MAT^2
MATerials MATemàtics
Volum 2006, treball no. 6, 16 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

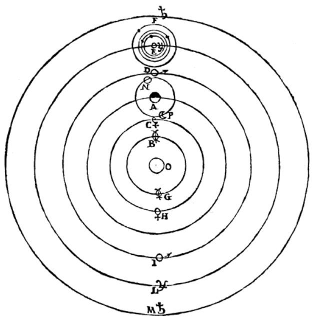
El moviment dels planetes

Regina Martínez

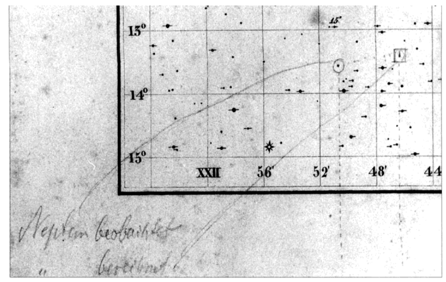
El moviment dels cossos a l'esfera celeste ha estat objecte d'estudi des de molt antic. Calia conèixer el seu moviment amb la màxima precisió possible per elaborar calendaris, predir eclipses o facilitar la orientació dels vaixells. Més endavant, va preocupar el problema de l'estabilitat, és a dir, la possibilitat de que es produissin alteracions importants en l'òrbita d'algun planeta que afectes a la Terra. Podem dir que a vegades la necessitat i d'altres la curiositat ha portat a astrònoms, físics i matemàtics a desenvolupar teories i proposar diferents models per explicar el moviment dels astres. Algunes de les teories desenvolupades en aquest àmbit tenen un caràcter general i s'apliquen també a altres tipus de problemes.

La interacció entre la teoria i la observació astronòmica ha resultat molt positiva. Les observacions han estat a la base de l'elaboració de diverses teories i també han estat utilitzades per confirmar la validesa d'aquestes teories. L'astrònom i matemàtic Isaac Newton (1642-1727) no va formular la llei de gravitació universal inspirat per una poma que li va caure al cap. Newton es va basar principalment en els experiments realitzats per Galileo Galilei (1564-1642) sobre la caiguda lliure i en general sobre el moviment dels cossos i en les lleis sobre el moviment planetari que uns anys abans havia enunciat l'astrònom alemany Johannes Kepler (1571-1630). A la seva vegada, Kepler havia estudiat les precises observacions d'alguns planetes que havia realitzat el seu mestre, l'astrònom danés Tycho Brahe. Usant aquestes observacions Kepler va deduir que Mart no es podia moure sobre un cercle com es creia fins aleshores sinò que s'havia de moure sobre una el·lipse. Poc després va deduir les altres lleis.

Altres vegades la teoria ha anat per davant de les observacions com és el cas del descobriment del planeta Neptú. Fins al 13 de març de 1781 només es coneixien sis planetes: Mercuri, Venus, la Terra, Mart, Júpiter i



(a)



(b)

Figura 1: (a) Dibuix del Sistema Solar fet per Galileo on es mostren els 4 satel·lits més grans de Júpiter; (b) Carta celeste amb que es va descobrir Neptú. El quadrat indica la posició que va predir Le Verrier, la rodona la posició on va ser descobert.

Saturn. Aquell dia l'astrònom William Herschel (1738-1822) va descobrir el planeta Urà. Llavors, es va calcular l'òrbita d'Urà amb el model disponible en aquella època. En els càlculs hi havia unes discrepàncies massa grans entre les prediccions teòriques i les observacions. Això va suggerir l'existència d'un planeta desconegut fins aleshores que influiria en el moviment d'Urà. De forma independent John Adams (1819-1892) i Jean Joseph Le Verrier (1811-1877) van calcular l'òrbita que hauria de seguir aquest planeta desconegut per produir les pertorbacions observades en Urà. Els astrònoms van dirigir els seus telescopis cap a la zona on havia de trobar-se el planeta i així el 23 de setembre de 1846 es descobria Neptú.

El disposar de bons models per descriure el moviment dels cossos al Sistema Solar permet fer prediccions i determinar a priori, la trajectòria d'un planeta, d'un asteroide o d'una nau espacial. Presentarem a continuació alguns d'aquests models.

