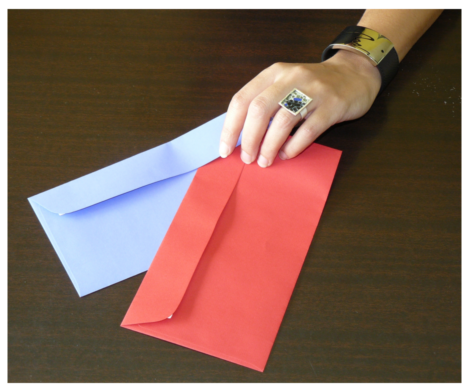
MAT²
MATerials MATemàtics
Volum 2008, treball no. 6, 27 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

La paradoxa dels dos sobres: models del joc i simulacions

Mercè Farré



En aquest treball s'analitza un joc de premis que planteja un problema de decisió "canviar o no canviar", conegut com la *paradoxa dels dos sobres*. L'objectiu és provar que no hi ha paradoxa. Es posa de manifest que una causa de l'aparent paradoxa és una descripció poc detallada, o fins i tot equívoca, del joc que permet situar-lo en diferents escenaris experimentals, si bé a cada escenari hi ha una solució única. Una altra font de paradoxa és confondre esperança (total) i esperança condicionada. Es descriuen amb detall diversos models probabilístics per al joc en certs supòsits i, en cada cas, es calculen els guanys esperats a tots dos sobres, sense ambigüitat, sense paradoxa. Alguns resultats s'il·lustren amb dades obtingudes mitjançant simulació. Es tracta essencialment el cas d'un nombre finit de quantitats (premis), amb una breu referència al cas infinit numerable.

1 Introducció

Es tracta d'un joc que històricament du associada una paradoxa: és l'anomenat *problema dels dos sobres*, en relació al qual podeu trobar nombrosa literatura publicada arreu. Només cal anar a un cercador o a la *wikipedia* i buscar "dos sobres", "two envelopes problem", "two envelopes puzzle", "two envelop paradox", "the exchange paradox", etc. A les referències, hi trobareu una ínfima part de les publicacions relacionades amb el tema.

L'experiment (aleatori) es pot plantejar com un joc interactiu entre un *presentador* i un *concursant*. El presentador ofereix al concursant la possibilitat de triar entre dos sobres que contenen certes quantitats desconegudes de diners, però sabent que un dels sobres té exactament el doble de diners que l'altre. Just al final de la introducció s'explica amb més precisió.

Els jocs interactius basats en l'atzar es presten a la formulació de paradoxes. Quan es diu que quelcom *"es tria a l'atzar"*, sovint no es concreta bé què vol dir: no s'especifiquen les opcions possibles ni si totes les opcions són igualment probables, o no es precisa suficientment el mecanisme de tria.

El nostre punt de vista consisteix en reproduir amb tot detall el procés del joc, és a dir, definir tot l'experiment aleatori, el conjunt de quantitats possibles i el sistema aleatori de tria. Si bé el plantejament *ingenu* del joc admet múltiples escenaris (diverses situacions experimentals), un cop s'ha fixat un dels escenaris, sigui quin sigui, la resposta és inequívoca i precisa: la paradoxa desapareix perquè a cada escenari hi ha una solució única. L'objectiu és posar de manifest que hi ha multitud de supòsits experimentals possibles, concretar-ne alguns i, en cada un d'aquests, especificar la llei de probabilitat del joc i calcular els guanys esperats teòrics. Alguns resultats s'il·lustren amb dades i figures obtingudes simulant un nombre gran de repeticions del joc.

El treball s'organitza com segueix: a la Secció **2** es formula el joc i es planteja la paradoxa. A la Secció **3** es concreten alguns escenaris experimentals (els anomenem supòsits) i es resol la paradoxa mostrant que a cada escenari només hi ha una llei de probabilitat possible, donada la qual queda determinat el guany esperat a cada sobre. *De fet, no hi ha paradoxa; les contradiccions sorgeixen quan es confonen els escenaris experimentals o s'assumeixen condicions experimentals que no se satisfan.* A la Secció **4** hi trobareu una breu discussió dels resultats.

A l'Apèndix hi podeu veure els resultats obtinguts simulant el joc amb el manipulador algebraic *Maple*. Qualsevol software que permeti generar nombres aleatoris es podria usar de manera alternativa. La simulació és una eina cada cop més utilitzada per intuir o per confirmar comportaments de sistemes on és oportú fer un nombre gran de repeticions. En un dels possibles supòsits experimentals del joc es mostren i comenten les comandes que permeten simular un nombre gran de realitzacions.

Del treball se'n poden fer diverses lectures: amb i sense demostracions, amb i sense simulacions, etc., en funció dels interessos i coneixements del lector.

El joc

Ens situem en un concurs en el què el presentador ofereix al concursant l'opció de triar entre dos sobres que contenen diners, sabent que un dels dos sobres té exactament el doble de diners que l'altre (equivalentment, un sobre té la meitat de diners que l'altre). El concursant tria un sobre, l'obre i veu que conté X euros. Aleshores, el presentador li ofereix la possibilitat de canviar de sobre. La pregunta és: *el concursant ha de quedar-se amb el sobre inicial que conté la quantitat* X *o canviar de sobre per tal de millorar el guany esperat*?

Sempre que l'atzar intervé en un procés (loteria, mostreig de poblacions, etc.), el *valor esperat* s'assimila a la mitjana d'una àmplia sèrie de repeticions del procés experimental, no a una realització concreta. Per respondre si *a la llarga* és més favorable canviar o no canviar, la resposta es basarà en la mitjana esperada (o teòrica) de guany, també anomenada *esperança* de guany.

2 La formulació matemàtica del problema paradoxal

L'*aparent* paradoxa

Imaginem que tenim dos sobres damunt d'una taula i que cadascun d'ells té una de les dues quantitats desconegudes següents: $\{q, 2q\}$. Com que els dos sobres són indistingibles, es lícit suposar que el concursant ha escollit una de les dues quantitats per algun mecanisme equivalent a llançar una moneda equilibrada. Ara ja ha triat un dels dos sobres, que ha quedat pre-seleccionat i separat de l'altre; tots dos sobres estan tancats damunt de la taula.

Formalitzem l'experiment per poder calcular el valor esperat. Diguem Y a la quantitat (desconeguda) que hi ha al sobre triat i $\tilde{Y}$ a la quantitat (desconeguda) a l'altre sobre. Recordem que el valor esperat (la mitjana teòrica) en el cas finit es calcula multiplicant cada valor pel seu pes (probabilitat). Les lleis de probabilitat de les dues quantitats són, repectivament:

Y :

valor	probabilitat
q	$\frac{1}{2}$
$2q$	$\frac{1}{2}$

$\tilde{Y}$:

valor	probabilitat
$2q$	$\frac{1}{2}$
q	$\frac{1}{2}$

(1)

Per tant, els dos sobres tenen la mateixa esperança de guany,

$$E(Y) = E(\tilde{Y}) = \frac{1}{2}(q + 2q) = \frac{3}{2}q \, , \tag{2}$$

i és indiferent canviar o no canviar.

Ara variem *"lleugerament (?)"* el context i pensem que el concursant ja ha obert el sobre triat i que aquest sobre té una quantitat ja coneguda, diguem-li X. Ni el concursant ni nosaltres no sabem si l'altra quantitat és $2X$ (cosa que ocorre quan $X = q$) o bé és $\frac{X}{2}$ (cosa que ocorre si $X = 2q$).

Escrivim $Y|X$ per denotar "la quantitat guanyada si ens quedem amb el primer sobre", i escrivim $\tilde{Y}|X$ per denotar la "quantitat guanyada si canviem de sobre, sabent que el sobre que hem obert conté la quantitat X".

Assumpció. Les dues variables aleatòries $Y|X$ i $\tilde{Y}|X$ tenen les lleis següents:

$Y|X = X$ $\qquad$ $\tilde{Y}|X \underset{(*)}{:}$

valor condicionat	probab. condicionada
$2X$	$\frac{1}{2}$
$\frac{X}{2}$	$\frac{1}{2}$

(3)

$(*)$ L'expressió de la llei condicionada $\tilde{Y}|X$ enuncia que *la situació experimental és tal que, donada qualsevol quantitat en un sobre, a l'altre sobre sempre hi ha el doble o la meitat amb igual probabilitat.* La primera igualtat és clara; de fet Y és sempre idènticament igual a X.

