MAT^2

MATerials MATemàtics
Volum 2006, treball no. 1, 14 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Trigonometria esfèrica i hiperbòlica

Joan Girbau

L'objectiu d'aquestes notes és establir de forma curta i elegant les fórmules fonamentals de la trigonometria esfèrica i de la trigonometria hiperbòlica. La redacció consta, doncs, de dues seccions independents, una dedicada a la trigonometria esfèrica i l'altra, a la hiperbòlica. La primera està adreçada a estudiants de primer curs de qualsevol carrera tècnica. La segona requereix del lector coneixements rudimentaris de varietats de Riemann.

1 Trigonometria esfèrica

Aquells lectors que ja sàpiguen què és un triangle esfèric i com es mesuren els seus costats i els seus angles poden saltar-se les subseccions 1.1 i 1.2 i passar directament a la subsecció 1.3.

1.1 Arc de circumferència determinat per dos punts

A cada dos punts A i B de la circumferència unitat, no diametralment oposats, els hi associarem un únic arc de circumferència, de longitud menor que π, (vegeu la figura 1) tal com explicarem a continuació.

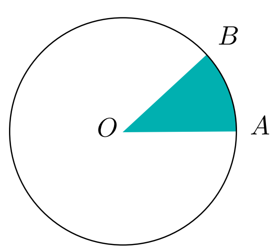


figura 1

La circumferència unitat de $\mathbb{R}^2$ és el conjunt S^1 de punts situats a distància 1 de l'origen. Si identifiquem $\mathbb{R}^2$ amb $\mathbb{C}$ mitjançant la bijecció $(x, y) \leftrightarrow x + iy$, podem pensar S^1 com el subconjunt de $\mathbb{C}$ format pels nombres complexes z de mòdul 1. El subconjunt S^1 de $\mathbb{C}$, amb l'operació producte de nombres complexes, forma un grup (subgrup del grup multiplicatiu $C - \{0\}$). L'aplicació $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ que a cada $t \in \mathbb{R}$ associa l'element $\mathrm{e}^{it} \in S^1$ és un epimorfisme del grup additiu $\mathbb{R}$ en el grup S^1, el nucli del qual és $2\pi Z$. Per tant, tenim un isomorfisme de grups entre $\mathbb{R}/2\pi Z$ i S^1. Donats dos punts A i B, no diametralment oposats, de S^1, considerem els elements $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ de $\mathbb{R}/2\pi Z$ que els hi corresponen. Siguin A', B' els únics representants de les classes $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ a l'interval $[0, 2\pi)$ de $\mathbb{R}$. Siguin X_1, X_2 els dos nombres A', B' ordenats en forma creixent (de manera que $X_1 < X_2$). El punt X_2 divideix l'interval $[X_1, X_1 + 2\pi]$ en dos subíntervals, $[X_1, X_2]$, $[X_2, X_1 + 2\pi]$. D'aquests dos subintervals escollim el de longitud menor. La longitud de l'interval escollit és menor que π. (En efecte, com que els punts A i B no són diametralment oposats, $X_2 - X_1 \neq \pi$. Com que la suma de longituds dels dos subintervals és 2π i cap dels dos té longitud π, un d'ells ha de tenir longitud més petita i l'altre més gran que π.) Sigui $[Y_1, Y_2]$ l'interval escollit (el de menor longitud). Als dos punts A i B associem l'arc de S^1 definit com el conjunt de punts de la forma e^{it} amb $t \in [Y_1, Y_2]$. Aquest arc el designarem per AB, i també per BA (ja que l'ordre dels punts no intervé en l'assignació de l'arc).

1.2 Triangles esfèrics

Considerem l'esfera unitat S^2 de $\mathbb{R}^3$, $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. S'anomena cercle màxim d'aquesta esfera la intersecció de la mateixa amb qualsevol pla que passi per l'origen. Tot cercle màxim de S^2 és, doncs, una circumferència de radi 1. Donats dos punts A i B de S^2, sempre hi ha un únic cercle màxim que els conté (justament el cercle màxim obtingut per intersecció de S^2 amb el pla determinat per A, B i l'origen de $\mathbb{R}^3$). Suposem ara que A i B són dos punts de S^2 que no són diametralment oposats. Podem considerar el cercle màxim que els conté (que és una circumferència de radi 1), i dintre d'aquest cercle màxim, podem considerar l'arc AB associat a aquests dos punts pel procediment anterior. Sempre, doncs, que A i B siguin dos punts no diamentralment oposats de S^2, AB designarà aquest arc de cercle màxim.

