

Models de població del món i prediccions

Armengol Gasull, Joan Torregrosa

La dinàmica de poblacions intenta descriure i predir com evoluciona la població d'una o varies espècies al llarg del temps. En aquest treball considerarem només el cas d'una espècie i més concretament el cas de la població humana. El que pretenem és, en poques paraules, predir com evolucionarà la població del món a partir de dades disponibles (estimades) de la població humana durant els darrers vint segles. L'existència de tauletes babilòniques d'argila, amb una antiguitat estimada de més de 3600

anys, mostra la preocupació que ja tenien en aquella època per un excés de població al món. Avui en dia això ens pot fer gràcia ja que s'estima que en aquell període la població total del món era menys d'un 0.2 per cent de la població actual però també l'extensió del món conegut era molt més petita.

Sembla ser que la primera estimació de la capacitat màxima de la Terra fou calculada l'any 1679 per l'holandès Antoni van Leeuwenhoek, comerciant, topògraf, vidrier i microbiòleg. Conegut com a pare de la microbiologia i inventor del microscopi, va fer una estimació de 13 385 milions de persones. Els seus càlculs es basaven en que, en aquella època, a Holanda hi havia entorn d'un milió de persones i que s'estimava que la superfície poblada a la Terra era d'uns 13 385 cops la d'Holanda (vegeu [4]).



Les fonts que hem utilitzat per a obtenir les dades en les que basarem el nostre estudi, i que mostrem a la Taula 1, són el web del cens dels EEUU¹ i el de la Divisió de Població del Departament d'Economia i Assumptes Socials de la ONU².

Del primer d'ells s'han obtingut les dades des de l'any 0 (de fet l'any 1, ja que l'any zero no va existir, però per simplicitat escriurem l'any 0) fins el 1950 i del segon d'aquest fins a l'actualitat. Fem notar també que els diferents experts no es posen d'acord sobre quina era la població del món en temps passats. De fet, el web consultat conté, per a certs anys, estimacions inferiors i superiors de la població total de la Terra. Nosaltres hem cregut raonable prendre la mitjana d'ambdues estimacions amb una precisió de tres xifres decimals. Cal precisar que treballar amb més dígitos no dona millors resultats. Especifiquem que mesurarem la població en milers de milions de persones, dividint per tant aquesta per 10^9 . Per exemple, quan diem que la població actual és 6.761 estem dient que és de 6 761 000 000 persones.

t	$P(t)$	t	$P(t)$	t	$P(t)$
0	0.285	1350	0.443	1940	2.300
200	0.223	1400	0.362	1950	2.535
400	0.198	1500	0.483	1955	2.771
500	0.198	1600	0.562	1960	3.032
600	0.203	1650	0.508	1965	3.343
700	0.209	1700	0.640	1970	3.699
800	0.222	1750	0.795	1975	4.076
900	0.233	1800	0.969	1980	4.451
1000	0.300	1850	1.265	1985	4.855
1100	0.311	1900	1.656	1990	5.295
1200	0.405	1910	1.750	1995	5.719
1250	0.408	1920	1.860	2000	6.124
1300	0.396	1930	2.070	2005	6.515

Taula 1: Població del món en milers de milions entre l'any 0 i el 2005.

A partir de les dades de la Taula 1 obtenim el gràfic de la Figura 1.

¹ <http://www.census.gov/ipc/www/idb/worldpopinfo.html>

² <http://esa.un.org/unpp>

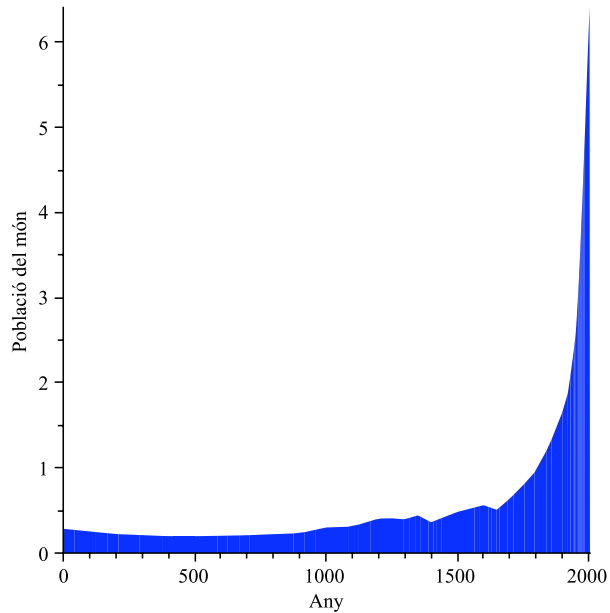


Figura 1: Representació gràfica de les dades de la Taula 1.

