dels nostres mesuraments, X_i, són variables aleatòries independents (si cada cop que fem un mesurament les condicions ambientals es poden considerar inalterades, podem suposar independència dels mesuraments) i idènticament distribuïdes. Si només hi són presents els errors aleatoris podem suposar també que

$$X_i = a + \varepsilon_i,$$

on a és el valor real de la magnitud i ε_i és l'error aleatori que cometem. Degut a les característiques de l'error aleatori és lògic suposar que $E(\varepsilon_i) = 0$, amb la qual cosa $E(X_i) = a$. Aleshores, la llei dels grans nombres ens assegura que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \longrightarrow a,$$

quan n tendeix a infinit, i això justifica el fet d'aproximar a per la mitjana d'un gran nombre de mesuraments.

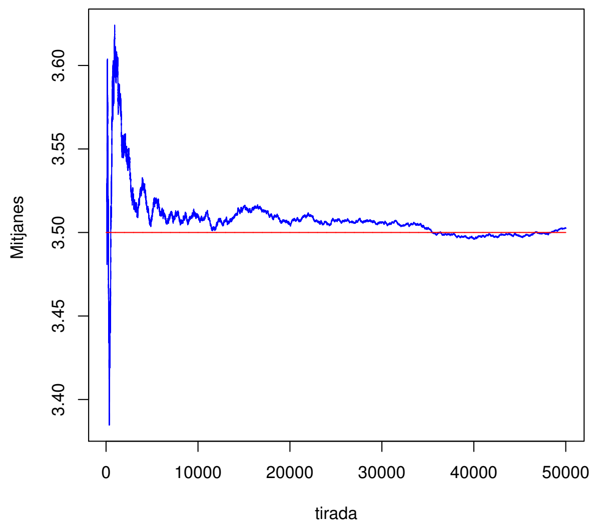


Figura 1: **Il·lustració de la Llei dels Grans Nombres:** Successives mitjanes aritmètiques de simulacions de les puntuacions en el llançament d'un dau perfecte. S'observa com s'aproximen a l'esperança, $\mu = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$, de la variable aleatòria que dóna la puntuació del dau.

Com s'ha comentat a la introducció, junt amb les lleis dels grans nombres, l'altre teorema límit fonamental de la teoria de la probabilitat, d'immenses aplicacions a l'Estadística, és el Teorema Central del Límit. Aquest teorema ens diu que les mitjanes aritmètiques de les X_i, quan n és gran tenen aproximadament distribució normal. A continuació s'enuncia la versió més clàssica d'aquest teorema.

J. W. Lindeberg (1876–1932)

Teorema Central del Límit. (Versió de Lindeberg) *Si $E(X_1^2) < \infty$, aleshores tenim*

$$\frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1), \quad \textit{en llei, quan } n \to \infty.$$

En aquest enunciat estem usant la notació $N(0,1)$ per a una variable aleatòria amb distribució normal d'esperança 0 i variància 1. El fet que la convergència sigui en llei vol dir que per a tot $x \in \mathbb{R}$ tenim

$$P\left\{ \frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le x \right\} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-y^2/2} dy, \quad \text{quan } n \to \infty.$$

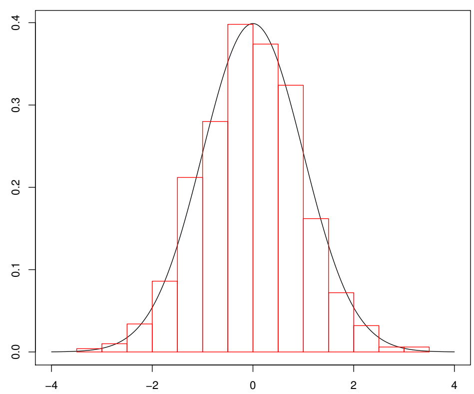


Figura 2: **Il.lustració del Teorema Central del Límit.** Histograma de la simulació d'una mostra de 1000 mitjanes estandaritzades de $n = 50$ llançaments d'un dau amb superposició del gràfic de la densitat normal estàndard. El gràfic mostra que la distribució (simulada a partir d'una mostra de 1000 mitjanes) de la mitjana de les puntuacions de $n = 50$ llançaments d'un dau ja s'aproxima força a la normal.

Un altre teorema límit que no és tan conegut pels no probabilistes és l'anomenada Llei del Logaritme Iterat, que ens diu com convergeixen a infinit les sumes de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes. Recordem que la Llei dels Grans Nombres ens diu que

$$\frac{S_n - n\,\mu}{n} = \frac{S_n}{n} - \mu \longrightarrow 0, \ \text{ quasi segurament}$$

i el Teorema Central del Límit ens diu que

$$\frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = \frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0,1), \ \text{ en llei.}$$

A partir d'aquest darrer fet, i usant que una variable aleatòria amb llei $N(0,1)$ pren valors entre $-\infty$ i $+\infty$, es pot demostrar (no és trivial!, podeu trobar la prova a la Secció 4.7 de [I]) que

$$\limsup_n \frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = +\infty \ \text{ (q.s.)} \quad \text{i} \quad \liminf_n \frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = -\infty \ \text{ (q.s.)}^{1}$$

i aquests fets impliquen que

$$\limsup_n \{S_n - n\,\mu\} = +\infty \text{ (q.s.)} \quad \text{i} \quad \liminf_n \{S_n - n\,\mu\} = -\infty \text{ (q.s.)}$$

és a dir, les sumes de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, un cop centrades restant la seva esperança, oscil·len prenent valors positius i negatius tan grans en valor absolut com vulguem[2].