A partir de les distribucions condicionades (3), calculem els valors esperats condicionats:

$$E(Y|X) = X\,, \qquad E(\tilde{Y}|X) = \frac{1}{2}(2X + \frac{X}{2}) = \frac{5}{4}X\,. \tag{4}$$

Per expressar el resultat (4) en termes de q, fem:

$$E(Y) = E(X) = \frac{3}{2}q \qquad \text{i} \qquad E(\tilde{Y}) = E(\frac{5}{4}X) = \frac{15}{8}q\,. \tag{5}$$

Observacions 0 *(a)* El procés seguit per calcular les esperances és completament rigorós. De fet és l'anomenada **fórmula de l'esperança total**, que dóna un mètode per calcular l'esperança d'una variable aleatòria Y *relacionada* amb una altra variable aleatòria X: primer es condiciona Y pel valor de X i s'obté l'esperança condicionada $E(Y|X)$. Aquesta esperança condicionada és aleatòria perquè és una funció de X i, al seu torn, es pot calcular l'esperança d'aquesta funció utilitzant la llei de X. El resultat final és l'esperança de la variable Y sense condicionar. La fórmula de l'*esperança total* s'escriu: $E(Y) = E(E(Y|X))$. A (5) hem aplicat la fórmula de l'esperança total. Aquest resultat és vàlid en casos força generals que inclouen, en particular, els espais de probabilitat finits.

(b) Si la quantitat q fos aleatòria, caldria calcular-ne l'esperança. Per això s'haurien d'especificar les quantitats possibles i la seva distribució; ho veurem, en distints supòsits, a la Secció **3**.

Heus aquí la *paradoxa*: "segons sembla", *si ja hem vist la quantitat obrint el sobre, canviant el sobre incrementem el guany esperat*, que queda multiplicat pel factor $\frac{5}{4}$. A més a més, es podria extrapolar i dir que, si poguéssim tornar a canviar el sobre indefinidament, el guany esperat s'aniria incrementant més i més.

Algunes preguntes que hom es fa són: el fet de mirar altera el valor esperat en els dos sobres? el sobre tapat té, en qualsevol cas, un guany esperat més gran?

Primer comentari: la "causa" de la paradoxa

L'anotació (*) ens fa veure d'on sorgeix la paradoxa. En el plantejament descrit a (1) només se suposa que els dos sobres són indistingibles, no cal suposar en cap moment quina és l'actuació del presentador, ni com s'han escollit els dos sobres, etc. Per contra, en la situació descrita a (3) estem suposant que el contingut de l'altre sobre és $2X$ o $\frac{X}{2}$ "amb igual probabilitat", per a qualsevol X.

Hem de qüestionar-nos: és cert que *de qualsevol quantitat hi ha el doble i la meitat com a eleccions possibles i que aquestes dues opcions tenen la mateixa probabilitat*? Hi ha models experimentals factibles del joc en les que és lícit suposar aquesta condició? Quins? Amb un nombre *infinit* de quantitats possibles, podria donar-se aquesta condició?

Si es vol modelar un joc real, està clar que les possibles quantitats de premi estaran acotades i tampoc no té sentit pensar que el presentador oferirà doblar indefinidament qualsevol quantitat. Tot això es concreta a la Secció **3**, donant models de situacions experimentalment factibles.

3 Solució del problema dels dos sobres en diversos supòsits experimentals

A partir d'ara, es planteja el problema en diversos escenaris possibles i, en cada cas, es reprodueix tot el procés del concurs, tant des del punt de vista del presentador com del concursant. En tots els supòsits s'entén que el presentador *tria a l'atzar* els dos sobres i el que fem és precisar què vol dir *"el presentador tria dos sobres a l'atzar"*.

Observeu que, en els càlculs fets a la Secció **2**, els valors esperats s'expressen en funció d'una quantitat (a priori) desconeguda q. A partir d'ara, s'especifica el conjunt de quantitats possibles. En tots els supòsits analitzats, es fixa un conjunt Q de quantitats acotades superior i inferiorment (els premis). Aquest conjunt depèn d'un nombre natural K i d'una certa quantitat a:

$$Q := \left\{ \frac{a}{2^{K+1}}, \frac{a}{2^K}, \frac{a}{2^{K-1}}, \ldots, \frac{a}{2}, a, a2, \ldots, a2^{K-1}, a2^K, a2^{K+1} \right\}. \tag{6}$$

Per exemple, amb $K = 5$ i $a = 320$, tindríem les quantitats següents (en euros):

$$Q := \{ 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240, 20480 \}. \tag{7}$$

El guany dels concursant haurà d'estar necessàriament dins de Q. A la definició del conjunt Q es veu que de tots els elements, llevat del primer i de l'últim, hi ha el doble i la meitat. És a dir, la forma dels elements de Q s'adiu amb la propietat de ser (*gairebé*) tancat per doble i meitat.

Observacions 1 Per mirar de tancar completament el conjunt Q, sembla natural pensar en la possibilitat de considerar un conjunt infinit numerable de quantitats. Tal i com es comenta a l'article publicat a la Wikipedia, [6], es podria optar pel conjunt $Q_\infty := \{a2^j\}_{-\infty<j<\infty}$, que és (*totalment*) tancat per doble i meitat. El conjunt de parelles de sobres que definim més endavant (vegeu (9)) seria, per a un conjunt infinit de quantitats, $\mathbf{P}_\infty := \{(a2^j, a2^{j+1})\}_{-\infty<j<\infty}$. El problema és que aquest conjunt és infinit numerable i no es pot definir una distribució uniforme discreta sobre ell. Dit d'una altra manera, no totes les parelles de sobres poden ser equiprobables. Aquest fet és prou conegut i caldria considerar distribucions no uniformes; a la Secció 4 es torna a incidir en aquesta qüestió.

Nosaltres ens restringim a considerar un nombre finit de quantitats possibles dins del conjunt Q, que té $2(K+1)+1 = 2K+3$ elements. Aquesta restricció és realista i tanmateix permet analitzar nombroses variants del joc amb resultats força interessants.

Seguidament recordem l'expressió de la suma d'un nombre finit de termes d'una progressió geomètrica, atès que s'aplica repetidament per calcular el guany esperat a quasi bé tots els supòsits.

Propietat 0 *Donada una progressió geomètrica de raó r, la suma de n termes consecutius a_1, $a_2 = a_1 r$, $a_3 = a_1 r^2, \ldots, a_n = a_1 r^{n-1}$, d'aquesta progressió és:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_n r - a_1}{r-1}\,. \tag{8}$$

Supòsit 1

Aquest supòsit descriu un model força realista del joc. A partir del conjunt Q, definim el conjunt $\mathbf{P}$ de totes les parelles possibles de sobres en les que el segon element de la parella és sempre el doble del primer element; conjunt que presentem ordenat segons la magnitud de les quantitats, és a dir,

$$\mathbf{P} := \Big\{ (\frac{a}{2^{K+1}}, \frac{a}{2^K}),\ (\frac{a}{2^K}, \frac{a}{2^{K-1}}),\ \ldots,\ (\frac{a}{2}, a),\ (a, 2a), \\ \ldots,\ (a2^{K-1}, a2^K),\ (a2^K, a2^{K+1}) \Big\}. \tag{9}$$

El nombre de parelles de sobres satisfent la condició meitat-doble és

$$M = 2K + 2\,.$$

Amb $K = 5$ i $a = 320$, les $M = 12$ parelles de quantitats són:

$$\mathbf{P} := \{\ (5, 10),\ (10, 20),\ (20, 40),\ (40, 80),\ (80, 160),\ (160, 320), \\ (320, 640),\ (640, 1280),\ (1280, 2560),\ (2560, 5120), \\ (5120, 10240),\ (10240, 20480)\ \}\,. \tag{10}$$

Observacions 2 Les quantitats extremes només apareixen en una parella, mentre que la resta de quantitats apareixen en dues parelles.

