

Càlculs en xarxes elèctriques

Antoni Benseny Ardiaca

Les xarxes elèctriques subministren als seus usuaris energia elèctrica generada en centrals nuclears, hidroelèctriques, tèrmiques, eòliques, ... Aquestes xarxes són controlades per les companyies elèctriques mitjançant aplicacions informàtiques que requereixen de càlculs de diversos tipus.

Amb aquest material es vol fer patent i destacar la importància de la matemàtica computacional en la posada a punt d'aplicacions informàtiques de control per regulació de xarxes elèctriques.

Per a una millor comprensió, els conceptes físics i matemàtics es van introduint gradualment, començant amb els càlculs en circuits i acabant amb els càlculs en xarxes elèctriques. Tots tenen la seva base física en la llei de conservació de la càrrega i en la llei d'Ohm que relaciona tensions amb intensitats.

Per això, es mostra primer l'aplicació de la llei d'Ohm a circuits simples de corrent continu. L'extensió a circuits simples de corrent altern en règim estacionari es fa mitjançant l'ús de fasors, magnituds complexes que simplifiquen la informació sobre l'evolució temporal de diferents magnituds físiques en règims estacionaris. Els càlculs en els circuits simples serveixen així per a fer una introducció dels conceptes físics i de la seva formulació emprada més endavant. En el cas de circuits interconnectats, l'aplicació adequada de les lleis de Kirchhoff a cada circuit serveix per a escriure un sistema lineal en les intensitats de corrent que circulen per les seves branques. La resolució d'aquest sistema permet trobar aquestes intensitats.

A continuació, es fa una descripció breu de les xarxes elèctriques encarregades del transport i la distribució de la potència elèctrica generada en les



centrals elèctriques fins als clients.

Se segueix amb la formulació dels càlculs en les xarxes elèctriques. El problema a resoldre es planteja en potències en comptes d'intensitats; això fa que no sigui lineal. La seva resolució requereix ara de mètodes numèrics iteratius d'aproximació a la solució. Finalment, es fa una introducció a la formulació matemàtica dels càlculs de regulació que fan les companyies elèctriques en les seves xarxes per tal d'augmentar la seva seguretat i reduir la pèrdua de potència.

Els càlculs requereixen la utilització combinada de mètodes numèrics de resolució de sistemes lineals, de resolució iterativa de sistemes d'equacions no lineals, i d'optimització de funcions amb lligams no lineals. Una bona estructuració de la informació, mitjançant tècniques relatives als grafs i als sistemes lineals esparsos, permet reduir l'espai de memòria emprat, el nombre d'operacions requerides i, per tant, el temps de càlcul. Aquests aspectes adquireixen gran importància sobretot quan els càlculs s'han de fer en l'explotació de les xarxes elèctriques en temps real.

1 Circuits simples

Es recorden a continuació els conceptes bàsics referents a circuits simples de corrent continu i de corrent altern.

1.1 Circuits simples de corrent continu

Es considera un circuit simple, com el de la Figura 1, amb un generador que produeix una *tensió* (*diferència de potencial*) constant V entre els extrems d'una *resistència* de magnitud R . Aquesta tensió fa que les càrregues lliures hi circulin amb una *intensitat* I constant (càrrega lliure que travessa cada secció del circuit per unitat de temps).

La *lei d'Ohm* relaciona aquestes magnituds:

$$V = RI .$$

La intensitat I es pot doncs trobar de forma trivial:

$$I = \frac{V}{R} .$$



Georg Simon Ohm
(1787-1854)

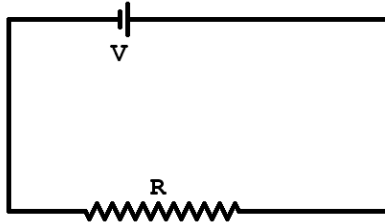


Figura 1: Circuit simple de corrent continu

La *potència* generada es consumeix en la resistència per *efecte Joule* i es transforma en energia calorífica, segons:

$$P = VI = RI^2 .$$

En els sistema internacional, les resistències es mesuren en *ohms* (Ω), les tensions en *volts* (V), les intensitats en *ampers* (A) i les potències en *wats* (W).

1.2 Circuits simples de corrent altern

Els circuits de corrent altern es caracteritzen per contenir alternadors que generen corrent altern per inducció magnètica, produint una tensió oscil·latòria en el temps t de la forma

$$v(t) = V \cos(\theta + \omega t)$$

amb *tensió nominal* V , *pulsació* $\omega = 2\pi\nu$ (*frequència* ν) i *fase* θ .

D'ara en endavant, s'entendrà aquesta *tensió instantània* $v(t)$ com la part real de la *tensió instantània complexa*:

$$e(t) = V e^{i(\theta + \omega t)} = V e^{i\theta} e^{i\omega t} = E e^{i\omega t} ;$$

on s'ha fet servir la notació d'Euler en què $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$. També es farà aquesta consideració per a la *intensitat instantània* $j(t)$, que s'entendrà com la part real de la *intensitat instantània complexa* $i(t)$.

Els circuits simples RLC de corrent altern, com el de la Figura 2, estan formats per:

- un alternador amb una tensió nominal V i una freqüència ν ;

- una resistència de magnitud R ;
- una bobina amb un *coeficient d'autoinducció* L ;
- un condensador amb una *capacitat* C .

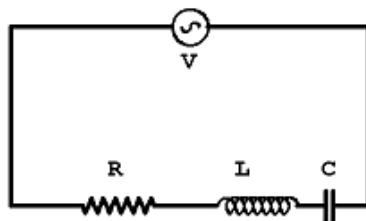


Figura 2: Circuit simple de corrent altern

En el sistema internacional MKSA, el coeficient d'autoinducció es mesura en *henrys* (H) i la capacitat, en *farads* (F).

La tensió instantània complexa produïda en l'alternador es reparteix entre les tensions instantànies complexes:

- en la resistència: $Ri(t)$ (llei d'Ohm);
- en la bobina: $L \frac{di(t)}{dt}$ (llei de Faraday);
- en el condensador: $\frac{q(t)}{C}$;

on $q(t)$ és la *càrrega* instantània complexa del condensador, la derivada de la qual és la intensitat instantània complexa $i(t)$ que es vol trobar.

Així, es té la relació:

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}$$

que, derivada respecte al temps, dóna l'equació diferencial de segon ordre en la intensitat instantània complexa $i(t)$ següent:

$$\frac{de(t)}{dt} = L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} .$$

La seva solució general $i(t)$ és la suma d'una solució particular $i_p(t)$ amb la solució general de l'equació homogènia:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = 0 ,$$

que resulta ser de la forma:

$$i_h(t) = A_1 e^{d_1 t} + A_2 e^{d_2 t} ,$$

on d_1, d_2 són les solucions de l'equació de segon grau:

$$Ld^2 + Rd + \frac{1}{C} = 0 .$$

Quan d_1, d_2 tenen part real negativa, es parla de situació estable, i les solucions de l'equació homogènia tendeixen a zero, quan el temps augmenta: es passa d'un *règim transitori* en què aquestes poden tenir importància a un *règim estacionari* caracteritzat per la solució particular trobada:

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) \approx i_p(t) \quad (t \rightarrow \infty) .$$

Per tal de trobar una solució particular, s'assaja una solució de la forma

$$i_p(t) = I e^{i\omega t} .$$

Es té

$$i\omega E e^{i\omega t} = (i\omega R - \omega^2 L + \frac{1}{C}) I e^{i\omega t} ,$$

o millor:

$$e(t) = E e^{i\omega t} = (R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}) I e^{i\omega t} = Z i_p(t) .$$

Troblem així una solució particular de la forma:

$$i_p(t) = \frac{1}{Z} e(t) = \frac{E}{Z} e^{i\omega t} .$$

La intensitat instantània complexa corresponent al règim estacionari resulta ser una funció oscil·latòria de la mateixa freqüència que l'alternador.