Un primer model: epicicles i deferents

La primera teoria que es va desenvolupar per explicar el moviment dels planetes és la dels epicicles i deferents. Des de molt antic, els astrònoms van observar que a part de la Lluna i el Sol hi havia alguns cossos que es movien respecte dels estels. Els grecs els van anomenar planetes (en grec significa “errant”). En coneixien els cinc planetes que es poden observar sense instruments òptics: Mercuri, Venus, Mart, Júpiter i Saturn. Per explicar el seu moviment utilitzaven un model geocèntric amb la Terra al centre i tots els altres planetes i el Sol girant al seu voltant. Segons la seva teoria cada planeta es movia amb velocitat constant sobre un cercle, anomenat *epicicle*, el centre del qual a la seva vegada es desplaçava amb velocitat constant sobre un altre cercle, anomenat *deferent*, al voltant de la Terra. El moviment uniforme i circular era considerat com el més perfecte i per tant semblava natural esperar que fos el que seguien els planetes per desplaçarse per la esfera celeste. A banda de raons estètiques, el model d’epicicles i deferents explicava alguns dels fenòmens observats com el moviment retrògrad (cap endarrera) de Mart en certes èpoques, degut a la combinació dels moviments de la Terra i Mart al voltant del Sol.

Les lleis de Kepler

La visió geocèntrica de l’Univers va canviar completament quan l’astrònom polonés Nicolai Copernic (1473-1543) va proposar el sistema heliocèntric que situava al Sol al centre del Sistema Solar i tots els planetes girant al seu voltant. (De fet el model heliocèntric ja havia estat proposat 19 segles abans per Aristarc de Samos però va resultar massa agosarat per a ser acceptat en aquella època). Ràpidament aquest sistema va ser adoptat per Galileo i Kepler.

Al 1619 J. Kepler enuncia les lleis sobre el moviment planetari que més endavant induirien a Newton a formular la llei de gravitació universal. Les lleis de Kepler són:

1. Els planetes descriuen el·lipses amb el Sol en un dels seus focus.
2. El vector posició del planeta escombra àrees iguals en intervals de temps iguals.
3. El quadrat dels períodes és proporcional al cub dels semieixos majors.

D’acord amb la primera llei la “òrbita”d’un planeta és una el·lipse. Podem pensar la òrbita d’un planeta com el camí que descriu a l’espai.

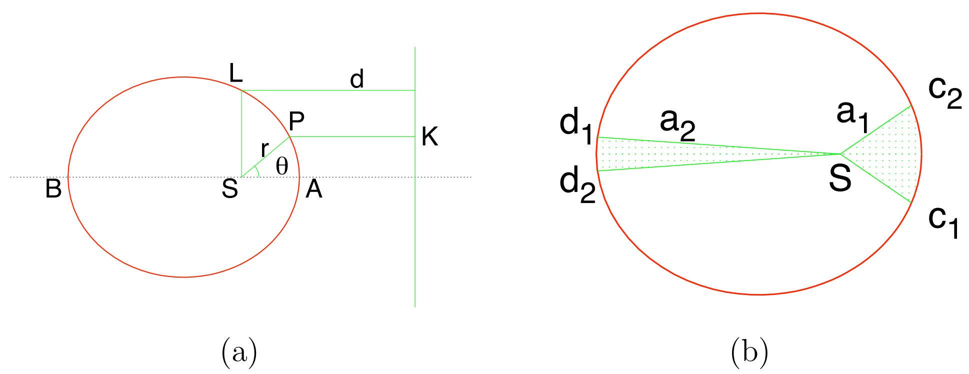


Figura 2: (a) El·lipse; (b) Segona llei de Kepler

Vegem a continuació la forma habitual de representar una òrbita el·líptica. Per obtenir aquesta representació usarem que els punts d'una el·lipse compleixen la següent propietat:

