MAT^2
MATerials MATemàtics
Volum 2008, treball no. 1, 15 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

La conjectura $3x + 1$ i els límits de la matemàtica

Jaume Llibre

1 Introducció

Els números naturals són $1, 2, 3, 4, \ldots$. Per a tot número natural x definim la següent successió de números naturals, darrere del x posem el $3x + 1$ si x és senar, o bé posem $x/2$ si x és parell.

Per exemple agafem $x = 13$ i construïm l'esmentada successió:

$$13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$$

Observem que a partir d'ara els números $4, 2, 1$ s'aniran repetint indefinidament en la successió.

Agafem un altre número natural, per exemple el $x = 24$ i construïm la seva successió:

$$24, 12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$$

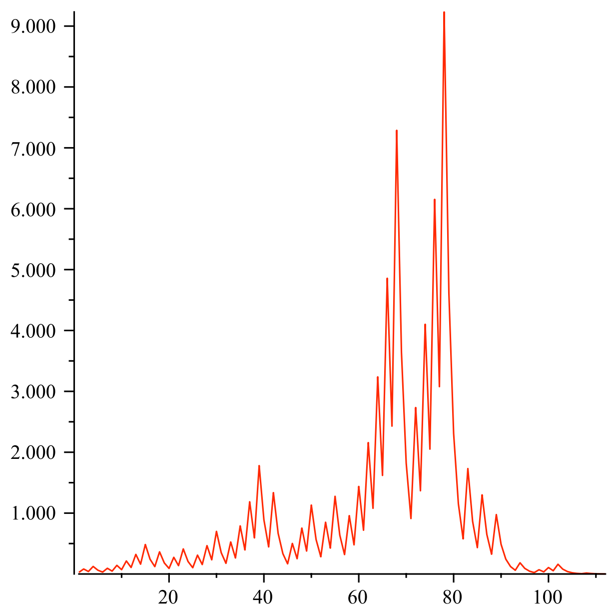
Curiosament, també hem acabat en una successió en la què es van repetint els números $4, 2, 1$.

Fins ara tothom que ha començat amb un número natural x qualsevol i ha construït la successió de la manera que hem dit, aquesta ha acabat repetint els números $4, 2, 1$. És clar a vegades cal que tenir una mica de paciència per verificar que acabem amb el $4, 2, 1$, doncs per exemple si comencem amb el

27 obtenim:

$$27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121,$$
$$364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526,$$
$$263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754,$$
$$377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079,$$
$$3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154,$$
$$3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488,$$
$$244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8,$$
$$4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$$

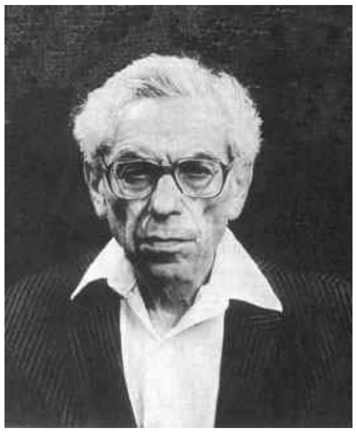
que gràficament es veu com



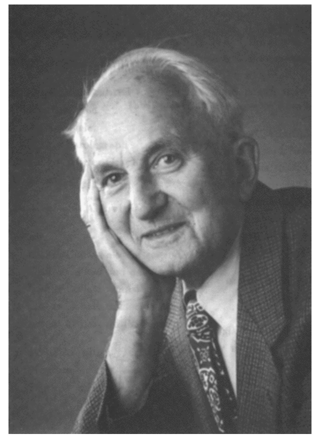
Els matemàtics, davant d'un fet com aquest, són agosarats i ràpidament fan una conjectura, és a dir una hipòtesi emesa a priori sobre un enunciat del qual encara s'ignora la demostració. Al llarg de la història, els matemàtics han fet moltes conjectures, algunes de les quals han resultat ser certes i altres no.

Conjectura $3x + 1$: *Provar que per a tot número natural x, si construïm la seva successió tal i com hem explicat, arribarem a repetir els números* $4, 2, 1$.