Aquest fet permet representar les tensions i les intensitats mitjançant els *fasors tensió* E i els *fasors intensitat* I i també estendre la llei d'Ohm en

els circuits simples de corrent continu als de corrent altern RLC, utilitzant aquests fasors:

$$E = ZI = \left(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right)I = E_R + E_L + E_C ,$$

on es pot veure la contribució de cada terme RLC al fasor tensió:

$$E_R = RI , \quad E_L = i\omega LI , \quad E_C = \frac{1}{i\omega C}I .$$

La *impedància* $Z = R + iX$ és una magnitud complexa que té com a part real la resistència R ; la seva part imaginària X es diu *reactància* i es compon de la *reactància inductiva* $X_L = \omega L$ i la *reactància capacitiva* $X_C = -\frac{1}{\omega C}$: $X = X_L + X_C$.

La impedància vista en polars, $Z = |Z| e^{i \arg Z}$, ens permet trobar fàcilment:

- el mòdul J de la intensitat, dividint el mòdul V de la tensió pel mòdul $|Z|$ de la impedància:

$$J = \frac{V}{|Z|} , \quad |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} ,$$

- l'angle φ de desfase en l'oscil·lació de la intensitat respecte a la tensió, ve donat per l'argument de Z canviat de signe:

$$\varphi = \phi - \theta = -\arg Z = -\operatorname{atan} \frac{X}{R} .$$

Resumint, en règim estacionari, la tensió i la intensitat instantànies són funcions oscil·latòries del temps t amb pulsació $\omega = 2\pi\nu$:

$$v(t) = V \cos(\theta + \omega t) = \operatorname{Re}\{V e^{i\theta} e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{e(t)\} ,$$

$$j(t) = J \cos(\phi + \omega t) = \operatorname{Re}\{J e^{i\phi} e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{i(t)\} .$$

S'han emprat representacions de la tensió i la intensitat utilitzant els seus *fasors tensió i intensitat*:

$$E = V e^{i\theta} , \quad I = J e^{i\phi} ;$$

de manera que

$$e(t) = Ee^{i\omega t}, \quad i(t) = Ie^{i\omega t}.$$

Els fasors E i I es poden visualitzar com a vectors en el pla complex que van des de l'origen fins al valor: E té mòdul V i fase θ , I té mòdul $J = V/|Z|$ i fase $\phi = \theta + \varphi$, on φ és l'argument de Z canviat de signe. Els valors instantanis de la tensió i la intensitat complexes es poden visualitzar llavors fent girar aquests dos vectors a una velocitat angular ω ; això és, a ν voltes per segon.

La *potència instantània* es defineix com el producte entre la tensió i la intensitat instantànies:

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) = VJ \cos(\theta + \omega t) \cos(\phi + \omega t) \\ &= \frac{1}{2}VJ[\cos(\varphi) + \cos(\varphi + 2(\theta + \omega t))] \\ &= \frac{1}{2}VJ[\cos(\varphi)(1 + \cos(2(\theta + \omega t))) - \sin(\varphi) \sin(2(\theta + \omega t))] . \end{aligned}$$

Integrant la potència instantània al llarg del període $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$ i dividint-la pel període, es troba la *potència mitjana*

$$\bar{P} = \frac{1}{2}VJ \cos \varphi \equiv V_e J_e \cos \varphi ,$$

on $V_e = \frac{1}{\sqrt{2}}V$, $J_e = \frac{1}{\sqrt{2}}J$ són els *mòduls de tensió eficaç i intensitat eficaç*. De forma anàloga, es poden introduir els *fasors tensió eficaç i intensitat eficaç*, E_e, I_e .

Es treballa sovint amb la *potència complexa* S , producte del conjugat del fasor tensió eficaç E_e^* pel fasor intensitat eficaç:

$$S = E_e^* I_e = V_e e^{-i\theta} J_e e^{i\phi} = V_e J_e e^{i\varphi} = P + iQ .$$

que té com a part real, la *potència activa* $P = V_e J_e \cos \varphi$, i com a part imaginària, la *potència reactiva* $Q = V_e J_e \sin \varphi$. El terme $\cos \varphi$ s'anomena *factor de potència*.

Cal observar que la potència complexa S **no** és un fasor, com ho són E i I , en el sentit que **no** és cert que $p(t) = \text{Re}\{S e^{i\omega t}\}$.

La relació amb la potència instantània resulta ser:

$$p(t) = P(1 + \cos(2(\theta + \omega t))) - Q \sin(2(\theta + \omega t)) .$$

S'observa que la potència mitjana \bar{P} coincideix amb la potència activa P .

La potència complexa generada es dissipa en la impedància com s'indica a continuació:

$$S = E_e^* I_e = Z I_e^* I_e = Z J_e^2 .$$

Això és, la potència activa es dissipa, per efecte Joule, amb la resistència i la potència reactiva, amb la reactància:

$$P = R J_e^2 , \quad Q = X J_e^2 .$$

Les potències activa i reactiva tenen molta importància en la secció de xarxes elèctriques (§3). Allà es fan servir els fasors tensió i intensitat efectives, tot i que no es diu explícitament.

1.2.1 Exemple

En un circuit amb un alternador de tensió nominal 220 V i freqüència 50 Hz en què hi ha una resistència R de 3 Ω , una autoinducció L de 15 mH i una capacitat C d'1 mF, el càlcul de les potències activa i reactiva es fa de la manera següent:

- Es calcula la impedància:

$$\begin{aligned} Z &= R + i[\omega L - \frac{1}{\omega C}] = \left(3 + i[(100\pi)(15 \cdot 10^{-3}) - \frac{1}{(100\pi)10^{-3}}] \right) \Omega \\ &= (3 + i[1.5\pi - \frac{10}{\pi}]) \Omega \approx (3 + 1.529i) \Omega \approx 3.367e^{0.471i} \Omega . \end{aligned}$$

- El mòdul de la intensitat és llavors $J = V/|Z| = 220/3.37 \approx 65.33$ A i el desfase de la intensitat amb la tensió de $\varphi \approx -0.471$ radianys.
- El mòdul al quadrat de la intensitat eficaç és llavors $J_e^2 = J^2/2 \approx 2134$ A².
- Les potències activa i reactiva són $P = R J_e^2 \approx 6403$ W i $Q = X J_e^2 \approx 3264$ W.

2 Circuits interconnectats

Es consideren ara circuits amb diversos nusos interconnectats. Les connexions es realitzen mitjançant conductors que uneixen els diversos components elèctrics: generadors/motors i resistències, en circuits de corrent continu; alternadors, resistències, bobines i condensadors, en circuits de corrent altern. La modelització es fa mitjançant grafs i els càlculs a realitzar requereixen d'algorismes de recorreguts jeràrquics i de cerca de cicles fonamentals en grafs.

2.1 Circuits interconnectats de corrent continu

Un circuit interconnectat es pot modelar com un *graf connex* amb vèrtexs corresponents als nusos i amb arestes o branques corresponents a les connexions mitjançant conductors.