Un es pregunta, doncs, si existirà alguna successió de nombres positius, $\{\psi(n),\, n \geq 1\}$, tal que

$$\left\{ \frac{S_n - n\,\mu}{\psi(n)},\, n \geq 1 \right\}$$

[1]A Probabilitat es diu que una certa propietat es compleix *quasi segurament* (i ho abreugem *q.s.*) quan la probabilitat que es compleixi és igual a 1.

[2]Una aplicació interessant d'aquest fet és que serveix per donar una demostració que el passeig aleatori simple sobre els enters, és a dir, aquell en què a cada pas ens movem una unitat a la dreta o l'esquerra amb probabilitat 1/2 passa per tots els punts infinites vegades. En efecte, si prenem les nostres variables X_i de tal manera que només prenen els valors $+1$ i -1 amb probabilitat $1/2$, aleshores $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ és la posició que ocupa el moviment en l'instant n (sortint de 0). Com $E(X_i) = 0$, el resultat que hem citat ens diu que

$$\limsup_n S_n = +\infty \quad \text{i} \quad \liminf_n S_n = -\infty$$

amb probabilitat 1, i això implica que el passeig passa per qualsevol posició infinites vegades. Podeu trobar una demostració directa d'aquest fet a l'article de X. Bardina [Ba] es mantingui acotada sense tendir a 0. La resposta ve donada pel teorema següent, del qual la primera versió per a variables aleatòries de tipus Bernoulli (és a dir, que només prenen dos valors, el 0 i l'1) va ser demostrada per Khintxin.

Llei del Logaritme Iterat. *Si $E(X_n^2) < \infty$, tenim que*

$$\limsup_n \frac{S_n - n\,\mu}{\sigma\sqrt{2n\log\log n}} = +1 \quad (q.s.) \quad i \quad \liminf_n \frac{S_n - n\,\mu}{\sigma\sqrt{2n\log\log n}} = -1 \quad (q.s.)$$

Un cop presentats els teoremes límit de la probabilitat veurem una primera aplicació.

2 Demostració probabilística del Teorema d'aproximació de Weierstrass

S. N. Bernstein (1880–1968)

Aquí es donarà la demostració usant arguments de probabilitat del teorema d'aproximació d'una funció contínua per polinomis. Aquesta prova és deguda a S. Bernstein i està inspirada en les lleis dels grans nombres.

Comencem prenent un $x \in [0,1]$ i considerem una successió $\{X_n\}$ de variables aleatòries independents totes elles amb distribució de Bernoulli de paràmetre x. Això vol dir que les nostres variables X_n només prenen els valors 1 i 0 i que $P\{X_n = 1\} = x$ (i, per tant, $P\{X_n = 0\} = 1 - x$). Fixem-nos que estem admetent els casos "degenerats" $x = 0$ i $x = 1$, que corresponen a variables aleatòries constants amb probabilitat 1.

Llavors, tenim que

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

és una variable aleatòria amb distribució binomial de paràmetres n i x. Això vol dir que

$$P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \text{ per a } k = 0, 1, \dots, n.$$

(Per obtenir resultats coherents quan $x = 0$ i $x = 1$ definim, per continuïtat, $0^0 = 1$ en aquests casos). També és clar que

$$\frac{S_n}{n} \in [0,1].$$

Ara, si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ és una funció contínua, té sentit considerar la variable aleatòria $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$. L'esperança d'aquesta variable aleatòria serà

$$E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P\{S_n = k\} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (1)$$

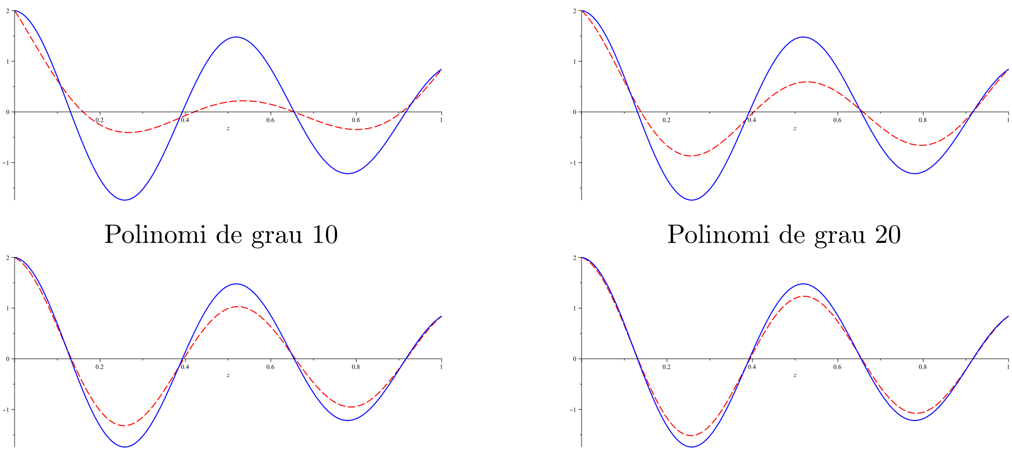
Aquesta darrera expressió és un polinomi de grau n com a funció de x, anomenat *polinomi de Bernstein de grau n associat a f*, que denotarem $P_n^f(x)$. Per altra banda, la llei dels grans nombres ens diu que