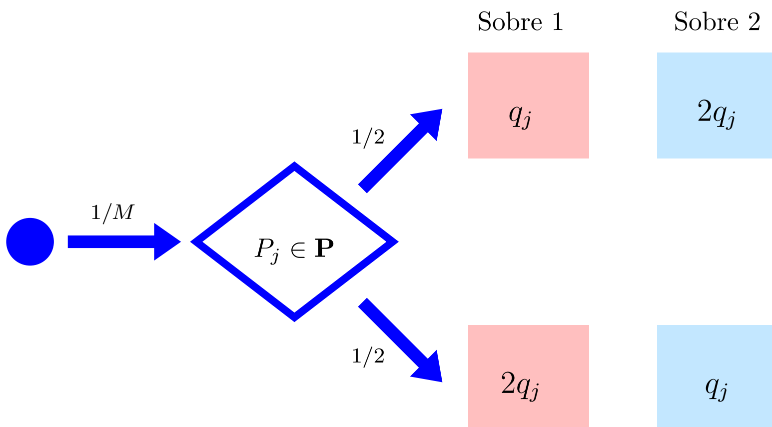
Plantejament del joc

- El presentador pren una parella de sobres a l'atzar amb igual probabilitat, $\frac{1}{M}$, dins del conjunt $\mathbf{P}$. Sigui P_j una parella qualsevol.

- A continuació el presentador barreja els dos sobres i el concursant en tria un, completament a l'atzar; diguem-li sobre 1 (**s1**). Això equival a dir que aquest sobre pot ser una qualsevol de les dues quantitats de la parella P_j amb probabilitat $\frac{1}{2}$. Equivalentment, l'altre sobre (**s2**) serà també una qualsevol de les dues quantitats amb probabilitat $\frac{1}{2}$. Denotem q_j i $2q_j$ les dues quantitats ordenades (meitat, doble) del parell de sobres escollit:

$$P_j = (q_j, 2q_j) = (a2^j, a2^{j+1}), j = -(K+1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, K\,.$$

L'experiment aleatori es resumeix, de manera esquemàtica, així:



(11)

amb $q_j \in \left\{ \frac{a}{2^{K+1}}, , \ldots, , a, \ldots, a2^K \right\}$ i, recordeu, $M = 2K + 2$.

Solució del supòsit 1: és indiferent canviar o no canviar.

L'esquema anterior fa palès que l'esperança de guany serà la mateixa als dos sobres, perquè les dues distribucions són idèntiques; calculem-la.

Propietat 1 *Diguem Y el guany si el concursant sempre es queda el sobre triat primer (***s1***) i $\tilde{Y}$ el guany si sempre canvia de sobre i es queda amb l'altre (***s2***). Segons l'esquema (11) que respon a les condicions del supòsit* ***1****, se satisfà:*

$$E(Y) = E(\tilde{Y}) = \frac{3a}{2(2K+2)} \cdot \left(2^{K+1} - 2^{-(K+1)} \right) . \tag{12}$$

Demostració: L'esquema (11) ens mostra la igualtat en llei de les dues variables i com calcular el valor esperat a cada sobre, considerant totes les possibles parelles de sobres:

$$\begin{aligned} E(Y) = E(\tilde{Y}) &= \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=-(K+1)}^{K} \left(\frac{1}{2} q_j + \frac{1}{2} 2q_j \right) = \frac{1}{M} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sum_{j=-(K+1)}^{K} q_j \\ &= \frac{3}{2M} \cdot \sum_{j=-(K+1)}^{K} a2^j \underset{(\diamond)}{=} \frac{3a}{2(2K+2)} \cdot \left(2^{K+1} - 2^{-(K+1)} \right) . \end{aligned}$$

A la igualtat $(\diamond)$ s'utilitza (8) amb $r = 2$ i se substitueix $M = 2K + 2$.

Comentari: esmentem que una manera alternativa d'obtenir l'esperança de la variable Y, i per tant la de $\tilde{Y}$, consisteix en determinar la llei (llistat de valors no repetits i probabilitats respectives) tenint en compte que els valors extrems surten en una parella i els altres en dues parelles d'entre les M parelles possibles, i calculant després l'esperança (suma de valors per probabilitats):

$$E(Y) = E(\tilde{Y}) = a2^{K+1} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{2} + a2^{-(K+1)} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{2} + \sum_{j=-K}^{K} a2^j \cdot \frac{2}{M} \cdot \frac{1}{2} .$$

A partir d'aquí, només cal aplicar (8) i agrupar termes fins obtenir l'expressió (12). □

La conclusió és idèntica (òbviament) si prèviament es condiciona per conèixer la quantitat del primer sobre i després s'aplica la fórmula de l'esperança total. En aquest sentit, la **Propietat 1bis** és només un enunciat equivalent a la **Propietat 1**. Ho enunciem i ho provem amb tot detall perquè, segons hem vist a la secció anterior, és precisament aquí on apareix la paradoxa.

Propietat 1bis *Suposem les mateixes condicions que a la **Propietat 1**. Obrim el primer sobre i diem X la quantitat que conté. Siguin Y i $\tilde{Y}$ com abans.*

a) El valor esperat al primer sobre, condicionat al valor de X, és:

$$E(Y|X) = X , \qquad \textit{per a tot valor de} \quad X \quad \textit{dins de} \quad Q . \tag{13}$$

b) El valor esperat l'altre sobre, condicionat al valor de X, és:

$$\textit{si} \quad X \in \{a2^{-K}, \ldots, a2^{K}\}, \quad \text{aleshores} \quad E(\tilde{Y}|X) = \frac{5}{4} \cdot X , \tag{14}$$

$$\textit{si} \quad X = a2^{-(K+1)}, \quad \text{aleshores} \quad E(\tilde{Y}|X) = 2 \cdot X \tag{15}$$

$$\textit{i, si} \quad X = a2^{K+1}, \quad \text{aleshores} \quad E(\tilde{Y}|X) = \frac{1}{2} \cdot X . \tag{16}$$

c) Les esperances (no condicionades o totals) coincideixen i són:

$$E(Y) = E(\tilde{Y}) = \frac{3a}{2(2K+2)} \cdot \left(2^{K+1} - 2^{-(K+1)}\right) . \tag{17}$$

Demostració: L' enunciat de l'apartat *a)* és evident, ja que $Y = X$ sempre. Pel que fa a l'apartat *b)*, els casos extrems (3.9) i (3.10) són clars perquè cada una de les quantitats extremes només apareix en una parella. Així, si $X = a2^{K+1}$, la parella de sobres és $(a2^K, a2^{K+1})$ i automàticament $\tilde{Y}|X = a2^K = \frac{1}{2} \cdot X$. Anàlogament, si $X = a2^{-(K+1)}$, la parella és $(a2^{-(K+1)}, a2^{-K})$ i obtenim $\tilde{Y}|X = a2^{-K} = 2 \cdot X$.

Si condicionem a les quantitats no extremes, $X = a2^j$, prenent $j = -K, \ldots, K$, a partir de l'esquema (11) i aplicant la fórmula la probabilitat condicionada, tenim que

$$P(\tilde{Y} = 2 \cdot a2^j | X = a2^j) = \frac{P(\tilde{Y} = 2 \cdot a2^j\,,\, X = a2^j)}{P(X = a2^j)}$$
$$= \frac{P(P_j\,,\, X = a2^j)}{P(P_j\,,\, X = a2^j) + P(P_{j-1}\,,\, X = a2^j)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{M}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{M} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{M}} = \frac{1}{2}$$

i, anàlogament,

$$P(\tilde{Y} = \frac{a2^j}{2} | X = a2^j) = \frac{1}{2}\,.$$

D'on es dedueix que l'esperança condicionada és

$$E(\tilde{Y}|X = a2^j) = 2 \cdot a2^j \cdot \frac{1}{2} + \frac{a2^j}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4} a2^j = \frac{5}{4} \cdot X\,.$$

Hem provat l'apartat *b)*. Observeu que això demostra que la llei condicionada pels valors no extrems satisfà (4). Aquest fet no és gens paradoxal ja que al condicionar per les quantitats no extremes sí que se satisfà l'assumpció (3), cosa que no és certa quan condicionem pels valors extrems.