Un dels indicadors més usats per a predir el creixement d'una població és l'anomenada *taxa de creixement*. Suposem que tenim una funció $P = p(t)$, derivable, que ens indica la població $p(t)$ a cada instant t . Aleshores la taxa de creixement a l'instant t és, per definició,

$$f(t) = \frac{p'(t)}{p(t)}.$$

Quan la relació $P = p(t)$ es pot invertir obtenim $t = p^{-1}(P)$ i aleshores la taxa de creixement es pot pensar com una funció que depèn de P (la població existent), en lloc de pensar-la com una funció de t . Anomenarem de nou a aquesta funció taxa de creixement i la denotem per $F(P) = f(p^{-1}(P))$. Observem que tenim la relació

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = F(p(t)),$$

que és equivalent a l'equació diferencial

$$\frac{dp(t)}{dt} = p(t)F(p(t)).$$

Aquesta equació diferencial és la que, en aquest article, ens donarà models per a determinar l'evolució de la població. Com es pot observar l'equació anterior no depèn explícitament del temps. Les equacions d'aquest tipus s'anomenen autònomes. Tot i que es podrien donar models no autònoms, en que la funció F depèn explícitament del temps, aquest tractament no és molt habitual en els models de població. Sí que ho és en canvi a l'estudi de models de població en grups estructurats per edats, per tal de tenir en compte, per exemple, que no tots els individus són fèrtils desde el seu naixement. En la següent secció es detallen alguns dels models autònoms més coneguts i, en particular, els que farem servir en aquest treball.

1 Els models

Els diferents models per a predir l'evolució d'una població es poden formular a partir d'hipòtesis (basades en l'observació experimental) sobre la taxa de creixement, és a dir de la funció F en l'equació diferencial donada a la secció anterior. En aquest treball considerarem els models següents:

- De Malthus: la taxa de creixement és constant, $F_0(P) = a$.
- De Verhulst: la taxa de creixement és lineal, $F_1(P) = a + bP$.
- Quadràtic: la taxa de creixement és quadràtica, $F_2(P) = a + bP + cP^2$.
- De Gompertz: la taxa de creixement és $F_3(P) = a + d \ln(P)$.

Aquests no són, ni molt menys, els únics models possibles. Per exemple a [1, Cap. 15] es considera una taxa de la forma $F(P) = cP^2$ i es calculen, usant aquest model, estimacions senzilles del nombre total de persones que ha viscut a la Terra, en algun moment de la Història. Aquesta qüestió sempre ha interessat a la Humanitat i recentment (2002) s'ha estimat aquest nombre amb diversos mètodes, arribant a una xifra d'uns 106 mil milions de persones, vegeu [6, 7]. En altres paraules, l'any 2002 (la població era d'uns sis mil milions) aproximament un 5.8 per cent de la gent que ha existit estava viva. Avui en dia el resultat és pràcticament el mateix.

Thomas Robert Malthus (1766–1834), que va ser un economista anglès, és considerat el pare de la demografia. L'any 1798 va introduir el seu famós model de creixement de la població en progressió geomètrica. Aquesta consideració, conjuntament amb l'observació que els mitjans de subsistència creixen



T. R. Malthus



P. F. Verhulst



B. Gompertz

més lentament, seguint una progressió aritmètica, el va portar a concloure que la població es trobaria amb la falta de recursos (l'anomenada “catàstrofe malthusiana”). Aquest fenomen no s'ha produït, en part, pel fet que els avanços en la agricultura han permès un augment de la producció en una proporció més o menys geomètrica. Pierre François Verhulst (1804–1849) va ser un matemàtic belga, especialista en teoria de nombres, conegut precisament per introduir el 1825 el model que reb el seu nom, també anomenat *model logístic*. Aquest model va ser redescobert i popularitzat el 1920 pels científics americans Raymond Pearl i Lowell Reed. Benjamin Gompertz (1779–1865), va ser un matemàtic autodidacta, conegut per introduir el 1819 una altra variació del model de Malthus per a estudiar l'evolució d'una població. Aquest model també l'han usat les companyies asseguradores per a calcular les tarifes de les assegurances de vida.

2 Estimacions de les taxes de creixement

A partir de les dades de la Taula 1 es pot calcular la taxa de creixement aproximada, $\tilde{f}(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, 38$, com

$$\tilde{f}(t_i) := \frac{P(t_{i+1}) - P(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \simeq \frac{P'(t_i)}{P(t_i)} = f(t_i), \quad (\text{T})$$

on els t_i són els anys donats a la taula, així $t_1 = 0, t_2 = 200, \dots, t_{39} = 2005$. Per exemple,

$$\tilde{f}(1985) = \frac{5.295 - 4.855}{1990 - 1985} \simeq 0.01812564,$$

i per tant $\tilde{F}(4.855) \simeq 0.01812564$. A la Figura 2 mostrem els valors de la taxa de creixement aproximada $\tilde{F}(P_i) = \tilde{f}(p^{-1}(P_i)) = \tilde{f}(t_i)$ en funció de la població P_i .