$$\frac{S_n}{n} \to x \ \text{(q.s.), quan } n \to \infty,$$

ja que x és l'esperança de la distribució de Bernoulli de paràmetre x. Si apliquem el Teorema de la Convergència dominada (tenint en compte que f és contínua en $[0,1]$ i, per tant, acotada) tindrem que, quan n tendeix a infinit,

$$P_n^f(x) = E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] \longrightarrow E[f(x)] = f(x).$$

De fet, es pot provar que la convergència és uniforme i així s'obté una demostració constructiva del teorema d'aproximació de Weierstrass. Per *constructiva* entenem que no només diem que existeix una successió de polinomis que aproxima f sinó que es dóna una successió concreta amb aquesta propietat.



Polinomi de grau 10 Polinomi de grau 20

Polinomi de grau 50 Polinomi de grau 100

Figura 3: Alguns **polinomis de Bernstein**, representats amb línia discontínua, per a la funció $f(x) = (2-x)\cos(12x)$.

Teorema. *Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ és contínua, aleshores $P_n^f \rightrightarrows f$ uniformement quan $n \to \infty$.*

Demostració: (Bernstein, 1912. Vegeu [Be])
Fixem $\varepsilon > 0$ i vegem que existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, per a tot $n \geq n_0$, es compleix que

$$\left|f(x) - P_n^f(x)\right| < \varepsilon,$$

per a tot $x \in [0,1]$.

Com la funció f és contínua sobre $[0,1]$ és uniformement contínua. Per tant, existeix $\delta > 0$ tal que si $|x' - x''| \leq \delta$, aleshores $|f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon/2$. Per a cada n i cada x tenim que

$$\begin{aligned} f(x) - P_n^f(x) &= f(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^k - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^k, \end{aligned} \tag{2}$$

on hem usat que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^k = 1,$$

la definició de $P_n^f(x)$ i l'expressió (1).

Usant (2) tenim la desigualtat següent:

$$\left|f(x) - P_n^f(x)\right| \leq \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

on

$$\Sigma_1 = \sum_{k:\,|\frac{k}{n} - x| \leq \delta} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

i

$$\Sigma_2 = \sum_{k:\,|\frac{k}{n} - x| > \delta} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Observem que

$$\Sigma_1 \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

ja que si $|\frac{k}{n} - x| \leq \delta$ aleshores tenim que $|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)| \leq \varepsilon/2$ i, per altra banda, $\sum_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$. Acotem ara Σ_2.

$$\Sigma_2 \leq 2\,M \sum_{k:\,|\frac{k}{n} - x| > \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 2\,M \cdot P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right\}. \tag{3}$$

En l'expressió anterior estem denotant

$$M = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

i hem usat que el sumand

$$\sum_{k:\,|\frac{k}{n}-x|>\delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

ens dóna la probabilitat que una variable aleatòria amb distribució binomial, com és S_n, prengui valors k que satisfacin $|\frac{k}{n} - x| > \delta$.

Com $E(X_i) = x$, la llei feble dels grans nombres ja ens diu que, per a cada x, podrem trobar un $n_x \in \mathbb{N}$ tal que, per a $n \geq n_x$, el membre dret de (3) es pot fer menor que $\varepsilon/2$. Però com volem veure que la convergència és uniforme en x, el que farem és redemostrar la llei en aquest cas particular.

Degut a que

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{n\,x}{n} = x\,,$$

podem aplicar la desigualtat de Txebixev i tindrem

$$\Sigma_2 \leq 2\,M \cdot P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right\} \leq 2\,M\,\frac{\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\delta^2} = 2\,M\,\frac{n\,x\,(1-x)}{n^2\,\delta^2}\,,$$

on hem usat que la variància d'una distribució binomial amb paràmetres n i x és igual a $n\,x\,(1-x)$. Tenint en comte que com $x \in [0,1]$ tenim que $x\,(1-x) \leq 1/4$, podem acotar l'expressió anterior per

$$\frac{M}{2\,\delta^2\,n}$$

i aquesta quantitat es pot fer menor que $\varepsilon/2$, prenent $n > \frac{M}{\delta^2 \varepsilon}$, independentment del valor de $x \in [0,1]$. Tenim així demostrada la convergència uniforme de P_n^f cap a f.