Per veure l'apartat *c)*, primer expressem convenientment l'esperança condicionada que acabem de calcular:

$$E(\tilde{Y}|X) = \begin{cases} \frac{5}{4} a2^j, & \text{si } X = a2^j, \text{ amb } j = -K, \ldots, K; \\ a2^{-K}, & \text{si } X = a2^{-(K+1)}\,; \\ a2^K, & \text{si } X = a2^{K+1}\,. \end{cases}$$

Per la fórmula de l'esperança total sabem que $E(\tilde{Y}) = E(E(\tilde{Y}|X))$, i aquesta esperança la podem calcular com sempre (suma de valors per probabilitats), amb els valors de $E(\tilde{Y}|X)$ descrits al paràgraf anterior i tenint en compte que quantitats no extremes surten en dues parelles de **P** (i per tant tenen probabilitat $\frac{2}{M} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{M}$) i les extremes només en una parella (i per tant tenen probabilitat $\frac{1}{M} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2M}$), resultant:

$$\begin{aligned} E(\tilde{Y}) &= E(E(\tilde{Y}|X)) = \left(\sum_{j=-K}^{K} \frac{5}{4} a2^j \cdot \frac{1}{M} \right) + a2^{-K} \cdot \frac{1}{2M} + a2^K \cdot \frac{1}{2M} \\ &= \frac{a}{2M} \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot (2^{K+1} - 2^{-K}) + 2^{-K} + 2^K \right) \\ &= \frac{3a}{2(2K+2)} \cdot \left(2^{K+1} - 2^{-(K+1)} \right) , \end{aligned}$$

on s'han sumat els termes de la progressió geomètrica i s'ha substituït $M = 2K+2$. Això prova que $E(\tilde{Y})$ coincideix amb el valor esperat al primer sobre, $E(Y)$, calculat a la propietat anterior. □

Per al cas $a = 320$ i $K = 5$, el valor esperat del guany en el supòsit **1** és:

2559,375 €

a tots dos sobres.

Observacions 3 El resultat de l'apartat *b)* de la **Propietat 1bis** mereix un aclariment ja que sembla que alimenta la paradoxa. Segons hem demostrat, si en lloc de calcular el guany esperat (total), calculem el guany condicionat a que la quantitat del primer sobre és coneguda, sempre és millor canviar **llevat d'un cas**. Concretament, és millor canviar sempre i quan la quantitat que veiem no sigui la més gran de totes ($X \neq a2^{K+1}$). El fet és que el jugador **no sap mai** quina és la màxima de les quantitats possibles i, per tant, no pot seguir l' estratègia de maximitzar el guany condicionat. S'ha de basar doncs en el rang esperat (total) i, en base a aquest, un i altre sobre són indiferents en aquest supòsit experimental. A la discussió final (Secció **4**) es comenta de nou aquest fet.

En els supòsits que segueixen, el presentador no disposa d'un conjunt de parelles sinó d'un conjunt de quantitats, de les quals n'elegeix una. Un cop obtinguda aquesta, s'escull la del segon sobre. La primera quantitat escollida es tria dins d'un subconjunt Q^* de Q, que no té els dos valors extrems:

$$Q^* := \left\{ \frac{a}{2^K}, \frac{a}{2^{K-1}}, \ldots, \frac{a}{2}, a, a2, \ldots, a2^{K-1}, a2^K \right\}. \tag{18}$$

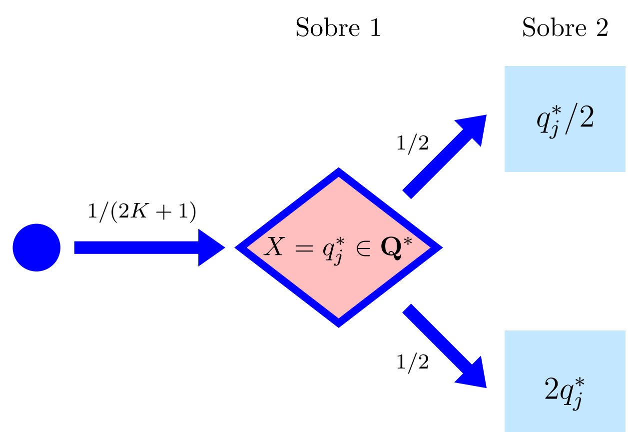
Si bé l'espai mostral per al primer sobre serà el mateix Q^* als tres supòsits següents, les característiques particulars de cada situació donen lloc a resultats diferents.

Supòsit 2

- El presentador tria completament a l'atzar (de manera equiprobable) un sobre que contindrà X, una de les quantitats q_j^* del conjunt Q^* i l'ofereix al concursant; li direm Sobre 1 o **s1**.

- A continuació, el presentador decideix, també de manera equiprobable entre $\frac{X}{2}$ i $2X$, la quantitat del segon sobre i l'ofereix al concursant; li direm Sobre 2 o **s2**.

Resumim l'experiment aleatori de manera esquemàtica:



(19)

amb $q_j^* \in \left\{ \frac{a}{2^K}, , \ldots, , a, \ldots, a2^K \right\} = Q^*$.

Observeu que en aquesta situació experimental els dos sobres no són igualment distribuïts. Per exemple, el primer sobre tindrà com a molt la quantitat $a2^K$ i mai menys de $\frac{a}{2^K}$, mentre que el segon sobre pot contenir $a2^{K+1}$ o $\frac{a}{2^{-(K+1)}}$, sortint fora del conjunt de quantitats Q^*, però sempre dins de Q.

Solució del supòsit 2: és millor canviar i no quedar-se el primer sobre

En aquest context, el valor esperat s'incrementa si sempre canviem el primer sobre pel segon; comprovem-ho.

Propietat 2 *Diguem Y el guany si el concursant sempre es queda el sobre triat primer (**s1**) i $\tilde{Y}$ el guany si sempre canvia de sobre i es queda amb* *l'altre (**s2**). Segons l'esquema (19) que respon a les condicions del supòsit **2**, se satisfà:*

$$E(Y) = \frac{a}{2K+1} \cdot \left(2^{K+1} - 2^{-K}\right) := A(K,a)\,, \tag{20}$$

$$E(\tilde{Y}) = \frac{5}{4} A(K,a)\,. \tag{21}$$

Demostració:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X) = \frac{1}{2K+1} \cdot \sum_{j=-K}^{K} q_j^* = \frac{1}{2K+1} \cdot \sum_{j=-K}^{K} a2^j \\ &\underset{(\diamond)}{=} \frac{a}{2K+1} \cdot \left(2^{K+1} - 2^{-K}\right) = A(K,a)\,. \end{aligned}$$

a la igualtat ($\diamond$) hem sumat els termes de la progressió geomètrica (vegeu (8)) amb $r = 2$.

Fixeu-vos que $A(K,a)$ és només una notació per a aquest guany esperat de referència. Si canviem de sobre i ens quedem amb el **s2**, el guany esperat, $\tilde{Y}$, el calculem a partir de la distribució de l'esquema (19):

$$E(\tilde{Y}) = \frac{1}{2K+1} \cdot \sum_{j=-K}^{K} \frac{1}{2}\left(2q_j^* + \frac{q_j^*}{2}\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2K+1} \cdot \sum_{j=-K}^{K} q_j^* = \frac{5}{4} A(K,a)\,.$$

□

Per al cas $a = 320$ i $K = 5$, el valor esperat al primer sobre és:

$$A(320,5) \approx 1860{,}909\,€.$$

El valor esperat del sobre canviat és:

$$\frac{5}{4} A(320,5) \approx 2326{,}136\,€.$$

Observacions 4

- Comparant (20) amb (21) es veu que, en aquest supòsit de joc, és més favorable canviar al sobre 2 (*"tant si obrim el primer sobre com si no l'obrim" !*). El guany esperat amb el canvi té el factor multiplicatiu $\frac{5}{4}$.