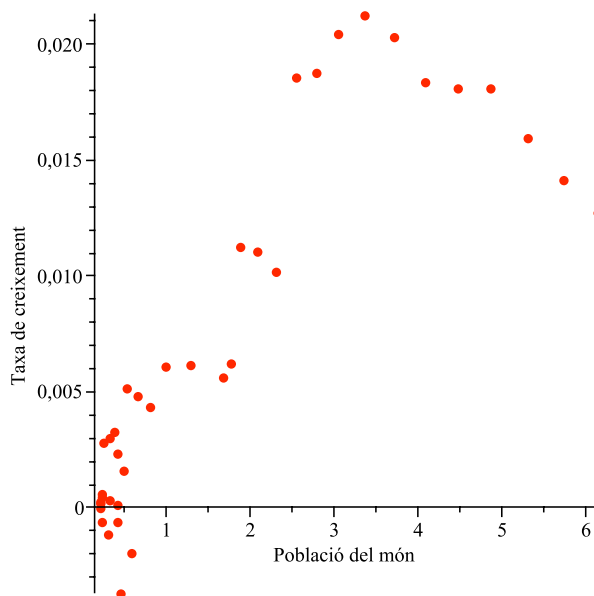


Figura 2: Taxa de creixement aproximada $\tilde{F}(P)$ usant les dades de la Taula 1 i la fórmula (T).

De l'observació qualitativa i quantitativa de la Figura 2 podem treure les següents conclusions:

- Entre els anys 1950 i 1985 (població entre 2.5 i 4.9) la taxa de creixement estava bastant estabilitzada al voltant de 0.02, a prop del que ha estat el seu màxim. Per tant, era raonable pensar, en aquell període, que $F_0(P)$ es mantenia constant. Nosaltres prendrem

$$F_0(P) = 0.0193. \quad (0)$$

Aquest valor que hem calculat com la mitjana de les taxes de creixement entre els anys 1950 i 1985, correspon a la recta horitzontal de mínims quadrats, vegeu la Figura 3. Es podria pensar que, com són taxes de creixement, és més raonable fer la mitjana geomètrica³ d'aquestes per a calcular $F_0(P)$. Fent-ho en aquest cas, hem comprovat que la diferència entre ambdues mitjanes és menor que 10^{-6} . De fet, en general, es pot demostrar usant la fórmula de Taylor en varies variables que, si x_1, x_2, \dots, x_k són números positius, es té

$$\sqrt[k]{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)} - 1 = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} + O(2),$$

on $O(2)$ denota el terme de l'error. Aquest terme és més petit com més petits són tots els productes $x_i x_j$, variant i i j . A més, és zero quan totes les x_i són iguals. Com en el nostre cas els valors x_i tenen tots un valor semblant, i aquest valor és de l'ordre de 0.02, l'error $O(2)$ ha de ser petit, tal i com hem constatat en fer els càlculs.

- Si només tenim en compte les dades des de 1965 (població 3.343) fins a l'actualitat i fem la gràfica de la taxa de creixement versus la població existent, veiem que aquesta s'ajusta bastant bé a l'equació d'una recta, vegeu la Figura 3 per a tenir una constatació gràfica d'aquest fet. Si calculem la recta de mínims quadrats obtenim l'equació

$$F_1(P) = 0.0311338 - 0.00292213P, \quad (1)$$

vegeu com fer-ho, per exemple, a [3, Sec. 8.1]. Per tant té sentit prendre el model Verhulst amb aquests valors dels paràmetres per a estudiar la població total de la Terra els darrers temps.

- A partir de la Figura 2, sembla raonable aproximar per una paràbola les dades d'aquests dos mil·lenis. La paràbola de mínims quadrats que obtenim, usant de nou el mètode explicat a [3, Sec. 8.1], és:

$$F_2(P) = -0.00268921 + 0.0101267P - 0.00121812P^2, \quad (2)$$

vegeu un cop més la Figura 3.

³Suposem, per exemple, que tenim una certa quantitat Q al banc, i que el primer més ens dona un interès de 2 per cent (0.02 per 1) i durant el segon més un 10 per cent (0.1 per 1). Per tant, la quantitat que tindrem al final dels dos mesos serà $Q \times 1.02 \times 1.1$. El resultat és el mateix que tenir-la cada mes a un interès constant del $\sqrt{1.02 \times 1.1} - 1 \simeq 0.0592$ per 1, és a dir d'un 5.92 per cent, que no és pas la mitjana aritmètica dels interessos.

- El model de Gompertz no sembla adient pel nostre problema ja que fent les gràfiques de la funció $F_3(P) = a + d \ln(P)$, variant a i d , constatem que mai s'assemblen a la forma que presenten les dades de la Figura 2.

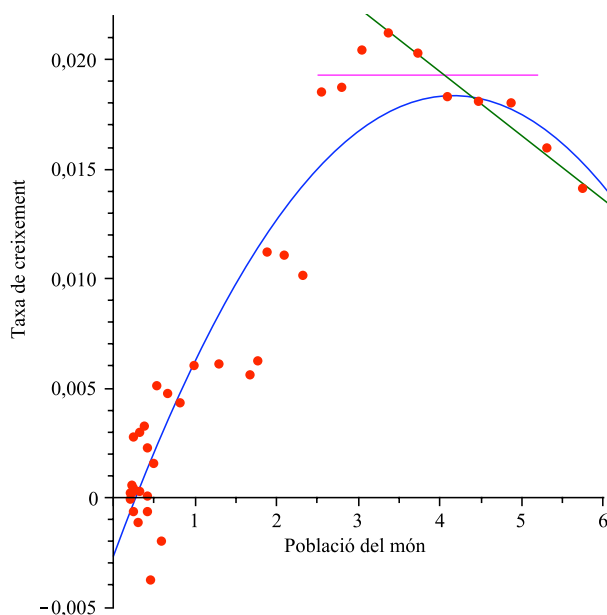


Figura 3: Taxes de creixement versus població. S'han afegit també les gràfiques de les aproximacions constant, lineal i quadràtica.