El qüocient entre la distància r, a un punt fixat, S, i la distància PK, a una recta fixada és igual a una constant, e, $0 < e < 1$, és a dir,

$$\frac{r}{PK} = e$$

La constant e és l'excentricitat de l'el·lipse i la recta la seva directriu. Direm θ a l'angle $\angle ASP$. (r, θ) són les coordenades polars de P. Com veiem a la figura 2 (a) $PK = d - r\cos\theta$. Substituint PK a l'equació anterior i dient $l = ed$, tenim

$$r = l - er\cos\theta$$

D'aquesta equació obtenim

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta} \tag{1}$$

El valor mínim de r s'assoleix per $\theta = 0$ (que correspon al punt A) i és igual a $r_A = \dfrac{l}{1+e}$. El valor màxim s'assoleix per $\theta = \pi$ (punt B) i és $r_B = \dfrac{l}{1-e}$. Els punts A i B de l'el·lipse s'anomenen *pericentre* i *apocentre* respectivament. El semieix major de l'el·lipse, que denotarem per a, és la meitat de la distància entre els punts A i B és a dir

$$a = \frac{r_A + r_B}{2} = \frac{l}{1-e^2}$$

Per tant, $l = a(1-e^2)$ i l'equació (1) es pot escriure com

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \tag{2}$$

Aquesta és l'equació en coordenades polars d'una el·lipse d'excentricitat e i semieix major a. L'equació (2) també val si $e = 0$ i, en aquest cas, dóna un cercle de radi $r = a$. L'excentricitat és una mesura de quant "allargada"és l'el·lipse . Així, si l'excentricitat és petita l'el·lipse s'assembla a un cercle. Les excentricitats de les òrbites dels planetes són molt petites. Les òrbites més excèntriques són les de Mercuri amb $e = 0.2056$ i la de Plutó amb $e = 0.2486$. Les excentricitats dels altres planetes no arriben a 0.1. La de la Terra és de 0.017. La majoria dels cometes tenen òrbites el·líptiques "allargades", és a dir, amb excentricitats grans. Per exemple, per a l'òrbita del cometa Halley $e = 0.967$.

A la figura 2 (b) es mostra una representació gràfica de la segona llei de Kepler. Suposem que un planeta P es mou sobre l'el·lipse de la figura. Diguem t_c al temps necessari per desplaçarse del punt c_1 al punt c_2 i t_d al temps de pas de d_1 a d_2. Si les àrees representades a_1 i a_2 són iguals, la segona llei de Kepler diu que $t_c = t_d$.

L'àrea escombrada pel vector posició per unitat de temps s'anomena *velocitat areolar*. La denotarem per v_A. La segona llei de Kepler diu que la velocitat areolar és constant. Diguem τ al període del planeta, és a dir, el temps necessari per completar una volta. En aquest temps l'àrea escombrada és l'àrea de l'el·lipse. Utilitzant que l'àrea d'una el·lipse d'excentricitat e i semieix major a és igual a $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$ podem calcular v_A a partir de a, e i τ

$$v_A = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{\tau}. \tag{3}$$

La tercera llei relaciona els períodes i els semiexos. Si τ_1 i τ_2 són els períodes de dos planetes P_1, P_2 i a_1, a_2 els semieixos de les seves òrbites, d'acord amb la tercera llei es compleix

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2}. \tag{4}$$

Si per exemple, suposem que P_1 és Júpiter i P_2 la Terra i tenim en compte que el període de Júpiter és $\tau_1 = 11.86$ anys terrestres, de la igualtat anterior obtenim que el semieix de Júpiter és igual a 5.20 vegades el de la Terra.

El semieix de l'òrbita de la Terra és de $150 \cdot 10^6$ km aproximadament. En astronomia, aquest valor es pren com a unitat de distància i s'anomena unitat astronòmica UA. Diem llavors que el semieix de Júpiter és de 5.20 UA.

La llei de gravitació universal

Les lleis de Kepler són lleis empíriques obtingudes a partir d'observacions que descriuen quin és el moviment dels planetes però que no donen cap explicació sobre les causes del moviment. El recolçament teòric a aquestes lleis el va donar I. Newton amb la llei de gravitació universal:

Dos cossos de masses m i M, respectivament, s'atreuen amb una força que és directament proporcional a les masses i inversament proporcional al quadrat de la distància entre elles, r, és a dir,

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

G és l'anomenada constant de gravitació universal. El seu valor és $G = 6.67{\cdot}10^{-11}$ New·m^2/Kg^2 [1].

La importància d'aquesta llei és que es tracta d'un principi universal que s'aplica a tot tipus de cossos, tant si es tracta de planetes, satèl·lits, cohets o persones.