Aquesta conjectura és molt fàcil d'enunciar però ara per ara ha resultat intractable tant a l'hora de provar que és certa, o que és falsa. Matemàtics rellevants com Paul Erdös han dit sobre la conjectura: *La Matemàtica actual encara no està preparada per aquests tipus de problemes.*



Erdös



Collatz

Tot apunta que el primer en formular la conjectura va ser el matemàtic Lothar Collatz de la Universitat de Hamburg al voltant de l'any 1930. A principis dels anys 1950, la conjectura ja era ben coneguda dins de la comunitat matemàtica. El matemàtic Bryan Thwaites la va redescobrir l'any 1952. Existeix una carta en la que Collatz manifesta que ell ja la va enunciar 20 anys abans. Podeu veure la carta a l'apèndix de la pàgina 13 i el diagrama que hi anava adjunt a la figura de la pàgina següent.

Helmut Hasse col·lega de Collatz, es va interessar per la conjectura i la va discutir amb molta gent. Això va fer que durant un temps la conjectura es conegués com l'algorisme de Hasse. El mateix Hasse va exposar la conjectura als anys 50 en una visita a la Universitat de Siracusa i va proposar de donar-li el nom de la conjectura de Siracusa.

Als voltants de l'any 1960 Shizuo Kakutani va interessar-se per la conjectura i va comentar: "Durant un mes, tots els matemàtics de la Universitat de Yale van estar treballant amb la conjectura sense obtenir cap resultat satisfactori". Un fenomen similar va tenir lloc a la Universitat de Chicago. Aleshores, va aparèixer l'acudit que la conjectura formava part d'una conspiració del russos per alentir tota la recerca matemàtica als Estats Units. Durant aquest període, la conjectura es va conèixer com la conjectura de Kakutani.

Stanisław Ulam també es va interessar per la conjectura, la va popularitzar a Los Alamos (on ell treballava) i a altres llocs. Durant un temps i en certs cercles, la conjectura es va conèixer com la conjectura de Ulam.

En aquests moments, a la base d'articles matemàtics MathSciNet ja hi ha més de 150 articles publicats al voltant de la conjectura $3x + 1$. Veieu també la pàgina web del Jeff Lagarias

http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/,

on es poden trobar pràcticament totes les referències bibliogràfiques sobre el problema $3x + 1$ comentades.