Comentaris:

- El teorema ha estat demostrat en l'interval $[0,1]$, per a estendre'l a qualsevol interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$, només cal fer primer una transformació afí que apliqui aquest darrer interval en $[0,1]$ com és usual en aquest tipus de resultats.

- En la mateixa línia, el teorema també es pot estendre a rectangles de $\mathbb{R}^k$, usant k successions independents de variables independents amb distribucions de Bernoulli.

- També cal remarcar que aquestes idees de Bernstein s'utilitzen per a provar altres teoremes d'aproximació, no necessàriament per polinomis, usant altres distribucions de probabilitat diferents de la distribució binomial. Una de les primeres generalitzacions és deguda a O. Szasz i usa la distribució de Poisson (vegi's [S]).

3 El mètode de Monte-Carlo

El *mètode de Monte-Carlo* és un mètode d'anàlisi numèrica que serveix per aproximar certes quantitats usant la generació de variables aleatòries. Pren el seu nom de la ciutat famosa pel seu casino. Els ordinadors generen números anomenats pseudo-aleatoris que poden passar com a observacions independents d'una variable aleatòria X amb distribució uniforme en l'interval $(0, 1)$. A partir de la distribució uniforme es poden generar d'altres distribucions amb mètodes més o menys eficients que no es comentaran en aquest article.

La idea bàsica del mètode de Monte-Carlo consisteix en representar la quantitat que es vol aproximar com l'esperança d'una certa variable aleatòria i usar la versió forta de la llei dels grans nombres.

Primer exemple

Volem calcular aproximadament

$$I = \int_{[0,1]^d} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_d\,,$$

amb f mesurable i acotada.

Observem que si $U_1, \ldots, U_d$ són variables aleatòries independents amb distribució uniforme en l'interval $(0, 1)$, aquesta integral no és més que

$$E(X), \quad \text{amb} \quad X = f(U_1, \ldots, U_d)\,.$$

Si $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ és una successió de variables aleatòries independents amb la mateixa llei que X, la llei forta dels grans nombres ens assegura que

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \longrightarrow E(X) = I, \quad \text{amb probabilitat } 1\,.$$

En quant a la simulació, només cal prendre una successió $U_1, \ldots, U_k, \ldots$ de variables independents amb distribució uniforme en $(0, 1)$ i a partir d'aquí simular una successió de variables independents amb la mateixa llei que X prenent

$$\begin{aligned} X_1 &= f(U_1, \ldots, U_d), \\ X_2 &= f(U_{d+1}, \ldots, U_{2d}), \\ &\vdots \\ X_n &= f(U_{(n-1)d+1}, \ldots, U_{nd}), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Per il·lustrar aquest resultat, l'aplicarem per aproximar el número π. Per tal de fer això usarem una idea totalment naïf. Donat que π és l'àrea del cercle unitat, es pot escriure com

$$\pi = 4 \int_{[0,1]^2} \mathbf{1}_{\{x^2+y^2 \leq 1\}}\, dx\, dy.$$

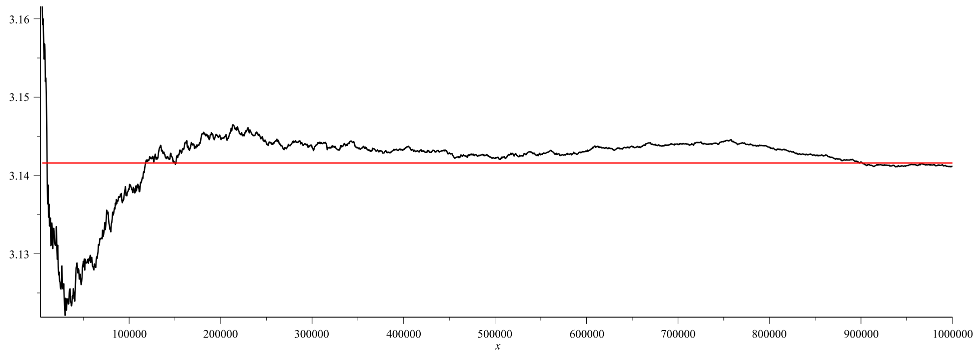
Aquí, donat un conjunt $A \subset \mathbb{R}^2$, estem denotant per $\mathbf{1}_A$, la funció indicatriu del conjunt A, és a dir aquella que val 1 si el punt és del conjunt i 0 en cas contrari. Així, el que es farà és simular vectors aleatoris (X_i, Y_i), independents amb distribució uniforme en el quadrat $[0,1]^2$, assignar el valor 1 si $X_i^2 + Y_i^2 \leq 1$ i 0 en cas contrari i fer les successives mitjanes, multiplicades per 4, que denotarem per W_n. La taula següent ens dóna els resultats obtinguts per a n igual a les successives potències de 10, des de 10^2 fins 10^6.