La força amb que la Terra atreu a un cos sobre la superfície terrestre l'anomenem el *pes*. Com que la massa de la Terra és de $M = 5.98{\cdot}10^{24}$Kg i el radi terrestre $r = 6378$Km amb un petit càlcul obtenim que

$$\frac{GM}{r^2} = 9.81\text{m/seg}^2.$$

Per tant, el pes d'un cos de massa $m = 100$ Kg a la superfície de la Terra és igual a $m{\cdot}9.81 = 981$ New o bé de 100 Kp si usem la unitat habitual per al pes.

[1] Determinat en un laboratori per Henry Cavendish l'any 1798.

La contribució de I. Newton a la ciència és molt gran. A més de la llei de gravitació universal va desenvolupar els fonaments de la Mecànica de Partícules. Per formalitzar matemàticament les seves idees va desenvolupar un mètode matemàtic que es pot considerar un predecessor del Càlcul Diferencial i que anomenava mètode de les *fluxions*.

El problema de Kepler

La llei de gravitació universal permet recuperar les lleis de Kepler suposant només l'existència de dos cossos. Per exemple, considerem només el Sol S, i un planeta P, que es mou en un pla. Diguem M i m a les masses de S i P respectivament. Sigui $\mathbf{q}$ el vector que dóna la posició de P respecte S. Com que el planeta es mou, el vector posició va canviant amb el temps. És per tant, una funció del temps $\mathbf{q}(t)$. De la llei de gravitació universal i de les lleis de la Mecànica resulta que $\mathbf{q}(t)$ ha de complir la següent equació

$$\mathbf{q}'' = \frac{G(M+m)}{r^2}\frac{\mathbf{q}}{r} \tag{5}$$

on $\mathbf{q}''$ és la derivada segona de $\mathbf{q}$ respecte el temps (és a dir, el vector accel·leració) i r és el mòdul del vector $\mathbf{q}$ és a dir, la distància de P a S. A la última secció veurem com es pot deduir aquesta equació a partir de les lleis de Kepler.

L'equació (5) és una *equació diferencial*. La teoria de les equacions diferencials permet obtenir totes les solucions $\mathbf{q}(t)$ d'aquesta equació. A més de les solucions $\mathbf{q}(t)$ que donen lloc a el·lipses n'hi ha d'altres per a les quals el vector $\mathbf{q}(t)$ descriu una paràbola o una hipèrbola. Cometes o asteroides que escapen del Sistema Solar seguiran una òrbita d'aquest tipus.

L'equació (5) és un model per al moviment d'un planeta si sobre ell només actua la força d'atracció del Sol i es coneix com el *model o problema de Kepler*.

Si considerem el moviment de cada planeta independentment dels altres, és a dir, segons el model de Kepler, cadascun segueix una el·lipse. Aquestes el·lipses però, es troben en plans diferents. Per determinar-les prenem un sistema de referència a l'espai amb origen en el Sol i de manera que el pla de l'òrbita de la Terra, anomenat pla de l'*eclíptica*, coincideixi amb el pla x,y (vegeu la figura 3). L'eix x es pren en una direcció fixada (l'equinocci de primavera). El pla en què es mou un planeta talla al pla de l'*eclíptica* en una recta que es coneix com la *línia dels nodes* i la seva òrbita talla aquesta línia

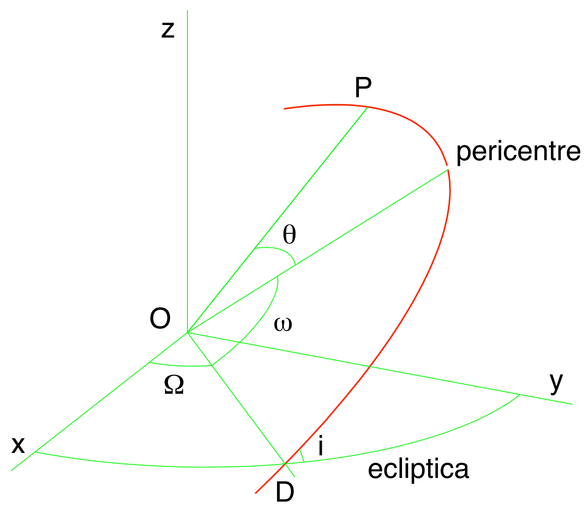


Figura 3: El·lipse a l'espai i els elements orbitals.

en dos punts. El punt, D, que és creuat pel planeta "cap a dalt"s'anomena el *node ascendent.* L'angle Ω (mesurat com es mostra a la figura) s'anomena *longitud del node.* L'angle i entre el pla de l'eclíptica i el pla de l'òrbita s'anomena *inclinació.* Les òrbites dels planetes tenen inclinacions petites, de menys de 8°, excepte Plutó que té una inclinació respecte de l'eclíptica de $17°8'28''$.