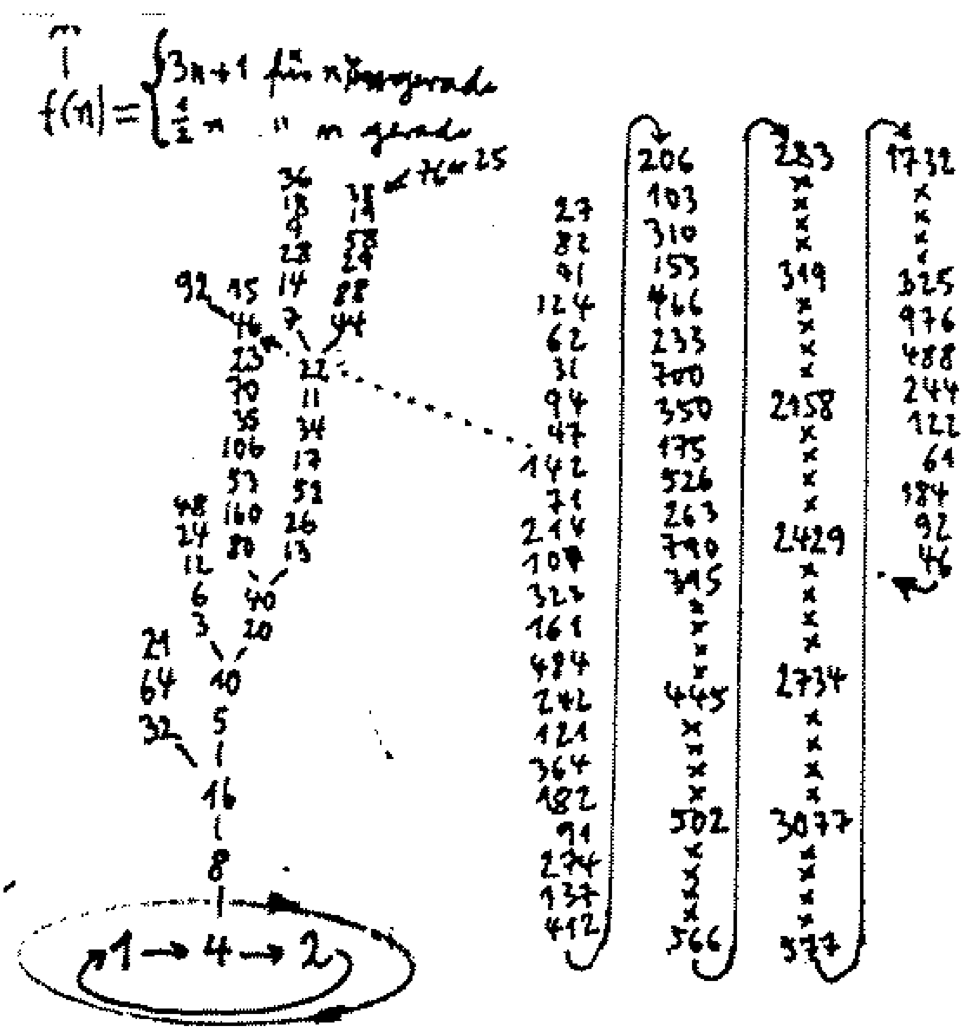


Diagrama que va fer Lothar Collatz.

2 Números convergents, divergents o cíclics

Per a tot número natural x escrivim la successió de números naturals del problema $3x+1$ de la següent manera:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$$

on $x_0 = x$ i per a tot $k > 0$ tenim que

$$x_k = \begin{cases} 3x_{k-1}+1 & \text{si } x_{k-1} \text{ és senar,} \\[2ex] \dfrac{x_{k-1}}{2} & \text{si } x_{k-1} \text{ és parell.} \end{cases}$$

Per exemple, $x_0 = 13$, $x_1 = 40$, $x_2 = 20$, $x_3 = 10$, $x_4 = 5$, $x_5 = 16$, $x_6 = 8$, $x_7 = 4$, $x_8 = 2$, $x_9 = 1$, $x_{10} = 4$, $x_{11} = 2$, $x_{12} = 1$, ...

Sigui x un número natural. Ara definim

$$\text{Max}(x) = \lim_{k\to\infty} \text{Màxim}\{x_0 = x, x_1, \ldots, x_k\},$$

A l'exemple $\text{Max}(13) = 40$.

També definim

$$\text{Min}(x) = \lim_{k\to\infty} \text{Mínim}\{x_0 = x, x_1, \ldots, x_k\},$$

Al mateix exemple $\text{Min}(13) = 1$.

$$\text{Direm que } x \text{ és} \begin{cases} \textit{convergent} \text{ si } \text{Min}(x) = 1, \\ \textit{divergent} \text{ si } \text{Max}(x) \text{ no existeix,} \\ \textit{cíclic} \text{ en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

De fet, no costa pas gaire provar que, donat un número natural x qualsevol, només pot passar una d'aquestes tres coses que acabem de dir.

Per exemple el número 13 és convergent ja que $\text{Min}(13) = 1$.

Si existís un número natural x divergent la seva successió aniria acostant-se a l'infinit fent moltes ziga-zagues.

Si algún dia trobem un número natural x que al fer la seva successió acabi repetint una successió finita de números que no sigui la $4, 2, 1$, tindríem que x és un número cíclic.

Ara podem formular la conjectura $3x+1$ de la següent manera:

Conjectura $3x+1$: *Qualsevol número natural és convergent.*

3 Resultats numèrics

L'any 1999, Oliveira i Silva [4] prova que la conjectura és certa per números naturals x més petits o iguals a $3 \cdot 2^{53} \approx 2.702 \cdot 10^{16}$. Avui en dia (quan aquest article s'escriu) sabem que és certa per números naturals x més petits o iguals a

$$17 \cdot 2^{58} = 4899916394579099648 > 4.899 \cdot 10^{18}.$$

Per veure com va canviant ràpidament aquest coneixement donem la següent taula:

21 Setembre 2004	2^{58}
16 Desembre 2004	$2 \cdot 2^{58}$
23 Febrer 2005	$3 \cdot 2^{58}$
8 Abril 2005	$4 \cdot 2^{58}$
25 Maig 2005	$5 \cdot 2^{58}$
2 Agost 2005	$6 \cdot 2^{58}$
26 Octubre 2005	$7 \cdot 2^{58}$
7 Febrer 2006	$8 \cdot 2^{58}$
29 Març 2006	$9 \cdot 2^{58}$
26 Maig 2006	$10 \cdot 2^{58}$
28 Octubre 2006	$11 \cdot 2^{58}$
12 Desembre 2006	$12 \cdot 2^{58}$
1 Febrer 2007	$13 \cdot 2^{58}$
23 Maig 2007	$14 \cdot 2^{58}$
9 Novembre 2007	$15 \cdot 2^{58}$
4 Gener 2008	$16 \cdot 2^{58}$
21 Febrer 2008	$17 \cdot 2^{58}$