$\boldsymbol{n}$	10^2	10^3	10^4
$\boldsymbol{W_n}$	$\frac{85}{25} = 3.41$	$\frac{761}{250} = 3.1641$	$\frac{7847}{2500} = 3.1388$
$\boldsymbol{\lvert W_n - \pi \rvert}$	$\simeq 0.3 \times 10^{-1}$	$\simeq 0.7 \times 10^{-3/2}$	$\simeq 0.3 \times 10^{-2}$

$\boldsymbol{n}$	10^5	10^6	
$\boldsymbol{W_n}$	$\frac{78492}{25000} = 3.13968$	$\frac{785287}{250000} = 3.141148$	
$\boldsymbol{\lvert W_n - \pi \rvert}$	$\simeq 0.6 \times 10^{-5/2}$	$\simeq 0.5 \times 10^{-3}$	

Observem que l'error és de l'ordre d'un múltiple de $1/\sqrt{n}$. Més endavant veurem que l'ordre real de convergència és un múltiple de $\dfrac{\sqrt{\log\log(n)}}{\sqrt{n}}$, però per a $n = 10^6$, tenim que $\log\log(n) \simeq 1.62$ i és per això que no es nota l'efecte d'aquest terme.

També podem veure a la gràfica següent el comportament de la successió de les W_n (fins a $n = 6$). La línia horitzontal és la recta $y = \pi$.



Segon exemple

Pot semblar que amb aquest mètode només podrem aproximar integrals sobre $[0,1]^d$, però el mètode es pot utilitzar sempre que puguem escriure la nostra integral com

$$I = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, f(x)\, dx\,,$$

amb $f(x)$ funció de densitat, és a dir, f satisfent

- $f(x) \geq 0$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx = 1.$

En aquest cas, tindrem

$$I = E[g(X)] \ \text{ amb } \ X \ \text{ vector aleatori amb densitat } \ f(x).$$

Si generem vectors independents $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ amb la mateixa llei que X, tindrem, altre cop per la llei forta dels grans nombres,

$$Y_n = \frac{g(X_1) + \cdots + g(X_n)}{n} \longrightarrow E[g(X)] = I, \ \text{ amb probabilitat } \ 1.$$

Així, la llei forta dels grans nombres ens assegura que les nostres aproximacions convergeixen, amb probabilitat 1, cap a la quantitat que volíem aproximar. És a dir tenim un mètode convergent. Ara bé, en tot mètode numèric interessa saber quin és l'ordre de la convergència per tal de poder valorar la seva qualitat.

Ordre de convergència del mètode.

Si suposem que $E[g(X)]^2 < \infty$ i denotem $\sigma^2 = \mathrm{Var}[g(X)]$, el Teorema Central del Límit ens assegura que, per a n prou gran

$$P\left\{-a \leq \frac{Y_n - I}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a\right\} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-x^2/2} dx.$$

Aleshores, podem prendre a tal que la darrera integral sigui propera a 1 i tindrem

$$|Y_n - I| \le a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{C}{\sqrt{n}},$$

on C és una constant independent de n, amb aquesta probabilitat gran (aproximadament). Per exemple, si volem una probabilitat aproximada de 0.95 haurem de prendre $a = 1.96$. És a dir, si ens conformem amb probabilitats properes a 1 (però mai 1 !!) podríem dir que l'ordre de convergència és $C/\sqrt{n}$. Això, com a mètode numèric es considera dolent en dimensió $d = 1$, qualsevol mètode numèric d'integració "determinista" tindrà un ordre de convergència millor. Ara bé, aquest ordre de convergència és absolutament independent de la dimensió. Els mètodes numèrics tradicionals empitjoren en augmentar la dimensió (en particular, s'ha d'avaluar la funció que estem integrant en xarxes de n^d punts). També cal remarcar, que a diferència dels mètodes deterministes, l'ordre de convergència no depèn de la regularitat de la funció integrand.

Com hem dit, aquest ordre de convergència del tipus $C/\sqrt{n}$, només és "amb una probabilitat alta". Si fem tendir la probabilitat a 1, la constant $C = a\,\sigma$ tendeix a infinit. Per tenir l'ordre real de convergència del mètode hem d'usar la llei del logaritme iterat. En efecte, sabem que, prenent

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} g(X_i) = n\,Y_n,$$

tindrem que

$$\limsup_n \frac{|S_n - n\,I|}{\sigma\sqrt{2\,n\,\log\log n}} = 1, \quad \text{amb probabilitat 1.}$$

Per tant, per a qualsevol realització de la simulació (llevat d'un conjunt de simulacions de probabilitat zero) existeix un n prou gran tal que

$$\frac{|S_n - n\,I|}{\sigma\sqrt{2\,n\,\log\log n}} \le 2,$$

o equivalentment, amb probabilitat 1 i per a n prou gran,

$$|Y_n - I| = \left|\frac{S_n}{n} - I\right| \le 2\sqrt{2}\,\sigma \frac{\sqrt{\log\log n}}{\sqrt{n}}.$$

És a dir, l'ordre de convergència real serà del tipus

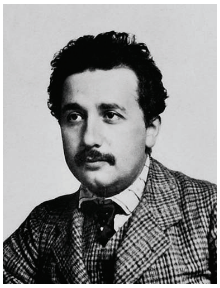
$$C\frac{\sqrt{\log\log n}}{\sqrt{n}},$$

que és millor que $C\,n^{-(\frac{1}{2}-\varepsilon)}$, per a tot $\varepsilon > 0$. Podem afirmar doncs que l'ordre de convergència no arriba a ser $C/\sqrt{n}$, però gairebé!