Els angles Ω i i determinen el pla de l'òrbita. Per fixar lòrbita en aquest pla cal coneixer el semieix major a, l'excentricitat e i l'*argument del pericentre* ω, que és l'angle mesurat en el pla de l'eclíptica que determina la direcció del pericentre de l'òrbita.

La posició del planeta sobre l'el·lipse es pot obtenir coneixent el moment de pas pel pericentre que denotarem per T.

En el model de Kepler, per a cada planeta, a, e, ω, Ω, i i T són constants que es coneixen com els *elements orbitals* del planeta. Amb ells es pot determinar la posició del planeta a qualsevol instant de temps.

Les pertorbacions

D'acord amb la llei de gravitació universal els planetes són atrets pel Sol però també s'atreuen entre ells i per tant no podem esperar que segueixin indefinidament la mateixa el·lipse.

Cal tenir en compte que la massa del Sol és molt més gran que la dels planetes. De fet la massa del Sol representa el 99.87 % de la massa total del Sistema Solar. Per tant, les forçes d'atracció entre els planetes seran poc importants comparades amb la del Sol. Cal esperar llavors que la influència mútua entre els planetes només faci variar una mica l'òrbita el·líptica que dóna el model de Kepler.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) va estudiar com són les variacions dels elements orbitals degudes a l'atracció mútua entre els planetes. Laplace va demostrar que l'argument del pericentre, ω, va canviant amb el temps, i això suposa que l'el·lipse kepleriana va girant. Aquest moviment de l'el·lipse que es coneix com *moviment de precessió* és molt lent, és a dir, calen molts segles en general, per tenir una variació molt petita. Per aquesta raó es diu també que és un moviment secular. Per demostrar que hi havia aquest tipus de moviment, Laplace havia de resoldre una certa equació polinomial, obtinguda a partir d'una matriu que apareix a les equacions diferencials de les variacions i que ell va anomenar *equació secular*. Actualment, el polinomi que defineix aquesta equació es coneix com el *polinomi característic* de la matriu i els seus zeros s'anomenen *valors propis*.

El moviment de precessió en el cas de Mercuri és una mica especial. L'el·lipse va girant a raó de 10'40" per segle. La teoria de pertorbacions mostra que l'atracció gravitatòria dels altres planetes provoca una variació de 10' per segle. La explicació dels 40" adicionals la va donar Albert Einstein al 1915 usant la Teoria de la Relativitat. Així, l'òrbita de Mercuri es va utilitzar com a una comprovació de la validesa de la Teoria de la Relativitat.

A part del cas dels planetes hi ha altres situacions similars en què un cos es mou principalment degut a la força d'atracció gravitatòria d'un altre. En aquest cas es pot utilitzar el problema de Kepler com a model bàsic i considerar altres efectes com pertorbacions que donen lloc a petites variacions dels elements orbitals.

Per exemple per estudiar el moviment d'un satèl·lit artificial al voltant de la Terra es pot considerar el problema de Kepler per a la Terra i el satèl·lit i l'efecte d'altres cossos, com el Sol o la Lluna, com a pertorbacions. En aquest problema són també importants les pertorbacions degudes a les irregularitats de la forma de la Terra, especialment, l'aplanament de la Terra prop dels pols. Si el satèl·lit és baix són importants els efectes de l'atmòsfera i si té molta superfície i poca massa els efectes de pressió de radiació.

El problema de tres cossos

El model de Kepler no és adequat quan hi ha dos cossos que influeixen de forma similar en el moviment d'un tercer.