Els resultats de la taula previa es poden trobar a les pàgines web

http://www.ericr.nl/wondrous/
http://www.ieeta.pt/~tos/3x+1.html

4 Temps de parada

Si la conjectura és certa vol dir que en fer la successió $x_0 = x$, x_1, x_2, ..., x_k, ... per a tot número natural x hi haurà un determinat k tal que $x_k = 1$. Per tant, si és certa, tota successió $x_0 = x$, x_1, x_2, ..., x_k, ... acabarà amb el cicle $4, 2, 1$, i ni existirà cap cicle diferent d'aquest, ni hi haurà cap successió divergent.

Per a tot número natural x sigui $t = t(x)$ el subíndex més petit en la successió $x_0 = x$, x_1, x_2, $\ldots$ tal que $x_t < x$. Si la conjectura és certa, aquest $t(x)$ sempre existeix, i li direm el *temps de parada* de x.

De nou prenem l'exemple $x_0 = 13$, $x_1 = 40$, $x_2 = 20$, $x_3 = 10$, $x_4 = 5$, $x_5 = 16$, $x_6 = 8$, $x_7 = 4$, $x_8 = 2$, $x_9 = 1$, $x_{10} = 4$, $x_{11} = 2$, $x_{12} = 1$, $\ldots$ És clar que el temps de parada del 13 és $t(13) = 3$.

Utilitzant la noció de temps de parada la conjectura es pot formular de la manera següent :

Conjectura $3x + 1$: *Qualsevol número natural té un temps de parada finit.*

Notem que si hem provat que per a tots els números $1, 2, \ldots, n$ al fer la seva successió sempre acabem amb $4, 2, 1$, aleshores si tot número natural té un temps de parada finit, en fer la successió del $n + 1$ apareixerà després d'un nombre finit de termes un número més petit que el $n + 1$, pel qual ja sabem que la seva successió acaba amb $4, 2, 1$. Per això si qualsevol número natural té un temps de parada finit, la successió de qualsevol número natural acabarà amb $4, 2, 1$.

És clar que amb la noció de temps de parada la conjectura tampoc se sap provar, però hi ha el següent resultat (un dels més rellevants fins ara en la conjectura $3x + 1$). Informalment es podría enunciar com:

Teorema (Riho Terras, 1976). *Quasi tot número natural té temps de parada finit.*

Enunciat d'una manera més rigurosa sería:

Teorema (Riho Terras [5], 1976). *Pel número natural k es defineix la seva densitat límit asimptòtica com*

$$F(k) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \operatorname{Card}\{n \in \mathbb{N} : n \leq x \text{ i } t(n) \leq k\}.$$

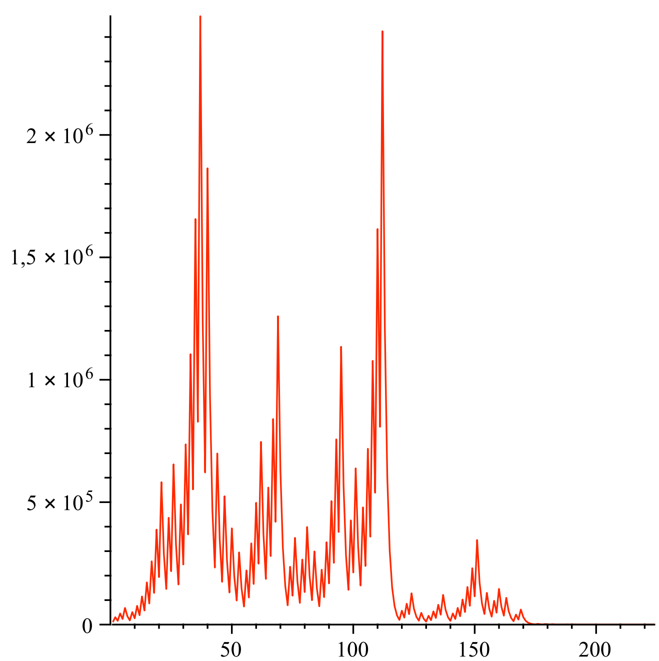
Aleshores $F(k)$ existeix, i $F(k) \to 1$ quan $k \to \infty$.