A les subseccions següents veurem les prediccions de la població total del món segons els tres models donats per les taxes $F_i(P)$, $i = 0, 1, 2$.

2.1 Prediccions del model de Malthus

Per a aquest model, en que la taxa de creixement és constant, tenim que

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap(t),$$

on $a = F_0(P) = 0.0193$, segons l'equació (0), prenent, com s'ha indicat anteriorment, les dades de la població del món de 1950 a 1985. Si busquem la solució que a l'any t_0 val $p(t_0) = p_0$ obtenim que $p(t) = p_0 e^{a(t-t_0)}$. Prenent

$t_0 = 1950$ i $p_0 = 2.535$ arribem a la següent predicció pel nombre d'habitants de la Terra:

$$p(t) = 2.535 e^{0.0193(t-1950)}.$$

Per exemple, per a l'any actual tenim

$$p(2009) = 2.535 e^{0.0193 \times 59} \simeq 7.916,$$

que està bastant per sobre de la població actual real (recordem que és aproximadament 6.761). A més, aquest model preveu que la població de la Terra creixerà indefinidament. Encara que només sigui per problemes d'espai, la superfície de la Terra és limitada, és clar que això no pot passar. En altres paraules, el model de Malthus només pot ésser vàlid per a períodes concrets de temps, però no per a fer prediccions a llarg termini. A continuació veurem el model de Verhulst, que no presenta aquesta limitació. És clar també, a partir de les dades de la Figura 2, que la taxa de creixement constant no és un model per a descriure la situació actual i fer prediccions de futur, ni a curt ni a llarg termini.

2.2 Prediccions del model de Verhulst

En aquest cas, en que la taxa de creixement és lineal, la població és la solució de l'equació diferencial

$$\frac{dp(t)}{dt} = p(t)(a + bp(t)),$$

que compleix $p(t_0) = p_0$. Considerarem a més que $ab \neq 0$. Usant el mètode de separació de variables obtenim que la solució de l'equació diferencial anterior, sempre i quan $p_0 \notin \{-a/b, 0\}$, és

$$\int_{p_0}^p \frac{dq}{q(a + bq)} = \int_{t_0}^t dt.$$

Si $p_0 = -a/b$ (resp. $p_0 = 0$) aleshores la solució és $p(t) = -a/b$ (resp. $p(t) = 0$). Com que

$$\int \frac{dq}{q(a + bq)} = \int \frac{1}{a} \left(\frac{1}{q} - \frac{b}{a + bq} \right) dq = \frac{1}{a} \log \left| \frac{q}{a + bq} \right|,$$

tenim que

$$\frac{1}{a} \log \left| \frac{q}{a + bq} \right| \Big|_{q=p_0}^{q=p} = t - t_0,$$

o equivalentment,

$$\frac{p(a + bp_0)}{p_0(a + bp)} = e^{a(t-t_0)}. \quad (3)$$

Aïllant p obtenim la solució

$$p = p(t) = \frac{ap_0}{(a + bp_0)e^{-a(t-t_0)} - bp_0}.$$

Substituint en aquesta expressió a i b pels valors donats a (1) i, per exemple $t_0 = 1965$ i $p_0 = 3.343$ (recordem que només hem pres les dades desde l'any 1965), hem arribat a una nova expressió⁴

$$p(t) = \frac{0.1040802934}{0.02136511941 e^{0.0311338(1965-t)} + 0.00976868059}$$

de la població del món, les prediccions del qual es mostren a la Taula 2. La gràfica d'aquesta funció és la famosa corba logística, vegeu la Figura 4. Per exemple, s'ha comprovat també que una corba logística s'ajusta a la població que han tingut els EUA del 1790 al 1950, amb un error de menys d'un 4%, vegeu [2, p. 31] o [5, p. 411].

Tant observant la corba logística donada a la Figura 4 com les dades de la Taula 2 arribem a la conclusió de que la població del món s'estabilitzaria a partir de l'any 2200 en una població d'uns 10.654. Aquest resultat concorda essencialment amb altres previsions que han fet diverses institucions. Per exemple al treball [4] es parla d'una població de 9.100 a l'any 2050, mentre que la nostra previsió és de 9.220. Es poden també comparar els nostres resultats amb l'informe que el Departament d'Assumptes Socials i Econòmics de l'ONU va encarregar quan, l'any 1999, el món va arribar als 6 mil milions d'habitants. Aquest estudi es titula *The World at Six Billion*⁵, vegeu [8]. En aquest informe es diu que l'estabilització es produirà després de l'any 2200 i que serà en una població d'una mica més de deu mil milions de persones.

⁴En tot el treball els càlculs s'han de fer amb un nombre suficient de xifres significatives, per a tenir en compte el creixement (o decreixent) ràpid de les funcions exponencials involucrades.