Per exemple, per estudiar el moviment d'un cometa C, que passa molt a prop d'un planeta P, de manera que la influència del Sol i la del planeta són comparables, caldrà tenir en compte els tres cossos S, P i C. Aquest model que es coneix com *problema de tres cossos* és molt més complex que el de Kepler en el qual es consideren només dos cossos. Mentre que en el cas de Kepler es poden trobar totes les solucions per al problema de tres cossos això no és possible.

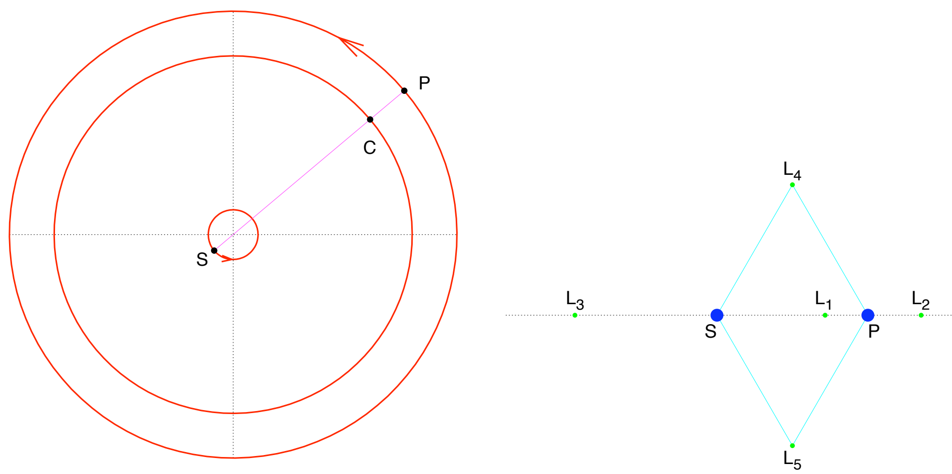
Henri Poincaré (1854-1912) va veure que en aquest problema existeixen òrbites amb comportaments molt complicats o caòtics. Moltes de les idees de la teoria del caos es troben ja als treballs de Poincarè sobre el problema de tres cossos. Per aquests estudis recollits a la "Mémoire du problème de trois corps"Poincaré va rebre un premi del rei de Suecia.

Afortunadament en moltes situacions d'interés astronòmic es poden fer algunes simplificacions. Per exemple, en el cas del cometa tenim dos cossos grans S i P i un de molt més petit C. Una hipòtesis raonable és que C no influeix en el moviment dels grans que seguiran òrbites fixades i conegudes.

Una segona simplificació consisteix en suposar que S i P es mouen en cercles al voltant del seu centre de masses. Aquesta situació reflecteix bastant bé la situació real si tenim en compte que les òrbites dels planetes són gairebé circulars. El problema que resulta de fer aquestes simplificacions és el *problema restringit circular de tres cossos*.

Aquest problema apareix per primera vegada en els treballs de Leonhard Euler (1707-1783) sobre el moviment de la Lluna. L. Euler i J. Louis Lagrange (1736-1813) van trobar cinc solucions especials en què el cos petit descriu un cercle al voltant del centre de masses dels altres dos movent-se amb la mateixa velocitat angular que els grans S i P (vegeu la figura 4 (a)). En un sistema de referència que vagi girant solidari amb els cossos grans, el petit es veurà sempre en el mateix punt. Aquests punts s'anomenen *equilibris relatius*.

Hi ha tres equilibris relatius, anomenats L_1, L_2 i L_3 a la recta que conté S i P i dos més L_4 i L_5 que formen un triangle equilàter amb S i P (figura 4 (b)).



(a) (b)

Figura 4: (a) Equilibri relatiu en un sistema fix; (b) Equilibris relatius en un sistema giratori.

Lagrange va demostrar que per al problema restringit circular de tres cossos, amb el Sol i Júpiter com a cossos grans, els equilibris relatius triangulars són *estables*. Això vol dir que si un cos petit es troba prop d'algun dels punts L_4 o L_5 amb una velocitat adequada es mantindrà sempre prop d'aquest punt. Això va portar a Lagrange a predir l'existència de cossos al voltant del punts triangulars. No va ser fins l'any 1906 que es va descobrir el primer d'un grup d'asteroids que fan oscil·lacions al voltant dels punts triangulars del sistema Sol-Júpiter. Aquests asteroids es coneixen com els Trojans.