Per a acabar aquesta secció introduïm un nou concepte. Direm que un número natural x té un *temps de parada rècord* si per a tot natural $y < x$ tenim que $t(y) < t(x)$.

La taula dels números naturals amb un temps rècord de parada conegut és:

	x	$t(x)$
1	2	1
2	3	6
3	7	11
4	27	96
5	703	132
6	10087	171
7	35655	220
8	270271	267
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
33	180352746940718527	1575
34	1236472189813512351	1614
35	2602714556700227743	1639

A la figura següent representem la successió (fins a arribar a $4, 2, 1$) associada al sisè número amb temps de parada rècord, $x_0 = 10087$. Observem de nou el comportament altament irregular de la successió.



5 La conjectura $3x + 1$ sobre els números enters

Què passaria si considerem la mateixa successió $x_0 = x$, x_1, x_2, ..., x_k, ... definida per

$$x_k = \begin{cases} 3x_{k-1} + 1 & \text{si } x_{k-1} \text{ és senar,} \\ \\ \dfrac{x_{k-1}}{2} & \text{si } x_{k-1} \text{ és parell.} \end{cases}$$

però ara x és un número enter, és a dir, un número del conjunt

$$\{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}?$$

Si x és un enter negatiu, aleshores tots els números de la successió $x_0 = x$, x_1, x_2, ..., x_k, ... són negatius.

Si $x = 0$, aleshores la successió és

$$x_0 = x = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_k = 0, \ldots$$

Quan una successió es repeteix des del començament, direm que tenim una *successió periòdica.*

Exemple: Les úniques successions periòdiques positives conegudes són:

$$1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, \ldots$$

$$4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$$

$$2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, \ldots$$

En aquests casos direm que el conjunt $\{1, 2, 4\}$ és una *òrbita periòdica de període* 3 del problema $3x + 1$.

Si la conjetura $3x + 1$ és certa, aquesta és l'única òrbita periòdica pels enters positius, és a dir, pels nombres naturals. Però si considerem les successions per a tot enter, positiu, negatiu o zero, hi ha més òrbites periòdiques.

La successió $0, 0, 0, 0, \ldots$ ens diu que el conjunt $\{0\}$ és una òrbita periòdica de període 1.

La successió

$$-2, -1, -2, -1, -2, -1, \ldots$$

ens diu que el conjunt $\{-2, -1\}$ és una òrbita periòdica de període 2.

La successió

$$-5, -14, -7, -20, -10, -5, -14, -7, -20, -10, -5, -14, -7, -20, -10, \ldots$$

ens diu que el conjunt $\{-20, -14, -10, -7, -5\}$ és una òrbita periòdica de període 5.

La successió

$$-17, -50, -25, -74, -37, -110, -55, -164, -82, -41, -122, -61, -182,$$
$$-91, -272, -136, -68, -34, -17, -50, -25, -74, -37, \ldots$$

ens diu que tenim una òrbita periòdica de període 18.

Tenim, per tant, 5 òrbites periòdiques diferents si x varia en els números enters.

Conjectura $3x + 1$ per x enter: *Provar que per a tot número enter x, si construïm la seva successió tal i com hem explicat, arribarem a una de les 5 òrbites periòdiques mencionades.*

6 Resultats sobre òrbites periòdiques

Hi ha autors que quan estudien aquest problema consideren la successió que s'obté prenent $x_k = (3x_{k-1} + 1)/2$ quan x_{k-1} és senar. Notem que amb aquesta definició la longitud de les òrbites periòdiques és més petita. En particular, l'òrbita atractora als enters positius seria $\{1, 2\}$.

El principal resultat que es té fins ara és:

Teorema (Crandall [2], 1978). *Sigui n l'element més petit d'una òrbita periòdica del problema $3x + 1$ de període k (usant la versió $(3x + 1)/2$). Aleshores*

$$k > \frac{3}{2} \min\left(q_j, \frac{2n}{q_j + q_{j+1}}\right),$$

on p_j/q_j és la convergent $j \geq 4$ del desenvolupament de $\log_2 3$ en fracció contínua.