- Intuïtivament, es prodria argumentar que la possibilitat de doblar la quantitat més gran i guanyar fins a 20480 € compensa (en mitjana) el risc de dividir la quantitat més petita i guanyar només 5 €.

- El guany esperat en el supòsit **1** és superior al guany esperat en tots dos sobres en el supòsit **2** (excepte quan $K = 0$ o $K = 1$); és a dir,

$$A(K,a) < \frac{5}{4}A(K,a) < 3a \cdot \frac{2^{K+1} - 2^{-(K+1)}}{2(2K+2)}, \quad \forall K \geq 2\,,$$

  tal i com es pot comprovar fàcilment.

Supòsit 3

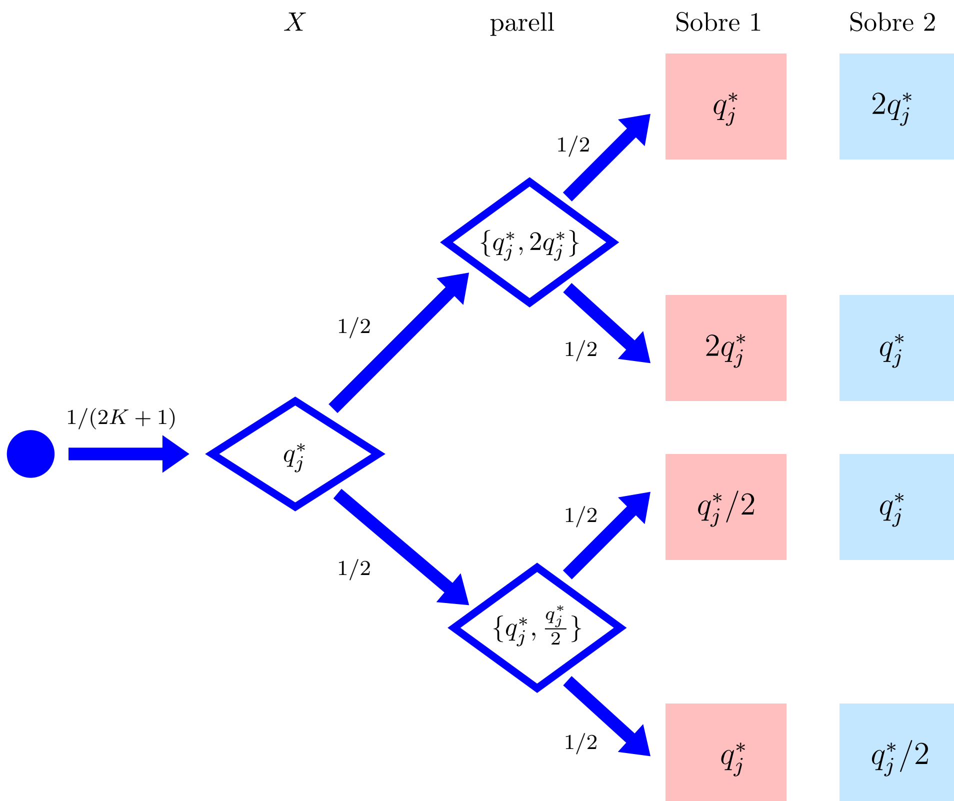
Amb aquest supòsit es modela una situació experimental similar al supòsit **2**, amb un resultat ben diferent pel que fa al guany esperat.

- El presentador tria completament a l'atzar (de manera equiprobable) un sobre que contindrà X, una de les quantitats q_j^* del conjunt Q^*.

- A continuació, el presentador escull amb probabilitat $\frac{1}{2}$ la quantitat complementària $\frac{X}{2}$ i $2X$ i forma la parella de sobres.

- El presentador barreja els dos sobres (ja no se sap quin és el primer ni quin és el segon) i els ofereix al concursant que completament a l'atzar tria un sobre, el Sobre 1 o **s1**; l'altre serà el Sobre 2 o **s2**.

Ho resumim a l'esquema següent:



(22)

Observeu que en aquesta situació experimental, un cop barrejats, les quantitats dels dos sobres tenen la mateixa distribució.

Solució del supòsit 3: és indiferent canviar que no canviar

En aquesta situació experimental, a l'igual que passa al supòsit **1** i contràriament al que succeeix al supòsit **2**, els sobres als quals opta el concursant estan barrejats (no sap quin d'ells conté la quantitat original de q_j^* ni quin conté la quantitat obtinguda a posteriori la qual pot ser el doble o la meitat de la primera).

El guany esperat en tots dos sobres és el mateix perquè de l'esquema (22) deduïm que tenen la mateixa llei.

Propietat 3 *Diguem Y el guany si el concursant sempre es queda el sobre triat primer (**s1**) i $\tilde{Y}$ el guany si sempre canvia de sobre i es queda amb l'altre (**s2**). Segons l'esquema (22) que respon a les condicions del supòsit **3**, se satisfà:*

$$E(Y) = E(\tilde{Y}) = \frac{9}{8} A(K, a)\,. \tag{23}$$

*amb $A(K, a)$ la quantitat definida a (20). A més a més, aquest guany esperat és la mitjana dels guanys esperats als dos sobres del supòsit **2**.*

Demostració: Per definició de l'experiment aleatori, la llei dels guanys als dos sobres és idèntica i l'esperança es pot calcular fent:

$$\begin{aligned} E(Y) = E(\tilde{Y}) &= \frac{1}{2K+1} \cdot \sum_{j=-K}^{K} \frac{1}{4} \left(q_j^* + 2q_j^* + \frac{q_j^*}{2} + q_j^* \right) \\ &= \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{2K+1} \cdot \sum_{j=-K}^{K} q_j^* = \frac{9}{8} A(K, a)\,. \end{aligned}$$

Comprovem que coincideix amb la mitjana dels guanys dels dos sobres del supòsit **2**:

$$\frac{1}{2} \left(A(K, a) + \frac{5}{4} A(K, a) \right) = \frac{9}{8} A(K, a)\,.$$

□

Per al cas $a = 320$ i $K = 5$, el valor esperat a cada sobre és:

$$\frac{9}{8} A(320, 5) \approx 2093{,}5227\,€.$$

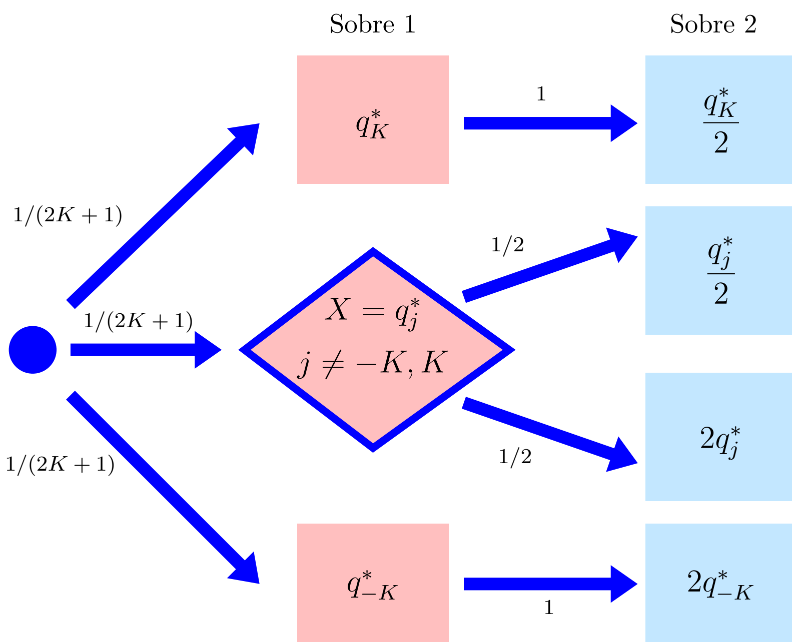
Supòsit 4

Aquest supòsit és una altra "aparentment lleugera" modificació del supòsit **2**, però aquí el resultat és: millor no canviar. La modificació garanteix que les quantitats no surtin mai del conjunt Q^*.

- El presentador tria un sobre a l'atzar amb igual probabilitat un sobre que contindrà X, una de les quantitats del conjunt Q^*. Ofereix aquest sobre al concursant (Sobre 1 o **s1**).