Cadascuna d'aquestes connexions pot contenir:

- resistències,
- generadors o motors que introdueixen una força electromotriu positiva (en els generadors) o negativa (en els motors). Aquests, a més, poden tenir resistències internes. La força electromotriu s'entén com la tensió que es produeix quan la resistència interna és nul·la.

La modelització del circuit interconnectat mitjançant un graf amb la informació anterior sobre les seves branques, conforma el que podríem anomenar *graf elèctric*. Un cop configurat el circuit com a graf elèctric, en què es coneixen els valors de les forces electromotrius i de les resistències de les branques, es vol determinar les intensitats que circulen en cadascuna de les branques del circuit elèctric.

Per això, inicialment es fixa, de forma arbitrària, la direcció de la intensitat en cadascuna de les branques.

La *primera llei de Kirchhoff*, *llei dels nusos*, es basa en la conservació de la càrrega elèctrica. Aquesta llei assegura que, per a cada nus k , la suma algebraica de les intensitats serà nul·la: això és, que la suma (sense signe) de les intensitats que “entren \leftarrow ” en



Gustav R. Kirchhoff
(1824-1887)

el nus serà igual a la suma (sense signe) de les intensitats que en “surten \rightarrow ”:

$$\sum_j I_{k \leftrightarrow j} = \sum_j I_{k \leftarrow j} + \sum_j I_{k \rightarrow j} = 0 .$$

En el graf elèctric es poden considerar diversos cicles o malles; això és, camins tancats que surten d'un nus i arriben al mateix nus, passant per diverses branques.

La *segona llei de Kirchhoff, llei de les malles*, basada en la llei d'Ohm, es formula en la forma següent: per a cada malla \mathcal{C} , la suma algebraica dels productes de les intensitats I_l per les resistències R_l en les branques l de la malla és igual a la suma algebraica de les forces electromotrius \mathcal{E}_l en les dites branques:

$$\sum_{l \in \mathcal{C}} R_l I_l = \sum_{l \in \mathcal{C}} \mathcal{E}_l .$$

Es tria un sentit recorregut i s'entén que, si el sentit de recorregut de la malla és el mateix que el de la intensitat o de la força electromotriu, la contribució en la suma algebraica és positiva; però, si és diferent, la contribució és negativa.

S'indica per n el nombre de nusos del circuit i per b , el de branques d'un circuit. Es requereix un mínim de $b = n - 1$ branques per tal de connectar aquests n nusos i, per a cada branca de més, es té un cicle o malla. Un conjunt de només $n - 1$ branques connectant tots aquests nusos s'anomena *arbre extensiu* perquè s'estén a tots els nusos i no té cicles. Hi ha diverses maneres de trobar-lo. Es pot utilitzar, per exemple, els *algorismes de cerca en amplitud i de cerca en profunditat* (breadth-first search i depth-first search, en anglès). Sigui quin sigui aquest arbre extensiu, per a cada branca que hi hagi de més en el circuit, s'obté un *cicle fonamental* o *malla fonamental*. El nombre de malles fonamentals serà doncs el nombre de branques que no pertanyen a l'arbre extensiu, dit *nombre ciclotòmic*, i que resulta ser $c = b - n + 1$.

Per a cada nus es pot escriure una *equació de nus*, aplicant la llei dels nusos. Les equacions dels nusos no són totes linealment independents. En realitat, ho són totes menys una. Per tant, el nombre d'equacions de nusos a considerar és $n - 1$ (per exemple, es pot no considerar l'equació per al nus $k = 1$).

Per a cadascuna de les $b - n + 1$ malles fonamentals trobades \mathcal{C}_m , s'escriu una *equació de malla*, aplicant la llei de les malles.

Es pot així escriure un sistema lineal de b equacions de nusos i malles en les b incògnites corresponents a les intensitats que circulen per les branques:

$$\sum_j I_{k \leftrightarrow j} = \sum_j I_{k \leftarrow j} + \sum_k I_{k \rightarrow j} = 0 \quad (k = 2 \div n) ;$$

$$\sum_{l \in \mathcal{C}_m} R_l I_l = \sum_{l \in \mathcal{C}_m} \mathcal{E}_l \quad (m = 1 \div c = b - n + 1) .$$

La resolució numèrica del sistema, que es pot fer per mètodes directes, permet trobar les intensitats circulants per les branques.

2.1.1 Exemple

Es considera el circuit de la Figura 3 on les forces electromotrius dels generadors s'especifiquen en volts (V) i les resistències en ohms (Ω).

Es tria el sentit de la intensitat de les branques com la que va del nus amb índex més petit al més gran.

Es considera l'arbre expansiu amb arrel en el vèrtex 1 (central) i les branques que el porten als altres vèrtexs que apareixen en blau a la figura. Les branques que no estan en l'arbre hi figuren en verd i generen les malles fonamentals següents, indicades mitjançant les seves successions de vèrtexs: $\mathcal{C}_1 : 2 - 3 - 1 - 2$, $\mathcal{C}_2 : 2 - 4 - 1 - 2$, $\mathcal{C}_3 : 3 - 5 - 1 - 3$, $\mathcal{C}_4 : 4 - 5 - 1 - 4$.

Les equacions dels nusos, per als nusos 2, 3, 4 i 5, són:

$$\begin{aligned} I_{12} - I_{23} - I_{24} &= 0 \\ I_{13} - I_{23} - I_{35} &= 0 \\ I_{14} + I_{24} - I_{45} &= 0 \quad , \\ I_{15} + I_{35} + I_{45} &= 0 \end{aligned}$$

i les equacions de les malles, per a les malles fonamentals \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 i \mathcal{C}_4 , són:

$$\begin{aligned} I_{23} - I_{13} + I_{12} &= 12 \\ I_{24} - I_{14} + I_{12} &= 9 \\ I_{35} - I_{15} + I_{13} &= 9 \quad , \\ I_{45} - I_{15} + I_{14} &= 12 \end{aligned}$$

atès que totes resistències són d'1 Ω .

La solució del sistema anterior de 8 equacions amb 8 incògnites permet trobar els valors de les intensitats circulants en les 8 branques del circuit. Aquestes intensitats es mostren en vermell en la figura:

$$I_{12} = 7 \quad , \quad I_{13} = -1 \quad , \quad I_{14} = 1 \quad , \quad I_{15} = -7 \quad ,$$