Com a conseqüència d'aquest resultat es pot provar el següent:

Corol·lari. *Si existeix un número enter tal que la seva successió va a parar a una òrbita periòdica diferent de $\{1, 2\}$, aleshores el període d'aquesta òrbita periòdica hauria de ser més gran que 272.500.658.*

7 Sobre la intractabilitat de la conjectura $3x + 1$

Ens podríem mirar la conjectura com un sistema dinàmic discret, és a dir, com una funció $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \text{ és senar,} \\ \dfrac{x}{2} & \text{if } x \text{ és parell.} \end{cases}$$

Aleshores, la conjectura sobre els nombres naturals es podria enunciar:

Conjectura $3x + 1$ en els naturals: *Provar que l'òrbita periòdica* $\{4, 2, 1\}$ *de la funció* f *és globalment atractora.*

Les funcions que s'estudien com a sistemes dinàmics discrets acostumen a tenir una certa estructura, per exemple

- són funcions contínues entre varietats topològiques,
- són funcions diferenciables entre varietats diferenciables,
- són funcions analítiques entre varietats analítiques,
- ...

Aquesta estructura permet utilitzar les eines dels sistemes dinàmics per a estudiar aquestes funcions. Però aquestes estructures o d'altres, ara per ara, no sabem com fer-les aparèixer en la funció $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pel problema $3x + 1$ de manera que permetessin assolir resultats positius.

Jo crec que en Paul Erdos quan deia que: *La Matemàtica actual encara no està preparada per aquests tipus de problemes*, d'alguna manera estava pensant en aquesta falta d'eines per atacar el problema $3x + 1$.

Tot i les dificultats esmentades per la falta d'aquestes estructures amb la funció $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ del problema $3x + 1$, podem estudiar aquest sistema determinista com un sistema aleatori. Així, utilitzant tècniques properes a la teoria ergòdica s'han obtingut resultats com el del Riho Terras. O bé, utilitzant el desenvolupament de $\log_2 3$ en fracció contínua es pot provar que si hi ha alguna altra òrbita periòdica, aquesta ha de tenir un període més gran que 272.500.658.

És clar que el problema $3x + 1$ té un gran component de la teoria de nombres. Així, certs autors han atacat el problema utilitzant la teoria dels nombres p–àdics principalment amb $p = 2$ i $p = 3, \ldots$

Més informació sobre la conjectura $3x + 1$ es pot trobar a la pàgina web del Jeff Lagarias o en el seu article [3], o bé en l'article del Marc Chamberland [1], o en el llibre de Wirsching [6].

Agraïments

L'autor està finançat per MEC/FEDER MTM 2005-06098-C02-01 i CIRIT 2005SGR 00550.

Aquest article de divulgació s'ha escrit a partir d'una conferència sobre aquest tema que l'autor va donar al CosmoCaixa el 14 de Febrer de 2008 dins el cicle "Les grans conjectures matemàtiques".

Referències

[1] M. Chamberland, *Una actualizació del problema* $3x+1$, (traduït per en Toni Guillamon), Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques **22** (2003), 1–27.

[2] R.E. Crandall, *On the "*$3x + 1$*" problem*, Math. Comp. **32** (1978), 1281–1292.

[3] J.C. Lagarias, *The* $3x + 1$ *problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92**, (1985), 3–23.

[4] T. Oliveira e Silva, *Maximum Excursion and Stopping Time Record-Holders for the* $3x + 1$ *Problem: Computational Results*, Math. Comp. **68** (1999), 371–384.

[5] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arithmetica **30** (1976), 241–252.

[6] G. Wirsching, *The Dynamical System Generated by the* $3n + 1$ *Function*, Lecture Notes in Mathematics, **1681**, Springer, Heidelberg, 1998.

Apèndix: Carta de Collatz a Mays

UNIVERSITÄT HAMBURG

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Prof. Dr. L. Collatz

Institut für Angewandte Mathematik
2 Hamburg 13, Bundesstr. 55

Fernsprecher: 4 41 95 .
Behördennetz: 9.48 (.) Durchwahl

Telex-Nr.: 2 14732

Herrn
Prof. Michael E. Mays
Department of Mathematics
College of Arts and Sciences

Morgantown, West Virginia
26506
USA

Datum und Zeichen Ihres Schreibens

Aktenzeichen (bei Antwort bitte angeben) Co/Sch

Datum 17. September 1980

Betreff

Dear Professor Mays!