- A continuació, el presentador decideix l'altre sobre (Sobre 2 o **s2**) com segueix:
  - si $\frac{a}{2^K} < X < a2^K$, l'altre sobre serà $2X$ o $\frac{X}{2}$ amb igual probabilitat,
  - si $X = a2^K$, l'altre sobre serà sempre $\frac{X}{2} = a2^{K-1}$, i
  - si $X = \frac{a}{2^K}$, l'altre sobre serà sempre $2X = \frac{a}{2^{K-1}}$.

Ho resumim a l'esquema següent:



(24)

amb $q_j^* \in \left\{\frac{a}{2^{K-1}},, \ldots, ,a, \ldots, a2^{K-1}\right\}$.

Solució del supòsit 4: és millor no canviar

El valor esperat de guany al Sobre 1 és el mateix que en el supòsit **2**; falta calcular el guany esperat a l'altre sobre.

Propietat 4 *Diguem Y el guany si el concursant sempre es queda el sobre triat primer (**s1**) i $\tilde{Y}$ el guany si sempre canvia de sobre i es queda amb* *l'altre (**s2**). Segons l'esquema (24) que respon a les condicions del supòsit 4, se satisfà:*

$$E(Y) \;=\; A(K,a)\,,\ \ i \tag{25}$$

$$E(\tilde{Y}) \;=\; a\cdot\frac{7\cdot 2^{K-2}-2^{-(K+1)}}{2K+1}\,. \tag{26}$$

Demostració: El guany esperat al sobre 1 coincideix, òbviament, amb el del supòsit **2**. Calculem l'altre:

$$\begin{aligned}
E(\tilde{Y}) &= \frac{1}{2K+1}\cdot\left(\frac{q^*_K}{2}+2q^*_{-K}+\frac{1}{2}\sum_{j=-(K-1)}^{K-1}\left(\frac{q^*_j}{2}+2q^*_j\right)\right)\\
&= \frac{a}{2K+1}\cdot\left(2^{K-1}+2^{-(K-1)}+\frac{5}{4}\cdot\left(\sum_{j=-(K-1)}^{K-1}2^j\right)\right)\\
&\underset{(\diamond)}{=} \frac{a}{2K+1}\cdot\left(2^{K-1}+2^{-(K-1)}+\frac{5}{4}\left(2^K-2^{-(K-1)}\right)\right)\\
&= a\cdot\frac{7\cdot 2^{K-2}-2^{-(K+1)}}{2K+1}\,,
\end{aligned}$$

a $(\diamond)$ hem usat un altre cop (8) amb $r=2$. $\square$

Per al cas $a=320$ i $K=5$, el valor esperat és aproximadament 1628,636 €.

Observacions 5

- Comparant l'últim resultat numèric amb $A(320,5)\approx 1860{,}909$ €, que és el guany esperat sense canviar de sobre, la decisió és clara.

- La comparació dels guanys dels dos sobres, per a quantitats generals, és la següent:

$$\begin{aligned}
E(Y)=A(K,a)=a\cdot\frac{2^{K+1}-2^{-K}}{2K+1} &> a\cdot\frac{7\cdot 2^{K-2}-2^{-(K+1)}}{2K+1}=E(\tilde{Y})\\
&\Leftrightarrow 2^{K+1}-7\cdot 2^{K-2}>2^{-K}-2^{-(K+1)}\\
&\Leftrightarrow 2^{K-2}>2^{-(K+1)}\Leftrightarrow K>\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

  Això ens diu que, en aquest supòsit, sempre és millor quedar-se amb el primer sobre (el cas $K=0$, on la quantitat inicial és sempre constant, no té massa interès).

4 Discussió

L'aportació d'aquest treball es basa en definir uns supòsits experimentals factibles (i simulables) que determinen completament l'espai de probabilitat del joc i la solució del problema dels dos sobres. Es defineix com a millor estratègia aquella que té un guany esperat més elevat. Es a dir, es fa una anàlisi probabilista-freqüentista (ni Bayessiana ni filosòfica) del problema, la qual cosa no impedeix plantejar la paradoxa, veure'n la causa i resoldre-la.

Les conclusions bàsiques estan en la línia de l'article publicat a la Wikipedia [6]: no hi ha paradoxa, si l'espai de probabilitat del joc està ben definit. La teoria de la probabilitat dona plenes garanties als enunciats i a les demostracions de les propietats. Moltes de les publicacions existents treballen des de perspectives filosòfiques, sense prou rigor matemàtic.

En referència a la qüestió "és millor canviar o no canviar el primer sobre", *i sempre en base a més guany esperat (total, no condicionat)*, cada situació té una resposta única que depèn del context experimental. Així, als supòsits **1** i **3** és indiferent canviar o no canviar, al supòsit **2** és millor canviar i al supòsit **4** és millor no canviar. En aquest sentit, Priest i Restall [5], en una nota breu de la qual no en consta la publicació, apunten tres "mecanismes" assimilables a tres dels nostres supòsits, amb tres solucions diferents. No obstant, a la seva descripció de l'experiment no s'especifica el conjunt de quantitats possibles.

En el present treball s'analitzen models del joc amb un conjunt finit (tant gran com es vulgui) de quantitats possibles. Aquesta limitació no impedeix veure les "fonts de la paradoxa". Per emfasitzar que el cas finit dóna prou joc, és suficient analitzar a fons el supòsit **1**. Recordem-lo: un conjunt finit de parelles de sobres $(q_j, 2q_j)$ amb una llei uniforme en aquest conjunt i una tria equiprobable entre els dos sobres de la parella. Les **propietats 1** i **1bis**, d'una banda, ens diuen que l'*única solució correcta* del supòsit **1** en base al guany esperat (total) és la igualtat (indiferència) entre els dos sobres i, d'altra banda, ens mostren on rau la causa de la paradoxa. Com s'ha remarcat a **Observacions 3**, si bé el guany esperat total és igual al sobre primer que al segon, els guanys esperats condicionats a que la quantitat del primer sobre és coneguda són *sovint, però no sempre,* superiors. Més concretament, hem vist que condicionant per les quantitats no extremes, el guany esperat canviant de sobre es multiplica pel factor $\frac{5}{4}$. De fet, només quan la quantitat del primer sobre és la màxima, $a2^{K+1}$, el guany esperat al primer sobre duplica el guany esperat amb el canvi de sobre. Ara bé, quan això passa, la diferència de guany a favor del primer sobre és molt elevada ($a2^{K+1} - a2^K = a2^K$) i d'aquí que s'igualin els valors esperats no condicionats. Cal recordar que el valors extrems o atípics són molt influents en el càlcul del valor esperat, tot i ser poc probables (efecte de palanca). A més a més, el jugador no sap quina és la quantitat màxima i, per tant, *no pot aplicar l'estratègia òptima: "quedar-se amb el primer sobre si té la quantitat més gran i canviar en cas contrari"*.

Resumint, el supòsit **1** escenifica amb claredat la clau de la fal·làcia, tot i treballar amb un conjunt finit de quantitats factibles. Tal i com es comenta a **Observacions 2**, malgrat que les parelles de sobres són equiprobables (amb probabilitat $\frac{1}{M}$), les quantitats no ho són: les dues quantitats extremes tenen la meitat de possibilitats que les altres quantitats. Això fa que la llei de $\tilde{Y}$ condicionada per X no coincideixi amb la llei representada a la taula (3): els valors $\frac{X}{2}$ i $2X$ no són equiprobables quan es condiciona pels valors extrems. Conseqüentment, l'assumpció clau de la Secció **2** no és certa i el càlcul (4), on s'obté que l'esperança de $\tilde{Y}$ és l'esperança de Y multiplicada pel factor $\frac{5}{4}$, no és vàlid sense l'assumpció. Precisament, el valor extrem més elevat, $a2^{K+1}$, és el que està més allunyat del rang on es mou la resta de valors i per tant és el que té més influència en el càlcul de l'esperança total. No hi ha paradoxa: l'esperança total de guany és la mateixa als dos sobres.