No s'han trobat cossos grans en els punts triangulars dels sistemes Sol-Terra i Terra-Lluna, tan sols s'han detectat núvols de pols.

No cal esperar trobar partícules en els equilibris co·lineals L_1, L_2 i L_3 ja que aquests punts són *inestables* en el sentit de que, desplaçant una mica el cos petit del punt d'equilibri, ràpidament s'allunya d'aquest punt. Per altra part aquests punts són útils per a missions espacials. Per exemple, l'observatori espacial SOHO es troba en una órbita "al voltant"del punt L_1 del sistema Sol-Terra a una distància de la Terra d'aproximadament $1.5{\cdot}10^6$ Km. Degut a la inestabilitat, cal fer maniobres de control per mantenir la nau a la seva órbita.

Deducció del model matemàtic de Kepler

En aquesta secció deduirem l'equació diferencial que ha de complir el vector posició $\mathbf{q}(t)$ d'un planeta P respecte del Sol, suposant que es mou d'acord amb les lleis de Kepler.

Considerem només dos cossos, el Sol S, i un planeta P que suposem descriu una el·lipse amb el Sol en un dels seus focus. Utilitzant les coordenades polars podem escriure

$$\mathbf{q} = (r\cos\theta, r\sin\theta) = r\mathbf{v}_1 \tag{6}$$

on $\mathbf{v}_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$.

Com que P es mou sobre l'el·lipse, el vector $\mathbf{q}$, i també r i θ, van canviant amb el temps. Per tant, són funcions del temps, $\mathbf{q}(t)$, $r(t)$, $\theta(t)$. A més, per a cada instant de temps t, $(r(t), \theta(t))$ són les coordenades polars d'un punt de l'òrbita de P, és a dir, d'una el·lipse i per tant compleixen

$$r(t) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta(t)}. \tag{7}$$

La velocitat de P s'obté derivant respecte t el vector posició $\mathbf{q}(t) = r(t)\mathbf{v}_1(t)$

$$\mathbf{q}'(t) = r'(t)\mathbf{v}_1(t) + r(t)\theta'(t)\mathbf{v}_2(t)$$

on $\mathbf{v}_2(t) = (-\sin\theta(t), \cos\theta(t))$ i $'$ significa la derivada respecte de t. De fet $r'(t)$ i $r(t)\theta'(t)$ no són més que les components radial i tangencial del vector velocitat $\mathbf{q}'(t)$. Per simplificar la notació d'ara en endavant omitirem escriure la dependència del temps. La derivada segona de $\mathbf{q}(t)$ dóna el vector accel·leració

$$\mathbf{q}'' = (r'' - r(\theta')^2)\mathbf{v}_1 + (2r'\theta' + r\theta'')\mathbf{v}_2. \tag{8}$$

Per altra part, derivant respecte t l'equació (7) obtenim

$$r' = \frac{e \sin \theta}{a(1-e^2)}\, r^2\theta'. \tag{9}$$

Usarem ara que la velocitat areolar és $v_A = \dfrac{r^2\theta'}{2}$. D'acord amb la segona llei de Kepler és constant i com hem vist a (3), es pot calcular a partir de a, e i τ. De moment, però, utilitzarem que $r^2\theta'$ és constant i que per tant, la derivada respecte t és zero, és a dir,

$$\frac{d}{dt}(r^2\theta') = 2rr'\theta' + r^2\theta'' = 0$$

Això ens diu que la component tangencial de l'accel·leració que teniem a (8) és zero i,

$$\mathbf{q}'' = (r'' - r(\theta')^2)\mathbf{v}_1. \tag{10}$$

Com que $r^2\theta' = 2v_A$ substituint a (9) tenim

$$r' = \frac{2v_A e}{a(1-e^2)} \sin \theta.$$

En aquesta equació a, e i v_A són constant i $\theta = \theta(t)$. Derivant de nou s'obté

$$r'' = \frac{2v_A e}{a(1-e^2)} \theta' \cos\theta = \frac{4v_A^2 e}{a(1-e^2)} \frac{\cos\theta}{r^2}.$$

Ara podem calcular la component radial de $\mathbf{q}''$. Després de fer algunes simplificacions s'obté

$$r'' - r(\theta')^2 = r'' - \frac{4v_A^2}{r^3} = -\frac{4v_A^2}{a(1-e^2)r^2}. \tag{11}$$