4 Representació probabilística de la solució d'equacions en derivades parcials

En aquest apartat es farà una introducció a un dels temes on hi ha més interacció entre la probabilitat i l'anàlisi. Es tracta de la representació en termes d'objectes probabilístics de la solució de certes equacions en derivades parcials. Aquesta representació sol ser en termes de l'esperança d'un cert funcional d'un procés estocàstic i això, a part de les possibles aplicacions a la teoria de les equacions en derivades parcials, permet aplicar el mètode de Monte-Carlo per a trobar aproximacions de la solució. A la referència [LPS] podeu trobar una presentació d'aquests resultats enfocada precisament a l'aplicació del mètode de Monte-Carlo.

Comencem definint el que és un procés estocàstic. Un procés estocàstic amb valors en $\mathbb{R}^d$ no és més que una família $\boldsymbol{X} = \{X_t,\, t \in T\}$ de vectors aleatoris amb valors a $\mathbb{R}^d$, definits en el mateix espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on T és un conjunt arbitrari, anomenat conjunt de paràmetres. Un dels casos més importants és quan $T = [0, \infty)$; en aquest cas, el paràmetre t s'interpreta com a temps i llavors el procés estocàstic és el model matemàtic d'un sistema que evoluciona aleatòriament al llarg del temps.

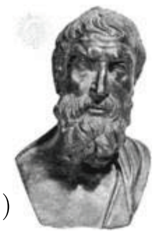


A. Einstein
(1879–1955)

El procés estocàstic més important (juga el paper de la llei normal en la teoria dels processos estocàstics) és el *moviment Brownià*, anomenat també *procés de Wiener*. Einstein el va introduir l'any 1905 com a primer model matemàtic per descriure el moviment erràtic de les partícules de pol·len suspeses en un líquid (per a l'article original en alemany, vegeu [E]; podeu trobar una traducció a l'anglès junt amb una recopilació dels seus treballs sobre el tema a [E2]). Aquest moviment rep el nom de *moviment Brownià* en honor del botànic Robert Brown que va observar aquest fenomen al segle XIX (vegeu [Br]), tot i que el científic i poeta romà Lucreci en el seu poema "De rerum natura" (any 60 abans de Crist) fa una descripció remarcable del moviment Brownià de les partícules de pols que usa com a demostració de l'existència dels àtoms, als que anomena *elements primordials*. El fragment on fa referència a aquest moviment (vegeu [L]) és el següent.

> *D'aquest fet, tal com l'explico, en tenim unes imatges i un model sempre presents i constants davant dels nostres ulls. Contempla, en efecte, cada vegada que els raigs de sol s'introdueixen a través de la penombra de les cases i hi difonen la llum: una munió de cossos menuts hi veuràs mesclar-se de mil maneres, a*

través del buit, en la mateixa llum dels raigs, i, com en una eterna contesa, guerrejar i entaular combats, lluitant per esquadrons, remoguts incessantment per reunions i dispersions; d'això podràs conjecturar com els elements primordials s'agiten sempre dins el buit immens, en la mesura, si més no, que una cosa petita pot servir-nos com a exemple de les grans i donar-nos una pista per a poder-les comprendre. Hi ha també una altra raó perquè observis amb més atenció aquests corpuscles que hom veu agitar-se en els raigs de sol, i és que tals moviments en tumult ens revelen que també se'n produeixen de secrets i invisibles en el fons de la matèria. Hi veuràs, en efecte, moltes d'aquestes partícules, sacsejades per cops imperceptibles, mudar de camí i tornar enrera rebutjades, aquí i allà, arreu, en totes direccions. I bé, aquest vagabundeig prové de tots els elements primordials. Aquests elements, en efecte, són els primers a moure's per ells mateixos; tot seguit, els cossos formats per una petita combinació i gairebé pròxims a l'energia dels elements primordials, impulsats per cops invisibles d'aquests, s'agiten i ells mateixos, encara, en mouen d'altres una mica més grossos. Així, dels elements primordials va ascendint el moviment i surt poc a poc fins als nostres sentits, fins a fer moure també aquelles partícules que podem veure en el raig de sol, tot i que no es posa de manifest per quins aürts es produeix tal moció.



Lucreci (99 a.C.–55 a.C.)

La definició de moviment Brownià que veurem aquí (que és la que s'usa actualment a la teoria dels processos estocàstics) és deguda al gran matemàtic Norbert Wiener. Considerem primer el cas 1-dimensional.