Arribat aquest punt, hom pot pensar que caldria evitar les quantitats extremes considerant un conjunt numerable de parelles de la forma $\mathbf{P}_\infty := \{(a2^j, a2^{j+1})\}_{-\infty<j<\infty}$; i.e. amb conjunt de quantitats $Q_\infty := \{a2^j\}_{-\infty<j<\infty}$. Però, com s'ha comentat a **Observacions 1**, no es pot definir un esquema equiprobable com el del supòsit **1** en un conjunt infinit numerable (les probabilitats sumarien infinit). Per tant, caldria considerar un esquema numerable no equiprobable on cada parella de sobres $P_j \in \mathbf{P}$ tingui associada una probabilitat γ_j amb certes restriccions. Aquest model tindria , si més no, un interès teòric. Diversos autors analitzen el cas infinit numerable, però sense prou rigor matemàtic. Esmentem algunes referències on es tracta el cas infinit. Broome (1995, [2]) és un dels clàssics: proposa una distribució conjunta simètrica i no uniforme sobre les quantitats al parell de sobres. El problema és que l'esperança de guany és infinita. Clark i Shackel (2000, [3]) expliquen la paradoxa en un controvertit article, desmentit per Meacham i Weisberg (2003, [4]) per, segons sembla, no tenir en compte indeterminacions del tipus $\infty - \infty$. Més recentment, Albers et al. (2005, [1]) fan una síntesi de resultats existents fins al moment i conclouen que no hi ha una solució satisfactòria.

Si bé el cas finit es considera tancat, aquest treball aporta un tractament molt complert del problema en el cas finit i que, al nostre entendre, obre una línia per abordar el cas infinit numerable de quantitats amb les mateixes eines i rigor.

Volem afegir que es podrien considerar molts altres supòsits. Per exemple, dissenyar una variant del supòsit **4** en la que, quan al primer sobre surten els valors extrems es desestima el sobre i es torna a escollir.

Les dues figures il·lustren les quantitats obtingudes per simulació en dos supòsits diferents i serveixen per visualitzar les diferències entre una i altra situació experimental. Les dades corresponen als supòsits **1** i **2**, amb 2000 repeticions del joc per a cada supòsit. En tots els casos es considera $a = 320$ i $K = 5$. A la Figura 1 es veu la correspondència entre les parelles de quantitats: cada punt és una parella i tots els símbols són de la mateixa mida, independentment de la freqüència. Al supòsit **1** hi ha simetria respecte de la diagonal perquè als dos sobres hi ha les mateixes quantitats possibles, mentre que l'asimetria és present al supòsit **2** on la quantitat més elevada, 20480 €, només és possible obtenir-la al segon sobre. Per poder veure les freqüències, cal anar a la Figura 2: les quantitats dels dos sobres tenen freqüències similars al supòsit **1** i força diferents al **2**; en particular, al **s1** mai no s'obté la quantitat màxima, 20480 €.

Apèndix: simulacions amb Maple

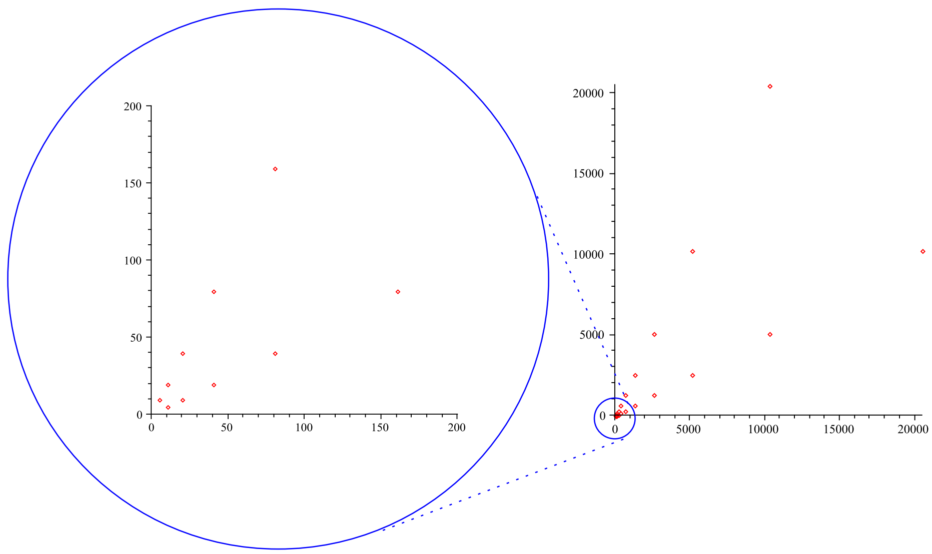
Les simulacions del joc es basen en la generació de nombres aleatoris amb una distribució *uniforme discreta*: un conjunt finit de valors possibles i tots ells amb la mateixa probabilitat. Nosaltres hem simulat tots els supòsits, però aquí només s'explicita la del supòsit 2.

Simulació del supòsit 2

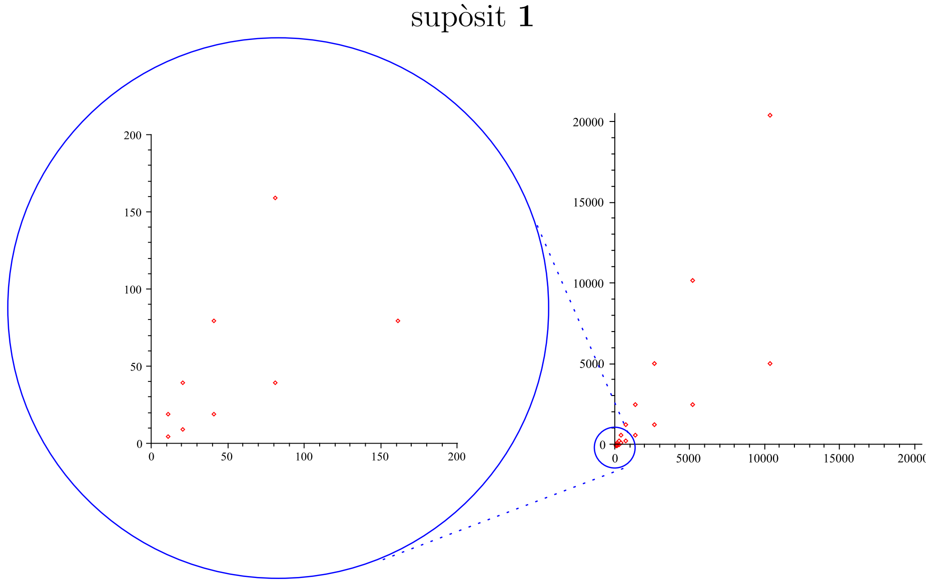
Descrivim breument cada comanda. Totes les comandes acaben amb **;** o sense cap senyal (depèn de la versió de Maple); també poden acabar amb **:** per suprimir la vista per pantalla.

Comencem re-iniciant i carregant el paquet *stats* que faculta la generació de nombres aleatoris i d'altres funcions de probabilitats i estadística.

```
> restart; with(stats):
```