Substituint (11) a (10) i usant que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{q}/r$ s'obté l'equació

$$\mathbf{q}'' = -\frac{\mu}{r^2}\frac{\mathbf{q}}{r} \tag{12}$$

on

$$\mu = \frac{4v_A^2}{a(1-e^2)} = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2}.$$

Ara tindrem en compte que el Sol també és atret pel planeta i per tant també es mou. Siguin $\mathbf{q}_S$, $\mathbf{q}_P$ els vectors posició de S i de P respectivament, en un sistema de referència fix. Llavors $\mathbf{q} = \mathbf{q}_P - \mathbf{q}_S$ és el vector de posició de P respecte S.

Sigui $\mathbf{F}_P$ la força d'atracció gravitatòria que S exerxeix sobre P i $\mathbf{F}_S$ la de P sobre S. La segona llei de la Mecànica (la força és igual a la massa per l'accel·leració) aplicada a S i P ens dóna

$$\mathbf{F}_S = M\mathbf{q}_S'', \qquad \mathbf{F}_P = m\mathbf{q}_P''.$$

D'acord amb la tercera llei de la Mecànica (llei d'acció-reacció)

$$\mathbf{F}_S = -\mathbf{F}_P$$

Per tant,

$$0 = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_P = M\mathbf{q}_S'' + m\mathbf{q}_P''.$$

D'aquesta equació obtenim

$$\mathbf{q}_S'' = -\frac{m}{M}\mathbf{q}_P''.$$

Això ens permet escriure

$$\mathbf{q}'' = \mathbf{q}_P'' - \mathbf{q}_S'' = \frac{M+m}{M}\mathbf{q}_P'' = \frac{M+m}{Mm}\mathbf{F}_P.$$

Usant (12) tenim

$$\mathbf{F}_P = \frac{mM}{M+m}\mathbf{q}'' = -\frac{mM\mu}{(M+m)r^2}\left(\frac{\mathbf{q}}{r}\right).$$

Aquesta equació ens diu que la força que S exerxeix sobre P té la direcció de $\mathbf{q}$ i sentit oposat, per tant és una força atractora. A més el seu mòdul és inversament proporcional al quadrat de la distància entre S i P.

Per deduir la llei d'atracció gravitatòria, Newton va demostrar que si un cos es mou seguint les lleis de Kepler, per l'acció d'una força d'atracció d'un altre cos situat en un dels focus, llavors aquesta força havia de ser inversament proporcional al quadrat de la distància. A l'exposició anterior hem seguit aquest procediment però utilitzant les matemàtiques actuals. Hem de tenir en compte que a l'època de Newton encara no es coneixia el concepte de derivada.

Si ara prenem la constant G com

$$G = \frac{\mu}{M+m} = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2(M+m)} \tag{13}$$

s'obté que la força d'atracció sobre P és

$$\mathbf{F}_P = \frac{GmM}{r^2}\frac{\mathbf{q}}{r}.$$

Observem que (13) es pot escriure com

$$a^3 = \tau^2 \frac{G(M+m)}{4\pi^2} \tag{14}$$

Per a dos planetes amb masses m_1, m_2, semieixos a_1, a_2 i períodes τ_1, τ_2 respectivament tenim

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{\tau_1^2(M+m_1)}{\tau_2^2(M+m_2)}$$

Si comparem aquesta relació amb (4) veiem que la relació entre semiexos i períodes no és exactament la que va formular Kepler. Cal fer una petita correcció que depen de les masses. No obstant això si considerem dos planetes i el Sol, les masses m_1 i m_2 són molt més petites que M i podem fer la següent aproximació

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{\tau_1^2(1+m_1/M)}{\tau_2^2(1+m_2/M)} \approx \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2}$$

que dóna la forma original de la tercera llei. Notem que Kepler va establir les seves lleis a partir d'observacions astronòmiques. Amb la precisió amb que es tenien aquestes observacions era gairebé impossible que Kepler pugues apreciar aquestes petites diferències entre els planetes.

Regina Martínez
Dept. de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra
reginamb@mat.uab.cat

Publicat el 18 de setembre de 2006