⁵Recordeu que un bilió americà correspon a mil milions europeus

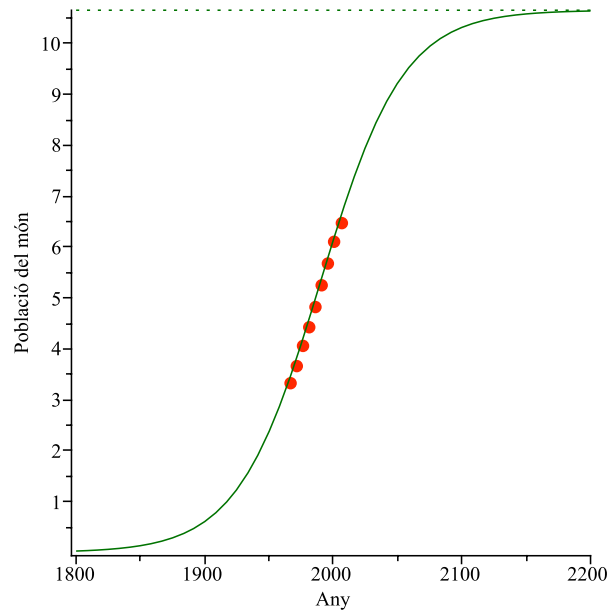


Figura 4: Corba logística donada pel model de Verhulst. La població (vertical) s'ha donat en milers de milions i el temps (horitzontal) en anys.

Any	Dades reals	Model Verhulst	Any	Model Verhulst
1960	3.032	2.997	2010	6.924
1965	3.343	3.343	2020	7.634
1970	3.699	3.696	2030	8.259
1975	4.076	4.092	2040	8.785
1980	4.451	4.475	2050	9.220
1985	4.855	4.896	2100	10.317
1990	5.295	5.321	2150	10.581
1995	5.719	5.718	2200	10.638
2000	6.124	6.140	2250	10.651
2005	6.515	6.526	2300	10.654

Taula 2: Predicció de la població del món usant el model de Verhulst.

També es comenta que les poblacions 7, 8, 9 i 10 mil milions d'habitants s'assolirien els anys 2013, 2028, 2054 i 2183, respectivament.

A partir de l'expressió (3) del model de Verhulst, veiem per exemple que l'any en que la població arribarà a 7 mil milions és

$$t = t_0 + \frac{1}{a} \ln \left(\frac{7(a + bp_0)}{p_0(a + 7b)} \right) \simeq 2011,$$

on recordem que totes les dades a, b, t_0 i p_0 són les usades en aquesta secció. Fent el mateix amb les altres poblacions esmentades (8, 9 i 10 mil milions) obtenim els anys 2026, 2045 i 2078, respectivament. Observeu que les primeres previsions s'assemblen moltíssim a les de l'estudi de l'ONU.

Per a acabar aquesta secció notem que calcular el valor en el que s'estabilitzarà la població del món seguint aquest model es redueix a resoldre l'equació $F_1(P) = 0$ donada a (1), d'on obtenim $P = \bar{p} \simeq 10.655$. Això és degut a que $P = 0$ i $P = \bar{p}$ són les solucions constants de l'equació de Verhulst, anomenades també punts crítics o solucions d'equilibri de la mateixa. Si en una recta situem aquests punts crítics, juntament amb unes fletxes que ens indiquen quan $p'(t)$ és positiva o negativa, usant que

$$p'(t) = p(t) (0.0311338 - 0.00292213p(t)),$$

obtenim el que s'anomena *retrat de fase* de l'equació diferencial, vegeu la Figura 5.



Figura 5: Retrat de fase del model de Verhulst.

Observem que el retrat de fase ens indica de manera esquemàtica el comportament de la població al llarg del temps. Per exemple veiem que, sigui quina sigui la població inicial $P = p_0 > 0$, quan el temps augmenta la població tendeix a la població d'equilibri atractora $P = \bar{p}$. Si volem quantificar aquesta tendència cal resoldre l'equació diferencial de Verhulst i estudiar les corbes logístiques que expressen les seves solucions, tal i com hem fet a l'inici d'aquesta secció.

2.3 Prediccions del model Quadràtic

En aquest model, en que la taxa de creixement és una funció quadràtica, estudiarem l'equació diferencial

$$p'(t) = p(t)F_2(p(t)) = p(t)(a + bp(t) + cp^2(t)) = cp(t)(p(t) - p^-)(p(t) - p^+), \quad (4)$$

on hem aplicat, per tal de facilitar els càlculs, que

$$F_2(P) = a + bP + cP^2 = c(P - p^-)(P - p^+), \quad \text{on } p^\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}.$$

Amb les estimacions obtingudes a (2), tenim que $c \simeq -0.00121812$, $p^- \simeq 0.274629$ i $p^+ \simeq 8.03876$. Fent primer un estudi qualitatiu semblant al que acabem de fer pel model de Verhulst obtenim que el retrat de fase del model Quadràtic (4) és el donat a la Figura 6.



Figura 6: Retrat de fase del model Quadràtic.