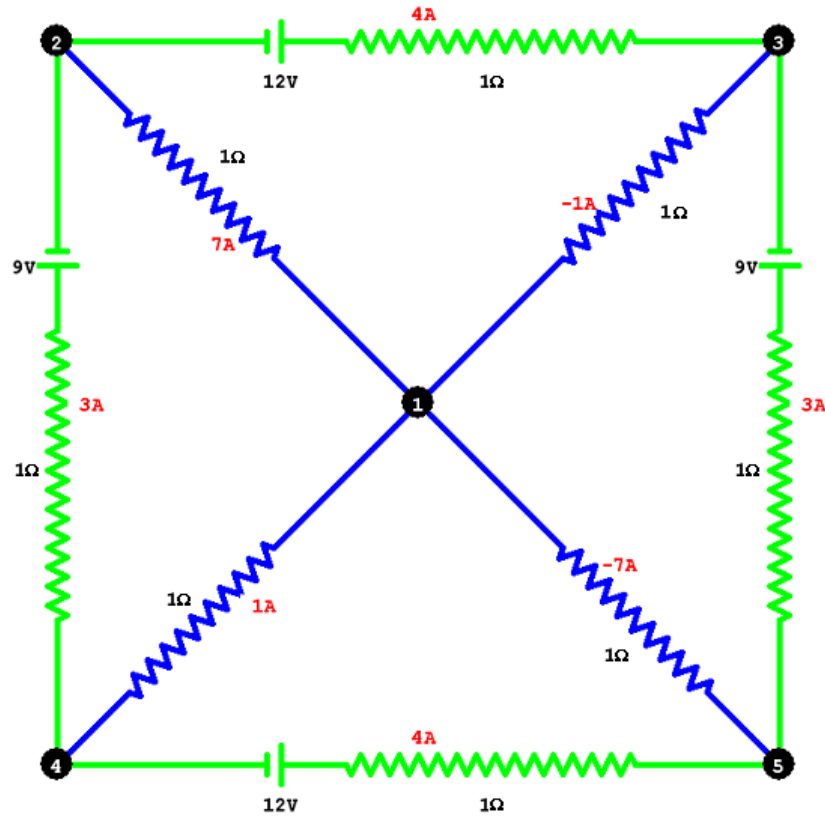


Figura 3: Circuit interconnectat de corrent continu

$$I_{23} = 4, \quad I_{24} = 3, \quad I_{35} = 3, \quad I_{45} = 4.$$

Els valors negatius en les branques 1-3 i 2-5 indiquen que la intensitat hi circula del nus 3 al nus 1 i del nus 5 al nus 2, respectivament.

2.2 Circuits interconnectats de corrent altern

Els càlculs elèctrics en corrent continu es poden estendre als de corrent altern, considerant circuits amb una estructura anàloga de nusos i branques, amb alternadors, resistències, bobines i condensadors en les seves branques: cal simplement fer càlculs similars utilitzant fasors tensió i intensitat. Els càlculs en circuits de corrent altern requereixen la utilització d'aritmètica complexa en lloc de l'aritmètica real dels circuits de corrent continu.

3 Xarxes elèctriques

3.1 Xarxes elèctriques de transport i de distribució

Les *xarxes de transport* s'encarreguen de la generació, la transmissió i la transformació de l'electricitat produïda en diverses centrals cap a les seves connexions amb les xarxes de distribució.

La generació es basa en l'alternador trifàsic que genera corrent altern de freqüència ν de 50 Hz a Europa i de 60 Hz a una bona part d'Amèrica, a unes tensions nominals entre 6 i 25 kV, i a una potència que supera els 1500 MW en les centrals nuclears.

La potència produïda es transforma a alta tensió (AT), es transmet per les línies elèctriques d'alta tensió, es torna a transformar eventualment prop dels grans nuclis urbans o industrials abans de la seva connexió amb les xarxes de distribució mitjançant línies de repartiment que tenen longituds menors de 100 km. Allí es distribueix cap als usuaris per les línies de mitja tensió (MT) i de baixa tensió (BT).

La raó principal d'eleva la tensió per a fer el transport elèctric rau en què es redueixen les pèrdues d'energia per efecte Joule: una mateixa potència es pot enviar amb menys intensitat a més tensió i tenir així menys pèrdua.

La primera transformació a alta tensió es realitza en parcs de transformació, prop de les centrals generadores. La reducció es produeix en subestacions transformadores, cap a les xarxes de repartiment, subtransport o distribució primària.

L'alta tensió a Espanya està normalitzada a tensions nominals de 132, 220 i 380 kV, tot i que, en països més extensos, es treballa a molt alta tensió (MAT) amb tensions de més de 400 kV amb tensions nominals de 500 i 765 kV. En les subestacions, es passa a tensions nominals de 45, 66 i 132 kV.

Es tracta d'una xarxa fortament interconnectada i que requereix d'una modelització amb molt de detall perquè hi intervenen una munió d'elements elèctrics de diverses tipologies. S'aborda aquí només un model simplificat que permet donar una idea dels principals problemes que cal resoldre en les xarxes de transport i dels tipus de càlcul implicats.

Les *xarxes de distribució de mitja tensió* fan arribar la potència elèctrica subministrada per les xarxes de transport en les subestacions de distribució mitjançant línies de mitja tensió cap als centres de transformació. Tenen longituds inferiors a 25 km.

Les tensions nominals usades en mitja tensió tenen valors reglamentaris

de 3, 6, 10, 15 i 20 kV.

En l'entorn rural tenen una estructura radial (acíclica, sense malles) i solen ser aèries però, prop dels nuclis urbans, tenen una estructura mallada i solen ser subterrànies, a fi d'augmentar la seva fiabilitat i seguretat.

Les *xarxes de distribució de baixa tensió* completen la tasca, fent arribar la potència des dels centres de distribució cap als usuaris industrials, comercials, domèstics, ..., mitjançant línies de baixa tensió que tenen longituds inferiors a 1 km.

Les tensions nominals no arriben al kV. A Espanya, els valors normalitzats són de 230 i 400 V.

Tenen una estructura molt feblement mallada, pràcticament radial, n'hi ha de subterrànies i d'aèries amb cables aïllats.

3.2 Modelat de xarxes elèctriques

Les xarxes elèctriques es modelen mitjançant grafs amb informació elèctrica. Els nusos es corresponen bàsicament amb llocs de la xarxa en què hi ha generació, consum o transformació d'energia elèctrica. Aquests nusos es connecten mitjançant línies i transformadors o *trafos*. Les línies connecten els nusos mitjançant conductors, caracteritzats per la seva impedància; els trafos augmenten o redueixen la tensió i es caracteritzen per la seva raó de transformació de la tensió, que pot ser fixa o regulable.

També es poden considerar com a branques, els interruptors i els seccionadors de diversos tipus que poden ser activats i desactivats, i així canviar la configuració activa de la xarxa. Aquesta configuració també canvia eventualment quan es produeix alguna incidència en la què es malmeten algunes de les branques considerades.

Encara que les xarxes elèctriques operen en sistema trifàsic, per a simplificar, se suposarà que el sistema trifàsic està equilibrat. Així cal estudiar una única fase i es pot representar la xarxa per un sistema unifilar.

3.3 Modelat de línies

Cada línia es caracteritza per

- una *impedància en sèrie* $z_l = r_l + ix_{L_l}$ formada per la resistència r_l i la reactància inductiva $x_{L_l} = \omega L_l$ de la línia, i

- una *impedància al terra* $z_l = ix_{C_l}$ formada per la reactància capacitiva $x_{C_l} = -\frac{1}{\omega C_l}$.

Tots aquests paràmetres es configuren a partir de models dels seus valors per unitat de longitud.

El model de la línia fa servir l'*admitància en sèrie* que és l'invers de la impedància en sèrie:

$$y_l = \frac{1}{z_l} = \frac{r_l - ix_{L_l}}{|z_l|^2} = g_l + ib_l ,$$

$$g_l = \frac{r_l}{|z_l|^2} , \quad b_l = -\frac{x_{L_l}}{|z_l|^2} , \quad |z_l|^2 = r_l^2 + x_{L_l}^2 .$$

Les parts reals g_l i imaginària b_l de l'admitància y_l s'anomenen *conductància* i *susceptància*, respectivament.