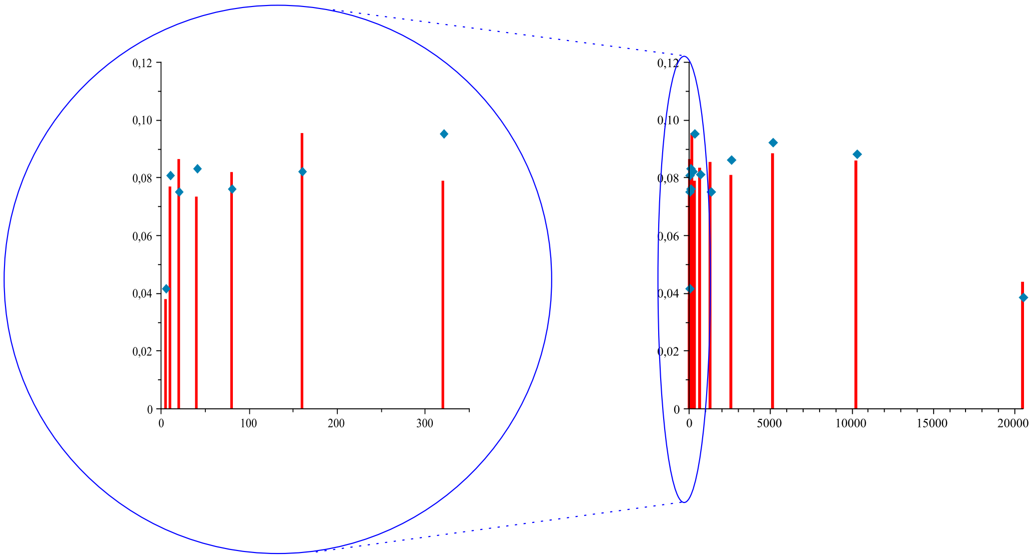
supòsit **1**



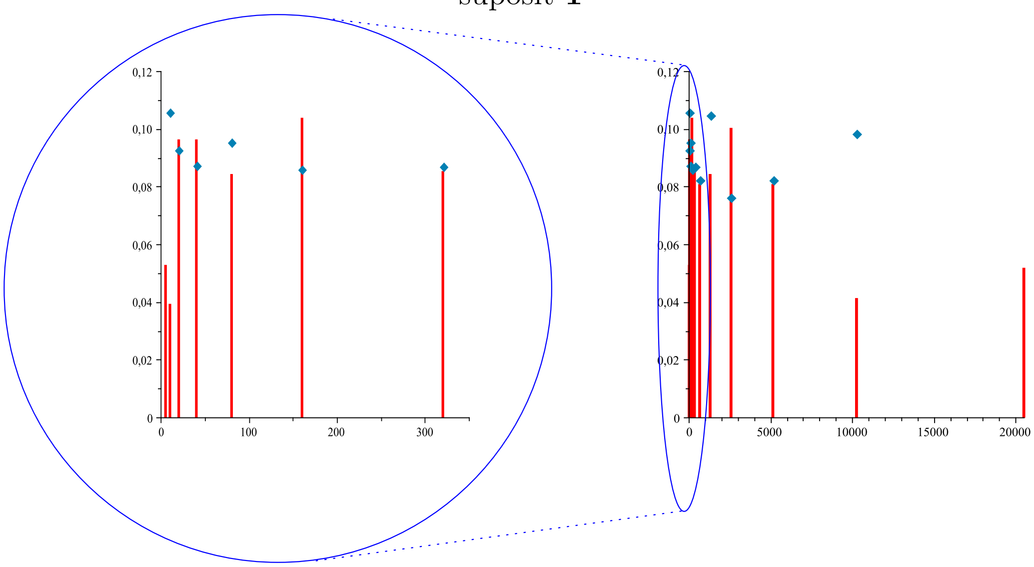
supòsit **2**

Figura 1: Resultats possibles en els supòsits 1 i 2. Les quantitats del Sobre 1 (**s1**) a l'eix d'abscisses i les de l'altre (**s2**) a l'eix d'ordenades.

Introduïm els paràmetres K i a del conjunt Q^* (vegeu (18)). El nombre de sobres possibles és $2K+1$. En aquest document, introduïm els mateixos



supòsit **1**



supòsit **2**

Figura 2: Resultats de la simulació dels supòsits 1 i 2. Freqüències relatives de les quantitats obtingudes per simulació: al sobre 1 (**s1**) representades amb un **diamant** i al sobre 2 (**s2**) representades amb una **barra vertical**.

valors numèrics que hem fet servir als exemples. També introduïm N, el nombre de simulacions; posem que en fem 2000.

```
> K := 5:  a := 320:  N := 2000:
```

Creem la llista Q^* (`Qest` en el codi de Maple) amb la comanda *seq* dins de [...]. Una llista és un conjunt ordenat.

```
> Qest := [seq(320 * 2^j, j = -K..K)];
```

[10,20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240]

Seguidament procedim a escollir el sobre de manera equiprobable dins de Q^*; un procés que volem repetir N vegades de manera independent. Per fer el sorteig utilitzem una llista auxiliar (*aux*) que genera aleatòriament nombres amb llei uniforme discreta (*discreteuniform*), entre 1 i $2 \cdot K + 1$, és a dir, sortegem la posició que l'element ocupa dins del conjunt Q^*.

```
> aux := [stats[random, discreteuniform[1, 2*K+1]](N)]:
```

Creem la llista Y, que conté els successius resultats del primer sobre; s'inicia amb una llista buida i es va omplint de manera iterativa amb l'element de la llista Q^* que ocupa la posició aleatòria sortejada a la llista *aux*:

```
> Y := []; for j from 1 to nops(aux) do
  Y := [op(Y),Qest[aux[j]]] end do:
```

Calculem la mitjana de la mostra de resultats.

```
> mitjanaY := evalf((sum(Y[j], j= 1..N))/nops(Y));
```

1869.740000

Calculem el valor esperat per al guany en el primer sobre (l'espai mostral és Q^* i els elements són equiprobables).

```
> esperançaY := evalf((sum(Qest[i], i= 1..2*K+1))/(2*K+1));
```

1860.909091

Podem comprovar que coincideix amb $A(K, a)$, el valor esperat teòric deduït a (20).

```
> evalf((2^(K+1)-1/2^(K))*a/(2*K+1));
```

$$1860.909091$$

Observacions 6 La mitjana depèn de l'atzar i, per tant, cada vegada que simulem un seguit de N realitzacions del joc tindrem una mitjana diferent, que serà més o menys similar al valor esperat. En aquesta simulació la mitjana és 1869.74, prou propera al valor esperat.

Seguidament obtenim, segons els principis del supòsit **2**, el contingut de l'altre sobre.

Primerament, generem aleatòriament variables dicotòmiques (o binàries) que prenen els valors $\{1, 0\}$ amb la mateixa probabilitat $1/2$, després les usarem per decidir si doblem la quantitat del primer sobre o la dividim per dos.

```
> dicot := [stats[random, discreteuniform[0, 1]](N)]:
```

De manera seqüencial, mirem la quantitat $Y[i]$ del primer sobre i, en funció del valor (1 o 0) de la variable dicotòmica corresponent, el contingut del segon sobre doblarà o serà la meitat, respectivament, de la quantitat del primer. D'aquesta manera simulem l'actuació d'un presentador que decidís a l'atzar de manera equiprobable doblar o partir la quantitat del sobre inicial. Denotem `Ytilde` la llista que conté les simulacions de les quantitats del segon sobre.

```
> Ytilde := [];
 for i from to nops(Y) do
 if dicot[i] = 1 then Ytilde := [op(Ytilde), 2*Y[i]]
 else Ytilde := [op(Ytilde), (1/2*Y[i]]
 end if end do:
```

Per veure què ha passat, calculem la mitjana.

```
> mitjanaYtilde:=evalf(
     (sum(Ytilde[r],r=1..N))/nops(Ytilde)
  );
```

$$2379.130000$$

Ho comparem amb el valor esperat teòric deduït a (21).

```
> esperançaYtilde:= evalf(
    (1/2)*(sum(2*2^n+(1/2)*2^n, n=-K..K))*a/(2*K+1)
  );
```

2326.136364

Els altres supòsits es poden simular de manera anàloga. El lector pot fer simulacions dels supòsits **1**, **3** i **4** o de qualsevol altre context de joc que cregui raonable i interessant.

Referències

[1] C. J. Albers, B. P. Kooi and W. Schaafsma. Trying to resolve the two-envelope problem. Synthese 145, 89-109 (2005).

[2] J. Broome. The two-envelop paradox. Analysis 55, 6-11 (1995).

[3] M. Clark and N. Shackel. The two-envelope paradox. Mind 109(435), 415-442 (2000).

[4] C. J. G. Meacham and J. Weisberg. Clark and Shackel on the two-envelope paradox. Mind 112(448), 685-689 (2003).

[5] G. Priest and G. Restall. Envelopes and indifference (2003)

http://consequently.org/papers/envelopes.pdf

[6] Wikipedia. Two envelopes problem (2008).

http://en.wikipedia.org/wiki/Two_envelopes_problem#The_problem

Departament de matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
farre@mat.uab.cat

Publicat el 19 de novembre de 2008