Una primera conclusió (sorprenent) és que hi ha dues poblacions d'equilibri atractores que són $P = 0$ i $P = p^+ \simeq 8.039$ i una població $P = p^- \simeq 0.275$ d'equilibri repulsora, perquè ens allunyen d'ella quan el temps passa. Observem que la primera de les poblacions d'equilibri atractora correspon a la total extinció de l'espècie humana, mentre que la segona d'elles és ostensiblement menor que la predita pel model de Verhulst (10.655). A més, la primera possibilitat succeeix quan la població inicial és menor que p^- . A les dades de la Taula 1 s'observa que aquest situació ja s'ha donat (essencialment durant el primer mil·lenni de la nostra era) i que, per sort, l'evolució ha estat totalment diferent. D'altra banda si calculem la població estimada per a l'any 0 segons el model de Verhulst obtingut a la secció anterior obtenim que és molt propera a zero, valor que tampoc està gens en concordança amb les dades reals. Ens centrarem doncs en el futur, resolent l'equació diferencial per a quantificar les prediccions del model Quadràtic i poder-les comparar amb les del model de Verhulst.

Usant de nou el mètode de separació de variables, tenim que la solució de

(4), suposant que $c \neq 0$ i $0 < p^- < p^+$, quan $p(0) = p_0$ i $p_0 \notin \{0, p^-, p^+\}$, és

$$\int_{p_0}^p \frac{1}{cq(q-p^-)(q-p^+)} dq = \int_{t_0}^t dt.$$

Descomposant la funció de l'esquerra en fraccions simples tenim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int_{p_0}^p \left[\frac{1}{p^+p^-} \cdot \frac{1}{q} + \frac{1}{p^-(p^- - p^+)} \cdot \frac{1}{q - p^-} + \frac{1}{p^+(p^+ - p^-)} \cdot \frac{1}{q - p^+} \right] dq \\ = \int_{t_0}^t dt. \end{aligned}$$

És a dir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \left[\frac{1}{p^+p^-} \ln |q| + \frac{1}{p^-(p^- - p^+)} \ln |q - p^-| + \frac{1}{p^+(p^+ - p^-)} \ln |q - p^+| \right] \Bigg|_{q=p_0}^{q=p} \\ = t - t_0, \end{aligned}$$

d'on obtenim

$$\frac{1}{c} \ln \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{p^+p^-}} \left(\frac{p - p^-}{p_0 - p^-} \right)^{\frac{1}{p^-(p^- - p^+)}} \left(\frac{p - p^+}{p_0 - p^+} \right)^{\frac{1}{p^+(p^+ - p^-)}} \right] = t - t_0,$$

o equivalentment,

$$\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{p^+p^-}} \left(\frac{p - p^-}{p_0 - p^-} \right)^{\frac{1}{p^-(p^- - p^+)}} \left(\frac{p - p^+}{p_0 - p^+} \right)^{\frac{1}{p^+(p^+ - p^-)}} = e^{c(t-t_0)}.$$

Aquesta igualtat ens dóna una solució implícita de l'equació diferencial, en la que és fàcil obtenir t en funció de p , però no p en funció de t .

Si prenem de nou com a dades inicials $t_0 = 1965$ i $p_0 = 0.343$ i els valors de c , p^- i p^+ especificats a l'inici d'aquesta secció obtenim la predicció de la població de la Terra segons el model Quadràtic. Aquesta predicció, començant des de 1800, es mostra gràficament a la Figura 7 tot comparant-la amb la donada pel model logístic.

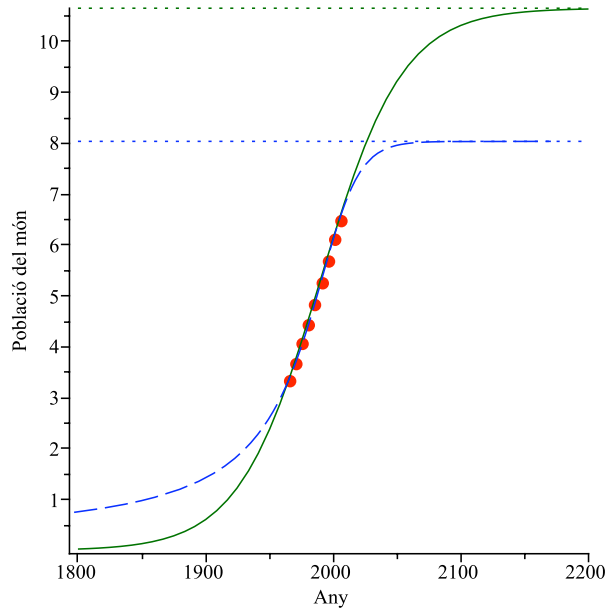


Figura 7: Models de Verhulst (línea contínua) i Quadràtic (línea discontinua). Els cercles plens representen les dades reals i el temps està mesurat en anys.