El model també fa servir l'*admitància al terra* que és l'invers de la impedància al terra:

$$y_{C_l} = \frac{1}{ix_{C_l}} = i\omega C_l .$$

Cada línia l es modela mitjançant mitjançant l'*equivalent en π de línia* que considera:

- una admitància en sèrie y_l ;
- unes admitàncies en paral·lel al terra des dels nusos j, k , extrems de la branca, que es distribueixen l'admitància en paral·lel a parts iguals:

$$y_j^0 = y_k^0 = \frac{y_{C_l}}{2} .$$

3.4 Modelat de trafos

Cada trafo l es caracteritza per la seva *raó de transformació* a_l i es modela també mitjançant l'*equivalent en π de trafo* que considera:

- una admitància en sèrie que és l'admitància del trafo dividida per a_l :

$$\bar{y}_l = \frac{1}{a_l} y_l ;$$

- unes admitàncies en paral·lel en els nusos extrems j, k que són múltiples de l'admitància del trafo i que valen

$$\bar{y}_j^0 = \frac{a_l - 1}{a_l} y_l, \quad \bar{y}_k^0 = \frac{1 - a_l}{a_l^2} y_l,$$

respectivament. S'entén aquí que la transformació de tensió és $1 : a_l$; això és que es transforma la tensió en el costat k del trafo l entre j, k .

3.5 Modelat de la xarxa: mètode nodal

Considerem una xarxa elèctrica estructurada com un graf amb unes branques que modelen les línies i els trafos segons els seus equivalents en π .

Es considera el funcionament de les xarxes elèctriques en règim estacionari i s'utilitzen fasors per a la representació de les tensions i de les intensitats.

Es vol trobar la relació entre les intensitats injectades en els nusos i les tensions en els mateixos; això és, entre les *intensitats nodals* i les *tensions nodals*. Aquestes intensitats injectades corresponen a les intensitats injectades amb sentit positiu en els nusos en què se'n produeix i a les intensitats injectades amb sentit negatiu en els nusos en què se'n consumeix.

Si es considera una branca que uneix els nusos k i j amb una admitància y_{kj} , la llei d'Ohm relaciona el fasor I_{kj} d'intensitat de la branca amb el fasor $E_k - E_j$ de caiguda de tensió entre els seus extrems:

$$I_{kj} = y_{kj}(E_k - E_j).$$

Aplicant la llei dels nusos, el fasor I_k d'intensitat injectada en el nus k és igual a la suma dels fasors I_{kj} d'intensitat de totes les branques que surten del nus, cap al terra i cap als altres nusos:

$$I_k = \sum_{j=0}^n I_{kj} = \sum_{j=0}^n y_{kj}(E_k - E_j) = \left[\sum_{j=0, j \neq k}^n y_{kj} \right] E_k - \sum_{j=1, j \neq k}^n y_{kj} E_j,$$

on s'ha fet servir que la tensió del terra és $E_0 = 0$.

Escrivint l'*equació nodal* anterior per a cadascun dels nusos, es conforma el *sistema d'equacions nodals*:

$$I_k = \sum_{j=0}^n Y_{kj} E_j \quad (k = 0 \div n),$$

on

$$Y_{kk} = \sum_{j=0, j \neq k}^n y_{kj} , \quad Y_{jk} = -y_{kj} \quad (k \neq j) .$$

Els elements diagonals Y_{kk} corresponents als diferents nusos k es troben sumant les admitàncies en paral·lel al terra i les admitàncies en sèrie de les *branques incidents* a cada nus k , que les connecten als seus nusos adjacents. Els elements no diagonals Y_{kj} corresponents a les parelles diferents de nusos k, j són les admitàncies, canviades de signe, de les branques quan estan connectats; sinó, són nuls.

La *matriu d'admitància* $[Y]$ permet el modelat nodal de la xarxa i conté tota la informació requerida en el càlcul sobre dades de connexió i dades elèctriques de les branques. Aquesta matriu relaciona les tensions i les intensitats nodals:

$$[I] = [Y][E] .$$

El *problema del flux d'intensitat* proposa determinar les tensions nodals E_j en cada nus j i les intensitats circulants I_{kj} en les branques que modelen les línies i els trafos entre els nusos k, j , corresponents als valors donats de les intensitats nodals I_k , injectades en els nusos k .

Les tensions nodals es poden trobar resolent el sistema lineal anterior. Les intensitats circulants en les branques s'obtenen llavors fent:

$$I_{kj} = y_{kj}(E_j - E_k) .$$

3.6 Flux de potència

Les companyies elèctriques poden tenir informació sobre les potències (complexes) injectades en els nusos a cada moment, més que de les intensitats injectades. És per això que és de gran interès poder resoldre el problema de flux de potència que es descriu a continuació.

El *problema de flux de potència* proposa determinar les tensions nodals E_j en cada nus j i les intensitats circulants I_{kj} en les branques que modelen les línies i els trafos entre els nusos k, j , corresponents als valors donats de la potència nodal injectada en els nusos k :

$$S_k = P_k + iQ_k = E_k I_k^* ,$$

on P_k, Q_k indiquen les potències nodals actives i reactives.

Per a cada nus k , s'escriu l'equació que surt de multiplicar l'equació nodal anterior, conjugada prèviament, per la tensió E_k :

$$S_k = E_k \sum_{j \leftrightarrow k} Y_{kj}^* E_j^* .$$

Usant les coordenades polars en les tensions $E_k = v_k(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$ i les coordenades cartesianes en les admitàncies $Y_{kj} = G_{kj} + iB_{kj}$, les *equacions del flux de potència* del nus k s'escriuen així:

$$P_k = \sum_{i \leftrightarrow k} v_k v_j (G_{kj} \cos \theta_{kj} + B_{kj} \sin \theta_{kj}) \equiv p_k(v, \theta) ,$$

$$Q_k = \sum_{i \leftrightarrow k} v_k v_j (G_{kj} \sin \theta_{kj} - B_{kj} \cos \theta_{kj}) \equiv q_k(v, \theta) ,$$

on $\theta_{kj} = \theta_k - \theta_j$.

En el plantejament concret de cada problema de flux de potència, cal considerar tipus de nusos diversos:

Nusos PQ. En aquests nusos es coneixen els valors de potència activa P i reactiva Q i cal obtenir els valors d'argument θ i mòdul de tensió v . Per a aquests nusos, hi ha doncs dues incògnites, θ_k, v_k , i s'inclouen dues equacions en el sistema, per a P_k i Q_k .

Nusos PV. En aquests nusos es coneixen els valors de la potència activa P i del mòdul de tensió V i cal determinar els valors d'argument θ de tensió i la potència reactiva q . Són nusos en què es pot generar la potència reactiva necessària per a mantenir la seva tensió al valor especificat. Per a aquests nusos, hi ha només una incògnita, θ_k i s'inclou només una equació, per a P_k ; el valor de la potència reactiva q_k es calcula a posteriori en funció de la solució de les equacions.

Nus de tensió fixa o nus *slack*. Es tria un dels nusos amb mòdul de tensió fixa i es fixa també el seu argument (a 0, per exemple). Aquest nus es diu *slack* (flux) perquè es pot fixar la seva tensió complexa atesa la indefinició en l'origen de la fase de la tensió. Els valors de les potències actives i reactives injectades p_k, q_k en el nus *slack* es troben a posteriori en funció de la solució de les equacions.

S'entén així que les equacions en P i les incògnites en θ són per a tots els nusos llevat del nus slack, on el valor de la fase Θ és conegut, i que les equacions en Q i les incògnites en V són només per als nusos PQ, tal i com es destaca en la taula següent:

| | |
|------------------------------------|--|
| Nusos PQ | |
| Valors fixos | potència activa i reactiva P, Q |
| Equacions | potència activa i reactiva P, Q |
| Variables dependents | fase i mòdul de la tensió θ, v |
| Nusos PV | |
| Valors fixos | potència activa P , mòdul de tensió V |
| Equacions | potència activa P |
| Variables dependents | fase de la tensió θ |
| Variables funcionalment dependents | potència reactiva q |
| Nus slack | |
| Valors fixos | fase i mòdul de tensió Θ, V |
| Variables funcionalment dependents | potències activa i reactiva p, q |

La resolució del sistema no lineal resultant s'ha de fer mitjançant mètodes iteratius i és diferent en el cas de xarxes fortament mallades, com acostumen a ser les xarxes de transport, que en el cas de xarxes radials o feblement mallades, com són sovint les xarxes de distribució.