Definició. *Un moviment Brownià estàndard unidimensional és un procés estocàstic, amb valors a* $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{B} = \{B_t,\, t \geq 0\}$ *que compleix:*

1. $B_0 = 0$.

2. *Si* $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq \cdots \leq t_{2k-1} < t_{2k}$ *es compleix que les variables aleatòries*

$$B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_4} - B_{t_3}, \ldots, B_{t_{2k}} - B_{t_{2k-1}}$$

són independents. Aquesta propietat s'expressa breument dient que $\boldsymbol{B}$ *té increments independents.*

3. *Si* $s < t$ *aleshores l'increment* $B_t - B_s$ *té distribució normal amb mitjana* 0 *i variància la longitud de l'interval,* $t - s$*.*

4. *Té trajectòries contínues. És a dir, per a tot* $\omega \in \Omega$*, la funció*

$$\begin{array}{rcl} B^\omega : [0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & B_t(\omega) \end{array}$$

(que s'anomena trajectòria del procés) és contínua.

No és evident, però es pot demostrar que aquest objecte realment existeix. Això vol dir que es pot construir un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on $\boldsymbol{B}$ pot ser definit.

N. Wiener
(1894–1964)

Definim ara el moviment Brownià d-dimensional.

Definició. *Un moviment Brownià d-dimensional és un procés estocàstic amb valors en* $\mathbb{R}^d$*, tal que les seves components són moviments Brownians* 1*-dimensionals independents*

De les propietats (1) i (3) de la definició de moviment Brownià unidimensional i de la independència de les components del procés d-dimensional, es dedueix que si $\mathbf{B}$ és un moviment Brownià d-dimensional, cada vector aleatori B_t ($t > 0$) té distribució normal multivariant amb vector de mitjanes igual a 0 i matriu de variàncies-covariàncies igual $t{\cdot}\mathrm{Id}$, cosa que vol dir que té densitat donada per

$$p_t(x) = \frac{1}{(2\,\pi\,t)^{d/2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{2\,t}}\,,$$

on estem denotant per $\|x\|$ la norma euclidiana del vector $x \in \mathbb{R}^d$.

Una propietat molt important d'aquesta densitat és que és una solució de l'equació de la calor. És a dir, si definim $v(x,t) = p_t(x)$, llavors (és una simple comprovació) per a tot $t > 0$ i per a tot $x \in \mathbb{R}^d$, es compleix

$$\frac{\partial}{\partial t} v - \frac{1}{2}\,\Delta v = 0\,,$$

on Δ denota l'operador de Laplace respecte la variable x: $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Observem que $v(x,t)$ no està definida per a $t = 0$, ara bé, arguments analítics (usant que $p_t(x)$ és solució de l'equació de la calor i que, quan $t \downarrow 0$, és una aproximació de la identitat) permeten provar que a partir d'aquesta v es poden resoldre problemes de condició inicial. Concretament, es pot provar el resultat següent.

Teorema. *Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ i està acotada, aleshores*

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\,\pi\,t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{\|x-y\|^2}{2\,t}} f(y)\,dy$$

és l'única funció que compleix

1. $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$.
2. *Per a tot* $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t} u - \frac{1}{2}\Delta u = 0\,.$$

3. $\lim_{t \to 0+} u(x,t) = f(x)$ *per a tot* $x \in \mathbb{R}^d$.

És a dir, u és la solució del problema de condició inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0 \\ \\ \lim\limits_{t \downarrow 0} u(x,t) = f(x). \end{cases}$$

El resultat remarcable des del punt de vista de la relació entre probabilitats i anàlisi és que si $\boldsymbol{B}$ és un moviment Brownià d-dimensional, aleshores la funció $u(x,t)$ definida al teorema anterior es pot escriure com

$$u(x,t) = E[f(B_t + x)].$$

En efecte, calculem l'esperança que tenim en el membre dret de la igualtat anterior. Com B_t té distribució normal amb vector de mitjanes 0 i matriu de covariàncies $t{\cdot}\mathrm{Id}$, el vector aleatori $B_t + x$ tindrà distribució normal amb vector de mitjanes x i la mateixa matriu de covariàncies, amb la qual cosa, la seva densitat vindrà donada per

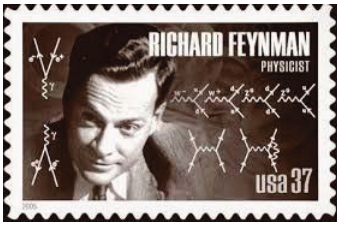
$$g(y) = \frac{1}{(2\,\pi\,t)^{d/2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{\|x-y\|^2}{2\,t}}$$

i així tindrem

$$E[f(B_t + x)] = \frac{1}{(2\,\pi\,t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, \mathrm{e}^{-\frac{\|x-y\|^2}{2\,t}}\, dy.$$

Com s'ha comentat abans, aquesta representació permet aplicar el mètode de Monte-Carlo per a resoldre numèricament l'equació en derivades parcials, mitjançant la simulació de trajectòries del moviment Brownià. Però no només és interessant per aquest motiu, de fet, usant aquest tipus de representacions, es poden demostrar més fàcilment moltes propietats analítiques. Per altra banda, aquestes representacions ens diuen també que les esperances de certs funcionals de processos estocàstics es poden calcular per mètodes purament analítics.