3 Comparacions entre les prediccions. Mesura de l'error

La Figura 7 mostra, gràficament, les prediccions dels dos darrers models plantejats, però per a donar una mesura d'aquestes diferències i establir amb quin s'obté una millor aproximació per a les dades històriques, introduïren una mesura de l'error. Cal fer esment que les dades inicials, $t_0 = 1965$ i $p_0 = 0.343$, són les mateixes per als dos models. Sigui $P = G(t)$ una funció candidata a aproximar les dades de la Taula 1 per a un cert interval de temps $[t_m, t_M]$. Com és usual, definim l'error associat amb aquesta funció en aquest interval com

$$E^G(t_m, t_M) = \sum_{\{i, t_i \in [t_m, t_M]\}} (G(t_i) - P(t_i))^2.$$

Si anomenem E^V i E^Q aquests errors globals associats a les funcions

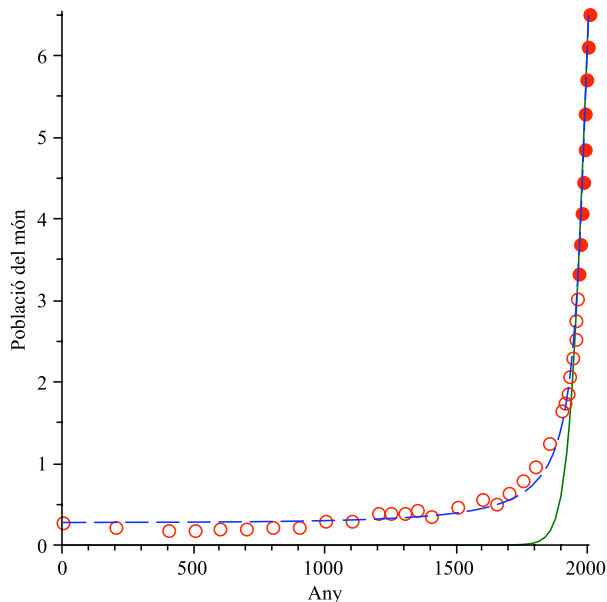


Figura 8: Població del món segons el model de Verhulst (línia contínua) i el model Quadràtic (línia discontinua). Els cercles i els cercles plens (úniques dades usades per a obtenir la aproximació obtinguda usant el model de Verhulst) representen les dades conegudes.

donades pels models de Verhulst i Quadràtic, respectivament, resulta:

$$\begin{aligned} E^V(1965, 2005) &\simeq 0.0766, & E^Q(1965, 2005) &\simeq 0.1355, \\ E^V(0, 2005) &\simeq 2.9426, & E^Q(0, 2005) &\simeq 0.6174. \end{aligned}$$

Observem que, si ens restringim a l'interval $[1965, 2005]$, els dos models donen resultats petits i molt semblants, mentre que, si es prenen totes les dades, el model Quadràtic s'ajusta sensiblement millor. Vegeu també la Figura 8 per a observar gràficament les diferències entre els dos models i la comparació amb les dades reals.

La Taula 3 mostra la similitud de les prediccions entre els dos models de l'any 1960 fins el 2005, i com aquesta igualtat es va trencant a mesura que els anys passen. Aquest fet es pot observar també a la Figura 7.

Any	Dades reals	Verhulst	Quadràtic	Any	Verhulst	Quadràtic
1960	3.032	2.997	3.067	2010	6.924	6.866
1965	3.343	3.343	3.343	2020	7.634	7.394
1970	3.699	3.696	3.654	2030	8.259	7.710
1975	4.076	4.092	4.003	2040	8.785	7.878
1980	4.451	4.475	4.387	2050	9.220	7.962
1985	4.855	4.896	4.803	2100	10.317	8.037
1990	5.295	5.321	5.240	2150	10.581	8.039
1995	5.719	5.718	5.684	2200	10.638	8.039
2000	6.124	6.140	6.116	2250	10.651	8.039
2005	6.515	6.526	6.515	2300	10.654	8.039

Taula 3: Comparació entre els models de Verhulst i Quadràtic.

4 Consideracions finals

Amb un model extremadament senzill, el de Verhulst, i prenent només les dades reals des de 1965 fins a 2005, s'obté una estimació per a la població total del món que no difereix gaire de l'obtinguda per l'estudi de l'ONU. La coincidència és remarcable ja que aquest estudi té en compte factors demogràfics i locals i nosaltres suposem la població de la Terra com un tot. Comentarem breument per exemple que a l'any 2050 es parla d'una població 8.909, distribuïda com s'indica a la Taula 4. Vegeu també el tant per cent de contribució a la població total que s'espera que tingui cada continent a la Figura 9.

Any	Àfrica	Amèrica	Àsia	Europa	Oceania	TOTAL
1999	0.767	0.818	3.634	0.729	0.030	5.978
2050	1.766	1.210	5.268	0.628	0.046	8.909
2150	2.308	1.310	5.561	0.517	0.051	9.746

Taula 4: Distribució de la població al món a 1999, 2050 i 2150 segons l'estudi de l'ONU.