3.6.1 Flux de potència en xarxes mallades

En les xarxes de transport es tenen configuracions fortament mallades; això és, amb un gran nombre de malles.

Una possibilitat que es pot fer servir és la utilització del mètode Newton consistent en la linealització de les equacions prop de l'iterat anterior:

$$\Delta p_k = P_k - p_k(v, \theta) = \sum_{j \rightarrow k} \frac{\partial p_k(v, \theta)}{\partial \theta_j} \Delta \theta_j + \sum_{j \rightarrow k} \frac{\partial p_k(v, \theta)}{\partial v_j} \Delta v_j$$

$$\Delta q_k = Q_k - q_k(v, \theta) = \sum_{j \rightarrow k} \frac{\partial q_k(v, \theta)}{\partial \theta_j} \Delta \theta_j + \sum_{j \rightarrow k} \frac{\partial q_k(v, \theta)}{\partial v_j} \Delta v_j$$

$$\begin{aligned}\Delta p_k &= \sum_{i \rightarrow k} H_{kj} \Delta \theta_j + \sum_{i \rightarrow k} N_{kj} \frac{\Delta v_j}{v_j} \\ \Delta q_k &= \sum_{i \rightarrow k} J_{kj} \Delta \theta_j + \sum_{i \rightarrow k} L_{kj} \frac{\Delta v_j}{v_j}\end{aligned}$$

Per a $j \neq k$,

$$\begin{aligned}H_{kj} &= \frac{\partial p_k}{\partial \theta_j} = v_k v_j (G_{kj} \sin \theta_{kj} - B_{kj} \cos \theta_{kj}) , \\ N_{kj} &= v_j \frac{\partial p_k}{\partial v_j} = v_k v_j (G_{kj} \cos \theta_{kj} + B_{kj} \sin \theta_{kj}) , \\ J_{kj} &= \frac{\partial q_k}{\partial \theta_j} = -v_k v_j (G_{kj} \cos \theta_{kj} + B_{kj} \sin \theta_{kj}) , \\ L_{kj} &= v_j \frac{\partial q_k}{\partial v_j} = v_k v_j (G_{kj} \sin \theta_{kj} - B_{kj} \cos \theta_{kj}) ;\end{aligned}$$

per a $j = k$:

$$\begin{aligned}H_{kk} &= \frac{\partial p_k}{\partial \theta_k} = -Q_k - B_{kk} v_k^2 , \\ N_{kk} &= v_k \frac{\partial q_k}{\partial \theta_k} = P_k + G_{kk} v_k^2 , \\ J_{kk} &= \frac{\partial p_k}{\partial \theta_k} = P_k - G_{kk} v_k^2 , \\ L_{kk} &= v_k \frac{\partial q_k}{\partial \theta_k} = Q_k - B_{kk} v_k^2 .\end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & N \\ J & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \theta \\ \Delta v/v \end{pmatrix}$$

on s'entén que les equacions lineals en Δp i les incògnites en $\Delta \theta$ són per a tots els nusos llevat del nus slack, i que les equacions lineals en Δq i les incògnites en $\frac{\Delta v}{v}$ són només per als nusos PQ.

En cada iteració, es troben les correccions $\Delta \theta_j$ que cal fer en els nusos PQ i PV i les correccions Δv_j que cal fer en els nusos PQ, per tal de corregir les discrepàncies observades en les potències actives Δp_k en els nusos PQ i

PV i en les potències reactives Δq_k en el nusos PQ, resolent el sistema lineal anterior. Es van corregint les tensions

$$\theta_j += \Delta\theta_j \text{ (en nusos PQ i PV) , } v_j += \Delta v_j \text{ (en nusos PQ) ,}$$

fins que la correcció en tots els nusos és més petita que una tolerància donada. L'operació $+=$ vol indicar que es corregeix la magnitud de l'esquerra sumant-li el resultat de l'expressió de la dreta (com en el llenguatge de programació C).

Un cop resolt el sistema no lineal, es calculen les potències reactives injectades q_k en els nusos PV i les potències actives i reactives p_k, q_k injectades en el nus slack, utilitzant les expressions anteriors.

Atès que el nombre de nusos pot ser molt gran i atès que cada nus és adjacent només a un petit nombre de nusos, es fan servir estructures esparses per a emmagatzemar la informació i fer els càlculs. Bàsicament, es tracta d'estructures d'informació similars a les que es fan servir per a l'emmagatzemament de grafs, o bé, de sistemes lineals esparsos. Els algorismes de resolució dels sistemes lineals esparsos aprofiten aquesta estructura i fan servir mètodes que procuren que el nombre d'elements no nuls de les matrius augmenti el mínim possible en el procés de resolució [6].

Es pot consultar [1, 2, 3] per a completar els aspectes tecnològics, físics i computacionals relatius a les xarxes elèctriques.

3.6.2 Flux de potència en xarxes radials

En les xarxes de distribució, sovint es té una configuració radial (sense malles) o una configuració feblement mallada (amb un nombre reduït de malles).

La resolució del problema del flux de potència en configuracions radials es pot fer de forma més simple, utilitzant el mètode de Shirmohammadi et al. [7] que aprofita l'estructuració jeràrquica d'aquestes xarxes.

Es té una estructura d'arbre amb arrel en les subestacions de mitja tensió i que té com a fulles els nusos corresponents als consums determinats en els centres de transformació a baixa tensió.

S'estructura l'arbre, utilitzant l'*algorisme de cerca en profunditat* (depth-first search, en anglès) des de l'arrel, situada en un nus slack. S'obté així un llistat ordenat de nusos en què, per a cada nus k , es fa referència al nus j del qual penja en l'arbre, dit *nus pare* i a la branca k que els uneix, dita *branca predecessora*.

La llei d'Ohm relaciona la caiguda de tensió complexa en cada parella de nusos pare-fill $j-k$ amb la intensitat circulant \mathcal{I}_k per la branca que els uneix, predecessora del nus k :

$$E_j - E_k = z_k \mathcal{I}_k ;$$

on z_k indica la seva impedància.

La conservació de la càrrega en el nus j ens assegura que la intensitat \mathcal{I}_j que arriba a j per la seva branca predecessora és la suma de les intensitats \mathcal{I}_k que arriben als seus nusos fills k des del nus j amb la intensitat I_j injectada en el nus j :

$$\mathcal{I}_j = \sum_{k \text{ fill de } j} \mathcal{I}_k + I_j .$$

Multiplicant la relació d'intensitats anterior, conjugada prèviament, per la tensió E_j del nus j , resulta la relació de potències:

$$E_j \mathcal{I}_j^* = \sum_{k \text{ fill de } j} E_j \mathcal{I}_k^* + E_j I_j^* ,$$

que s'escriu com:

$$\mathcal{S}_j = \sum_{k \text{ fill de } j} \bar{\mathcal{S}}_k + \mathcal{S}_j .$$

La *potència acumulada* \mathcal{S}_j és la suma de totes les *potències enviades* $\bar{\mathcal{S}}_k$ als seus nusos fills k amb la *potència injectada* \mathcal{S}_j en el nus j .