Un **triangle esfèric** és un conjunt de tres punts A, B, C de S^2, de manera que no estiguin continguts en un mateix cercle màxim i de manera que dos a dos no siguin diametralment oposats, juntament amb el conjunt dels tres arcs de cercle màxim AB, BC i CA determinats pels tres punts A, B, C. Aquests tres punts s'anomenen **vèrtexs** del triangle i els tres arcs de cercle màxim AB, BC i CA s'anomenen **costats** del triangle. Aquests costats els designarem per c, a, b respectivament, i el triangle esfèric el designarem er ABC.

Observeu que el triangle (sobre l'esfera) ABC de la figura 2 no és un triangle esfèric, ja que el costat a no és un arc de cercle màxim.

Denominarem **angle en** A d'un triangle esfèric ABC l'angle que formen a $\mathbb{R}^3$ els dos plans π_1 i π_2 determinats respectivament pels punts A, O, B i A, O, C, on O és l'origen. Com que l'angle de dos plans de $\mathbb{R}^3$ és un concepte ambigu, ja que dos plans que es tallen donen lloc, en realitat, a quatre angles, cal precisar una mica més aquesta definició. El pla π_1 divideix l'espai en dos semiespais. Sigui S_1 el semiespai d'aquests dos que conté C. Anàlogament, dels dos semiespais en què el pla π_2 divideix l'espai, sigui S_2 el que conté el punt B. Llavors l'angle en A és l'angle de l'espai determinat per les interseccions dels dos semiespais S_1 i S_2. Per abús de llenguatge designarem per A l'angle en un vèrtex A d'un triangle esfèric, de manera que la mateixa lletra designarà el vèrtex i l'angle.

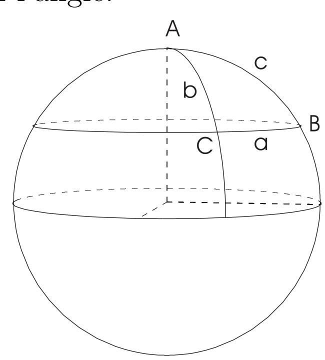


figura 2

1.3 Fórmules fonamentals

Primer de tot veurem com l'esfera unitat es pot parametritzar per la latitud i longitud geogràfiques.

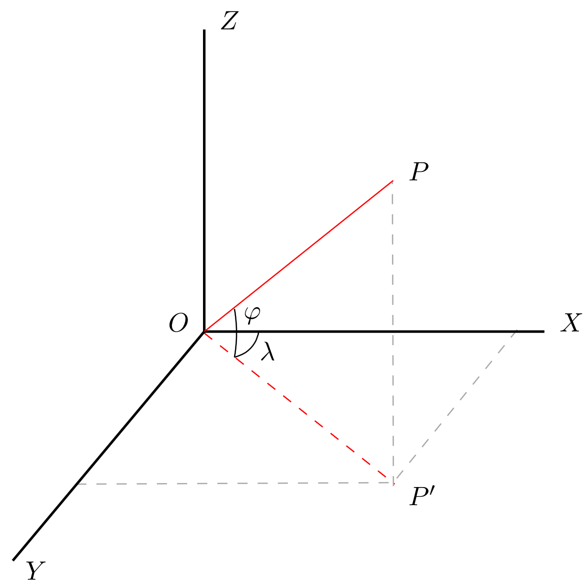


figura 3

Designem per O l'origen de $\mathbb{R}^3$. Donat un punt P de S^2 (que no sigui cap dels dos pols $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$), l'angle φ que forma OP amb el pla $z=0$ es denomina **latitud** de P. L'angle φ es considera positiu quan la tercera coordenada de P és positiva, i negatiu, quan és negativa. Així, doncs, φ varia entre $-\pi/2$ i $\pi/2$. Sigui P' la projecció ortogonal de P sobre el pla $z=0$. L'angle λ que forma l'eix de les x amb el segment OP', comptat en el sentit de les agulles del rellotge des del semieix de les x positives, s'anomena **longitud** del punt P (vegeu la figura 3).