Vielen Dank für Ihren Brief und für Ihr Interesse an der Funktion

$$Tn = \begin{cases} n/2 & n \text{ even} \\ (3n+1)/2 & n \text{ odd}, \end{cases}$$

die ich vor fast 50 Jahren neben verschiedenen anderen zahlentheoretischen Funktionen näher betrachtet habe. Ich hatte 1929 Vorlesungen von E. Landau und zahlentheoretische Vorlesungen von Lettenmeyer, beide in Göttingen und 1930 Vorlesungen von O. Perron in München und Isai Schur in Berlin gehört und ich fand es interessant, die Graphen von zahlentheoretischen Funktionen $f(n)$ aufzuzeigen, indem ich einen Pfeil von n zu $f(n)$ zeichnete oder einfacher, indem ich $f(n)$ unter n hinschrieb. Man konnte dann verschiedene Begriffe wiederfinden, die in der Theorie gerichteter Graphen (digraphs) bekannt sind, wie Bäume (trees) Zusammenhangszahlen, Kreise (cycles) Verzweigungen (bifurcation) usw. Ich weiß nicht, wer als erster diese Beziehungen zur Graphentheorie untersucht hat; ich hatte jedenfalls weder in Vorlesungen noch in Veröffentlichungen diese Art der Darstellung zahlentheoretischer Funktionen kennengelernt. Mir machte es jedenfalls Spaß, die verschiedenen Erscheinungen zu beobachten und ich habe damals die Graphen zu sehr vielen zahlentheoretischen Funktionen gewöhnlich für Werte von n bis etwa 100 aufgestellt. So habe ich auch das obengenannte Beispiel betrachtet, welches ich in der im wesentlichen gleichwertigen Form

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & n \text{ even} \\ 3n+1 & n \text{ odd} \end{cases}$$

- 2 -

geschrieben hatte. Der unwesentliche Unterschied ist für n odd:

bei Ihnen $n \to (3n+1)/2$ | bei mir $n \to 3n+1 \to (3n+1)/2$.

Als ich dann selbst zahlentheoretische Vorlesungen hielt, habe ich dieses Beispiel vorgeführt und auch verschiedentlich auf Tagungen dieses Beipiel genannt und als Problem bezeichnet: gehört die Zahl n=8 zu einem Cyclus oder nicht? Ich selbst hatte damals nur eine kleine Tischrechenmaschine zur Verfügung, und soweit ich mit dieser rechnen konnte, ergab sich für n=8 kein Cyclus und ich konnte die Frage nicht beantworten. Ich habe nun mit verschiedenen Zahlentheoretikern über diese Frage gesprochen; aber soweit mir bekannt ist, ist die Frage bis jetzt noch nicht beantwortet worden. Teilergebnisse sind erhalten worden. So schrieb mir Prof. Garner (Anschrift anbei) ein Teilresultat, welches ich in Kopie hier beilege. Ferner lege ich in Kopie einen kleinen Abschnitt aus meinem gezeichneten Digraphen bei. Wenn Sie von einer Lösung hören, wäre ich Ihnen für eine Mitteilung sehr dankbar.

Entschuldigen Sie bitte, daß ich diesen Brief in Deutsch schreibe, ich hoffe, Sie werden jemanden finden, der Ihnen den Brief übersetzen kann.

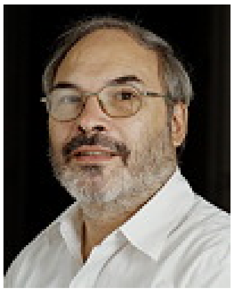
Mit freundlichen Grüßen

Ihr sehr ergebener

P.S. Wenn es nicht zu unbescheiden ist, darf ich vielleicht erwähnen, daß Prof. H. Hasse obige Fragestellung das "Problem von Collatz" genannt hat.

Aquesta carta es pot trobar traduïda a l'anglès a:

http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/goodies/ubersetzung/html/ubersetzung.html



Departament de Matemàtiques,
Universitat Autònoma de Barcelona
jllibre@mat.uab.cat

Publicat el 12 de març de 2008