Utilitzant la llei d'Ohm, es veu que la potència enviada $\bar{\mathcal{S}}_k$ al nus k es compon de la potència perduda en la branca predecessora i de la potència acumulada \mathcal{S}_k en el nus k :

$$\bar{\mathcal{S}}_k = z_k \mathcal{I}_k \mathcal{I}_k^* + E_k I_k^* = z_k \mathcal{I}_k \mathcal{I}_k^* + \mathcal{S}_k .$$

El mètode iteratiu de resolució del problema del flux de càrregues parteix d'un estat inicial en què la tensió de tots els nusos s'iguali a la tensió coneguda del nus slack en l'arrel de l'arbre.

Es practiquen iteracions que van corregint els valors de les tensions nodals fins que aquestes correccions són menors que una tolerància donada.

Cada iteració es fa mitjançant escombrats que recorren l'arbre aigües amunt i aigües avall. En el recorregut aigües amunt s'actualitzen les potències acumulades i en el recorregut aigües avall, les tensions.

Aigües amunt es recorre l'arbre en sentit depth first invers i es van acumulant les potències. En el nus k , s'acumula la potència injectada i s'acumula també sobre el seu nus pare j la potència enviada:

$$\mathcal{S}_k += \mathcal{S}_k, \quad \mathcal{S}_j += z_k J_k^2 + \mathcal{S}_k,$$

on el mòdul de la intensitat al quadrat es calcula fent:

$$J_k^2 = \frac{\mathcal{S}_k^* \mathcal{S}_k}{E_k^* E_k}.$$

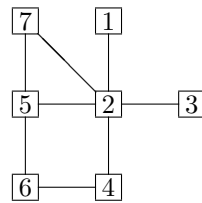
Aigües avall es recorre l'arbre en sentit depth first i s'actualitzen les tensions. En el nus k , s'actualitza la seva tensió E_k a partir de la tensió E_j del seu nus pare:

$$E_k = E_j - z_k \frac{\mathcal{S}_k^*}{E_k^*}.$$

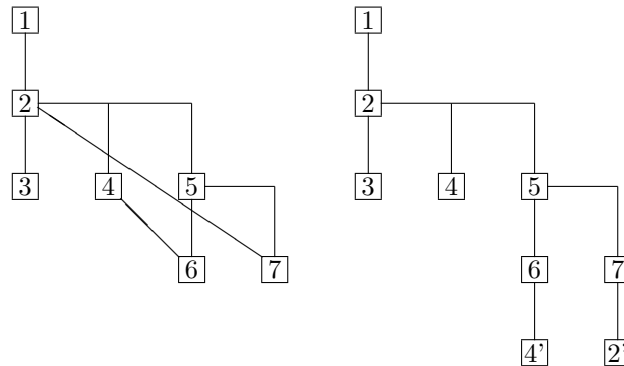
En el cas de xarxes feblement mallades, es fa servir una estructura de dades i un mètode iteratiu que aprofita l'estructura pràcticament jeràrquica. L'estructura es basa en un arbre extensiu de la línia de distribució, que cal completar amb les branques de tancament que produeixen les malles.

Fent servir nusos ficticis, dits *nusos àlias*, es pot considerar un estructura d'arbre en què les branques de tancament van a parar a aquests nusos àlias (vegi's l'exemple de la Figura 4). En aquestes estructures d'*arbres mallats* es pot aplicar el mètode iteratiu d'escombrats de Shirmohammadi et al. per tal de trobar les tensions corresponents a tots els nusos. Caldrà ara però corregir les discrepàncies de tensió en les parelles de nusos àlias corresponents a les diferents malles abans de fer cada nova iteració del mètode de escombrats.

El mètode de compensació de [7] fa aquesta correcció a partir del càlcul previ de la *matriu de sensibilitat* de les tensions respecte a les intensitats entre parelles de nusos àlias. La sensibilitat de tots els nusos respecte a la intensitat en una determinada parella de nusos àlias es troba simulant la injecció d'intensitats unitàries de signe oposat en cada parella de nusos i calculant la tensió produïda en cadascun dels nusos. Un cop coneguda la matriu de sensibilitat, que conté les sensibilitats de les tensions dels nusos respecte a les injeccions d'intensitat en totes les parelles de nusos àlias, es resol un sistema lineal que cerca les intensitats que cal injectar per tal de corregir les discrepàncies de tensió observades. Es troben les potències injectades en les parelles de nusos àlias corresponents a les intensitats injectades, fent servir les tensions nodals trobades. Es corregeixen les potències injectades en les



Graf



Arbre mallat amb branques de tancament 4-6 i 2-7 i amb nusos àlies 4' i 2'

Figura 4: Estructuració d'un graf com a arbre mallat

parelles dels nusos àlies amb els valors calculats. Es repeteix el procediment fins que queden eliminades les discrepàncies de tensió en totes les parelles de nusos àlies, segons una tolerància donada.

El mètode d'escombrats, combinat amb el mètode de compensació, permet resoldre el problema de flux de potència en xarxes feblement mallades, amb molta eficiència.

Pèrdua de potència

La *pèrdua de potència activa de la xarxa* es pot avaluar mitjançant un balanç de potència: sumant algebraicament totes les potències actives injectades a la xarxa, tant les potències especificades en els nusos PQ, com les potències calculades en el nus slack:

$$L = \sum_k p_k .$$

Com que la potència activa es dissipa en les resistències, es pot calcular també sumant les potències actives dissipades en cadascuna de les branques:

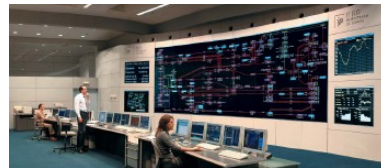
$$L = \sum_l r_l \mathcal{J}_l^2 .$$

Aquesta darrera forma és recomanable perquè és numèricament més estable, en el sentit que propaga menys els errors.

3.7 Regulació de xarxes elèctriques

La regulació de les xarxes elèctriques pot tenir diverses finalitats. Es tracta aquí un forma de regulació molt emprada que pretén donar un millor servei als usuaris a l'ensens d'obtenir un funcionament segur de la xarxa i econòmicament més rendible.

Més concretament, els objectius serien:



Imatge del "Centro de Control Eléctrico de Red Eléctrica" (CECOEL)

Seguretat. Donats intervals de seguretat per a les tensions i per a les intensitats circulants, regular la xarxa per tal de controlar que els mòduls de les tensions nodals i de les intensitats prenguin valors dins els intervals.

Reducció de pèrdua. Reduir al màxim el valor de la pèrdua de potència activa total de la xarxa.

Una de les tècniques més comunes consisteix en la regulació de la raó de transformació d'alguns dels trafos a_r , dits *trafos regulables*, i de la potència reactiva Q_r d'alguns dels nusos, dits *nusos de reactiva regulable*. Aquestes magnituds regulables s'anomenen *variables de regulació* de la xarxa.

El *problema del flux de potències segur òptim* té com a primer objectiu arribar a un estat segur de la xarxa en què tots els mòduls de les tensions

estan dins els intervals de seguretat i, com a objectiu final, minimitzar la pèrdua mantenint la seguretat.