Com un altre exemple de com de poc uniforme és l'evolució de la població a diverses parts del món comentarem algunes estimacions donades a [4]:

- En menys de 50 anys, països com Afganistan, Burkina Faso, Burun-

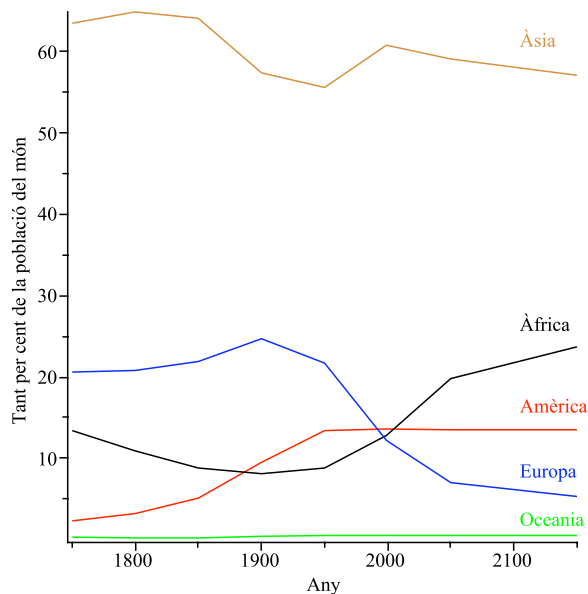


Figura 9: Tant per cent de la població total del món repartida per continents, desde l'any 1750, segons l'estudi de l'ONU.

di, Txad, Congo, República Democràtica del Congo, Timor Oriental, Guinea-Bissau, Libèria, Mali i Uganda poden triplicar la seva població.

- Es preveu que quasi la meitat de l'increment de població mundial fins a l'any 2050 es concentri a l'Índia, Pakistan, Nigèria, República Democràtica del Congo, Bangladesh, Uganda, EEUU, Etiòpia i Xina.
- A països com Japó, Alemanya i especialment la Federació Russa, grans i bastant poblats, està previst que en aquest període disminueixi fortament la població.

El nostre estudi usant el model Quadràtic és un exercici purament teòric. Per això, tot i que la correspondència entre les dades conegudes fins el moment i les obtingudes per aquest model és millor que la donada pel model de Verhulst, no ens atrevim a dir que aquest dona una millor previsió de l'evolució de la població del món. No hi ha cap motiu “demogràfic” per dir que una taxa de creixement quadràtica sigui més raonable que una lineal. També entenem el model de Verhulst com força adient atès que últimament

s'observa que aquesta taxa varia linealment amb la població i que el que va passar fa més de cinc cents anys no té perquè afectar a l'evolució de la població en els propers anys.

Acabem el treball amb un últim comentari de caire matemàtic. En el càlcul aproximat de les taxes de creixement fet a la Secció 2 aproximem $P'(t_i)$ pel quocient incremental

$$P'(t_i) \simeq \frac{P(t_{i+1}) - P(t_i)}{t_{i+1} - t_i}.$$

L'error d'aquesta aproximació és de l'ordre de $(t_{i+1} - t_i)^2$. En les dades de la Taula 1, les quantitats $t_{i+1} - t_i$ no són gens petites. En particular comencen sent 200 i acaben essent 5. Per tal d'intentar afinar més les nostres estimacions, especialment les obtingudes usant el model de Verhulst, i tenint en compte que des de 1965 es tenen dades de la població real, any a any, hem refet els nostres càlculs amb totes les dades des de 1965 fins a 2008, usant el model de Verhulst. Hem arribat a una població total d'equilibri de 10.690, molt semblant al 10.654 obtingut usant només les dades de la Taula 1.

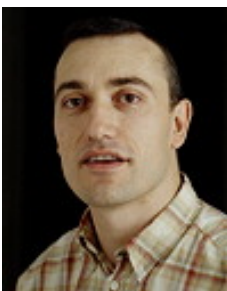
Referències

- [1] R. B. Banks. *Slicing Pizzas, Racing Turtles, and Further Adventures in Applied Mathematics*, Princenton University Press, 1999.
- [2] M. Braun. *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1990.
- [3] R. L. Burden i J. D. Faires. *Anàlisis Numérico* (sisena edició), International Thomson Editores, 1998.
- [4] J. E. Cohen. *Tendencias demográficas*, Investigación y Ciencia, 10–17, Nov. 2005
- [5] F. R. Giordano, M. D. Weir, W. P. Fox i W. P. Fox. *A First Course in Mathematical Modeling* (quarta edició), Brooks/Cole Pub Co, 2009.
- [6] C. Hurb. *How Many People Have Ever Lived on Earth?* Publicació electrònica de “The Population Reference Bureau”, Nov.-Dec. 2002.
<http://www.prb.org/Articles/2002/HowManyPeopleHaveEverLivedonEarth.aspx>

- [7] G. D. Paige. Capítol *How many people have ever lived? Keyfitz's calculation updated* del llibre "Non-killing Political Science", accessible a <http://www.math.hawaii.edu/~ramsey/People.html>
- [8] Estudi "The World at Six Billion" de les Nacions Unides, accessible a <http://www.un.org/esa/population/publications/sixbillion/sixbillion.htm>



Armengol Gasull
Departament de matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
gasull@mat.uab.cat



Joan Torregrosa
Departament de matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
torre@mat.uab.cat

Publicat el 27 de maig de 2009