L'equació de la calor esmentada a dalt no és, ni de bon tros, l'única en què es pot trobar una representació probabilística de la seva solució. Les solucions de moltes equacions en derivades parcials parabòliques admeten una representació semblant a l'anterior que s'anomenen genèricament fórmules de Feynmann-Kac, en honor del premi Nobel de física Richard Feynmann i del gran matemàtic Mark Kac, que va donar la primera fórmula d'aquest tipus. Ara bé, per a provar aquestes representacions es necessita usar eines més sofisticades d'anàlisi estocàstica (que és un càlcul diferencial i integral amb processos estocàstics), com la celebrada fórmula d'Itô, i no es consideraran aquí. Només s'enunciarà, sense demostració (usa les tècniques d'anàlisi estocàstica que acabem de mencionar), una extensió del resultat anterior.



R.Feynman (1918–1988)

M. Kac (1914–1984)

Considerem el problema de condició inicial següent

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \dfrac{1}{2}\,\Delta u(x,t) + c(x)\,u(x,t), \ x \in \mathbb{R}^d, \ t > 0 \\[2ex] \lim\limits_{t \downarrow 0} u(x,t) = f(x), \end{cases}$$

amb f i c contínues i acotades. Aquest problema té solució única (això es prova per mètodes analítics) i es pot representar com

$$u(x,t) = E\Big[f(B_t + x)\,\exp\Big(\int_0^t c(x + B_s)\,ds\Big)\Big].$$

Les equacions que hem comentat fins aquí són del tipus parabòlic. Entre les moltes altres equacions en derivades parcials que admeten una representació probabilística de la solució, podem destacar el problema de Dirichlet.

Si D és un obert connex i acotat de $\mathbb{R}^d$ ens plantegem el problema de trobar una funció u, definida en $\overline{D}$, tal que

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & \text{per a } x \in D \\ u(x) = f(x), & \text{sobre } \partial D, \end{cases} \tag{4}$$

on f és una funció contínua sobre ∂D. Per a donar la interpretació probabilística de la solució, donat un punt $x \in D$, considerem un moviment Brownià d-dimensional $\mathbf{B}$ i definim el següent temps aleatori de sortida

$$\tau_x = \inf\{t \geq 0 : \, x + B_t \in D^c\}.$$

Aquest instant aleatori es pot interpretar com el primer instant en què el procés $\mathbf{B} + x$ (que en $t = 0$ pren el valor $x \in D$) surt del conjunt D. Si la frontera de D és prou regular, es pot demostrar que aquest instant és finit amb probabilitat 1, a més, la continuïtat del moviment Brownià fa que el procés $x + \mathbf{B}$ avaluat en l'instant aleatori τ_x (ho denotem com $x + B_{\tau_x}$) ens doni un punt de ∂D i, per tant, té sentit avaluar f en aquest punt. Així per a $x \in D$ definim

$$u(x) = E[f(x + B_{\tau_x})]\,.$$

Per altra banda, per a $x \in \partial D$, també podem definir τ_x i és igual a 0, per tant la fórmula anterior també s'aplica per a $x \in \partial D$ i ens dóna $u(x) = f(x)$. Aleshores, altre cop usant anàlisi estocàstica, es pot provar que la funció que acabem de definir ens dóna la representació probabilística de la solució. Més precisament, aquesta funció u és l'única funció de classe $C^2(D) \cap C(\overline{D})$ que és solució del problema de Dirichlet (4).

Referències

[Ba] X. Bardina, *Caminant a l'atzar tots els camins porten a Roma*. Materials Matemàtics (2008). http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2008/v2008n03.pdf.

[Be] S. N. Bernstein. *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités*. Communications of the Kharkov Mathematical Society 13 (1912). 1–2.

[Br] R. Brown. *A brief account of microscopical observations made on the particles contained in the pollen of plants*. Philosophical Magazine 4 (1828). 161–173.

[E] A. Einstein. *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen.* Annalen der Physik 17 (1905).

[E2] A. Einstein. *Investigations on the theory of the Brownian movement* Dover Publications, Inc., 1956.

[I] K. Itô. *Introduction to probability theory.* Cambridge University press, 1984.

[K] A. N. Kolmogorov. *Foundations of the theory of probability.* (Traducció de l'original alemany de 1933: 'Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung'). Chelsea Publishing Co., New York, 1956.

[L] Lucreci. *De la Natura* (Traducció de Miquel Dolç de "De rerum natura") dintre de la col.lecció Textos filosòfics d' Editorial Laia (1986).

[LPS] B. Lapeyre, É. Pardoux, R.Sentis. *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion.* Mathématiques & Applications (Berlin), 29. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[S] O. Szasz *Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval.* J. Research Nat. Bur. Standards 45, (1950). 239–245

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
mjolis@mat.uab.cat

Publicat el 30 de maig de 2013