Es tracta d'un problema d'optimització amb lligams de la forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimitzar} & f(u, x) \quad \text{[pèrdua]} \\ \text{subjecte a:} & g(u, x) = 0 \quad \text{[equacions del flux de potència]} \\ & u_m \leq u \leq u_M \quad \text{[intervals de regulació]} \\ & c_m \leq c(x, u) \leq c_M \quad \text{[intervals de seguretat]} \end{array}$$

- La funció f a minimitzar correspon a la pèrdua de potència total. Aquesta depèn de les variables de regulació —denotades per u — i de les tensions nodals no especificades, dites també variables d'estat i denotades per x .
- Les equacions del flux de potència s'han especificat com un conjunt d'equacions no lineals en les variables d'estat x . Aquestes equacions depenen també de les variables de regulació u : reactives regulables i raons de transformació de trafos regulables. S'ha escrit aquesta doble dependència com un conjunt d'equacions no lineals en la forma $g(u, x) = 0$ que conformen els lligams d'igualtat del problema.
- Les diverses variables de regulació han d'estar entre uns valors de regulació mínims u_m i màxims u_M donats. Aquestes condicions apareixen com una part dels lligams de desigualtat del problema.
- Les condicions de seguretat s'imposen sobre diverses *variables de control* $c(x, u)$ —mòduls de les tensions nodals i de les intensitats circulants— que depenen de les variables de regulació u i d'estat x . Aquestes variables de control haurien d'estar entre uns valors mínims c_m i màxim c_M donats. Aquestes condicions completen els lligams de desigualtat del problema.

Es considera que es poden trobar les solucions $x(u)$ de les equacions del flux de potència $g(u, x(u)) = 0$ per als valors que vagin prenent les variables de regulació u . En aquesta situació, es pot expressar el problema anterior en funció de només les variables de regulació u :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimitzar} & F(u) \quad \text{[pèrdua]} \\ \text{subjecte a} & C(u) \leq 0 \quad \text{[restriccions de regulació i seguretat]} \end{array} ,$$

$$\text{on } F(u) = f(u, x(u)), \quad C(u) = \begin{cases} u_m - u \\ u - u_M \\ c_m - c(u, x(u)) \\ c(u, x(u)) - c_M \end{cases}$$

La resolució d'aquests tipus de problemes requereix de mètodes numèrics adequats que vagin donant els successius moviments de les variables regulables que portin a situació segura de pèrdua mínima.

Alguns d'aquests mètodes estan basats en les condicions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), que conformen un conjunt de condicions necessàries que ha de complir la solució del problema de minimització amb lligans anterior, en el cas que les funcions siguin diferenciables amb continuïtat (vegi's [5]).

Aquestes condicions involucren també a les variables duals λ , lligades a les restriccions de desigualtat, i es poden escriure utilitzant la funció lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x, u, \lambda) = F(u) + \lambda^\top C(u) ,$$

en la forma:

$$\begin{aligned} D_u \mathcal{L}(u) &= 0 && \text{[gradient nul]} \\ C(u) &\leq 0 && \text{[factibilitat]} \\ \lambda^\top C(u) &= 0 && \text{[complementarietat]} \end{aligned}$$

Els algorismes més adequats per a trobar solucions del sistema d'equacions i inequacions anterior són els que utilitzen tècniques de punt interior (vegi's [4]). Si es parteix d'una posició de regulació factible inicial, que compleixi les condicions de regulació i de seguretat, l'algorisme proporciona una successió de posicions de regulació factibles que convergeixen cap a la solució del problema.

La cerca d'una posició de regulació factible inicial es pot fer també aplicant els mateixos algorismes de punt interior a un problema de minimització que fa servir, a més, la *variable de relaxació* s :

$$\begin{aligned} &\text{Minimitzar } s && \text{[relaxació]} \\ &\text{subjecte a } C(u) - s \leq 0 && \text{[restriccions de regulació i seguretat relaxades]} \end{aligned}$$

L'estat factible de partida d'aquest problema relaxat es pot configurar a partir de qualsevol posició de regulació u_0 , utilitzant un valor de la variable s prou gran per tal que es compleixin les restriccions de regulació i seguretat relaxades: es pot triar, per exemple, el valor màxim en u_0 de totes les funcions de restricció en $C(u_0)$.

Consideracions finals

A l'hora de realitzar una aplicació informàtica de control per a regulació de xarxes elèctriques, cal tenir en compte una sèrie d'aspectes computacionals.

Un d'aquests aspectes té un vessant informàtic important i fa referència a l'estructura de la informació que cal fer servir per a tractar les interconnexions dels diversos nusos mitjançant branques que modelen les línies i els transformadors. Aquestes dades s'han d'estructurar adequadament per tal que es puguin aplicar els diversos mètodes de càlcul amb una certa eficiència. No n'hi prou amb estructurar la informació en els programes informàtics de càlcul en una forma propera a les dades llegides, sinó que s'han d'elaborar estructures d'informació més adequades fent servir algorismes de grafs: es requereix conèixer la connectivitat de la xarxa a nivell local i global i preparar la informació per als mètodes de càlcul que es vulguin fer servir.

El problema del flux de potència és no lineal i la seva resolució requereix de mètodes iteratius de resolució de sistemes no lineals, alguns dels quals es basen en la resolució de sistemes lineals i altres en el recorregut d'estructures jeràrquiques. Atesa la natura esparsa del sistema que cal resoldre, s'han de fer servir tècniques d'emmagatzemament i resolució de sistemes esparsos d'equacions lineals o tècniques d'escombrat i compensació en estructures d'arbres feblement mallats. Aquest aspecte computacional és de gran importància sobretot quan la mida de la xarxa a què s'aplica és molt gran perquè permet reduir dràsticament la memòria necessària i els càlculs a realitzar, augmentant així l'eficiència dels càlculs.

La regulació de la xarxa es realitza mitjançant mètodes de minimització que han de resoldre el problema del flux de potència moltes vegades, en situacions corresponents a diferents posicions de les variables de regulació. Aquests mètodes de minimització haurien de ser ben eficients i ben robustos a l'hora de trobar una situació segura i de pèrdua mínima en l'explotació en temps real de les xarxes elèctriques. Aquesta situació s'hauria d'assolir de forma continuada, ràpida però sense realitzar canvis massa sobtats.

Tenint en compte aquests aspectes, les implementacions informàtiques que s'ha anat fent de la resolució dels diversos problemes que apareixen han permès millorar molt el control per regulació de les xarxes elèctriques, amb els beneficis consegüents per a les companyies elèctriques i per als seus usuaris.

El control per regulació de xarxes elèctriques és un camp en què la matemàtica computacional ha donat fruits molt bons, però encara queda el repte de millorar-los al màxim.

Bibliografia

- [1] ARRILLAGA J., ARNOLD C.P., *Computer Analysis of Power Systems*, John Wiley & Sons, 1990.
- [2] BARRERO F., *Sistemas de energía eléctrica*, Thomson/Paraninfo, 2004.
- [3] DE LA FUENTE J. L., *Tecnologías computacionales para sistemas de ecuaciones, optimización lineal y entera*, Reverté, 1993.
- [4] HERSKOVITS J., Feasible Direction Interior-Point Technique for Non-linear Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications* **90**, 1, pp. 121-146, 1998.
- [5] LUENBERGER D.G., *Linear and NonLinear Programming*, Addison Wesley, 1984.
- [6] ROSE D.J., WILLOUGHBY R.A. (EDS.), *Sparse Matrices and Their Applications*, Plenum Press, 1972.
- [7] SHIRMOHAMMADI D., HONG H.W., SEMLYEN A., LUO G.X., A Compensation - Based Power Flow Method for Weakly Meshed Distribution and Transmission Networks. *IEEE Transactions on Power Systems*, **3**, 2, pp. 753-762, 1988.



Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
antoni.benseny@ub.edu

Publicat el 30 de maig de 2007