La longitud del segment OP és 1 perquè P és de l'esfera unitat. La longitud del segment OP' és $\cos\varphi$. La x del punt P' (que també és la x del punt P), serà, doncs, $\cos\varphi\cos\lambda$. La y de P' (que també és la y de P), serà $\cos\varphi\sin\lambda$. Finalment, la z de P serà $\sin\varphi$. Per tant, el punt P serà el punt $P=(\cos\varphi\cos\lambda, \cos\varphi\sin\lambda, \sin\varphi)$.

Anem ara a establir les fórmules fonamentals de la trigonometria esfèrica. Considerem un triangle esfèric qualsevol, ABC (vegeu la figura 4). Agafem els eixos X, Y, Z de manera que el semieix de les z positives vagi des del centre O de l'esfera al punt A (amb la qual cosa A passa a tenir coordenades $(0,0,1)$). Agafem llavors els eixos X i Y de manera que B estigui en el pla $y=0$, tingui x positiva, i de manera que C tingui la coordenada y positiva.

A la figura 4, el semieix de les x positives és OE, i el de les y positives és OD.

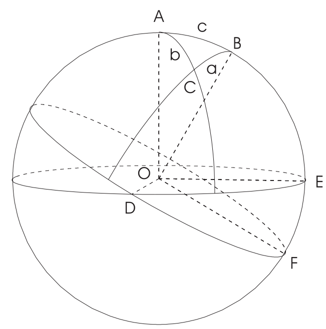


figura 4

Les coordenades de C en aquests eixos són, doncs,

$$C = (\cos(\pi/2 - b)\cos A, \cos(\pi/2 - b)\sin A, \sin(\pi/2 - b)) \\ = (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b) \ .$$

Prenguem ara uns nous eixos X', Y' Z' de la següent manera: El semieix Z' de les z' positives va des del centre O al punt B, els semieixos X' i Y' els prenem de tal manera que A estigui en el pla $y' = 0$, tingui x' negativa, i de manera que C tingui la coordenada y' positiva. A la figura 4 el semieix X' és OF, el semieix Y' és OD (i coincideix amb el semieix Y d'abans), i el semieix Z' és OB. Les coordenades del punt C respecte als eixos X', Y', Z' són, doncs,

$$\begin{aligned} C &= (\cos(\pi/2 - a)\cos(\pi - B), \cos(\pi/2 - a)\sin(\pi - B), \sin(\pi/2 - a) = \\ &= (-\sin a \cos B, \sin a \sin B, \cos a) \ . \end{aligned}$$

És obvi que es passa dels eixos X, Y, Z als eixos X', Y', Z' fent un gir d'angle $-c$ entorn de l'eix $Y = Y'$. Per tant:

$$\begin{pmatrix} -\sin a \cos B \\ \sin a \sin B \\ \cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos c & 0 & -\sin c \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin c & 0 & \cos c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin b \cos A \\ \sin b \sin A \\ \cos b \end{pmatrix}$$

Obtenim d'aquí les tres fórmules següents:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\sin a \cos B &=& \cos c \sin b \cos A - \sin c \cos b \\ \sin a \sin B &=& \sin b \sin A \\ \cos a &=& \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b \end{array} \right. \qquad (1)$$

que constitueixen les fórmules fonamentals de la trigonometria esfèrica.

Anem a veure com s'apliquen aquestes fórmules a un problema concret.

Problema dels papers de Salamanca: Fa uns quants anys alguns partits polítics i entitats ciutadanes volien preparar una manifestació per reclamar la devolució dels papers de Salamanca. La manifestació es volia fer a l'avinguda de Maria Cristina de Barcelona, i es volia demanar als participants que, mirant cap a l'Arxiu de Salamanca, cridessin “Torneu-nos els papers! Torneu-nos els papers!”. Per tal d'indicar la direcció exacta cap on haurien de mirar els manifestants, s'enganxarien a terra unes fletxes adhesives que assenyalarien la direcció de l'Arxiu de Salamanca. Calculeu l'angle que haurien de formar aquestes fletxes amb la direcció Nord. Les coordenades geogràfiques de l'avinguda Maria Cristina (punt mig de l'avinguda) i de l'Arxiu de Salamanca són les següents:

$$\text{Av. Ma. Cristina de Barcelona} \quad \begin{cases} \text{Latitud} & 41^0\ 22'\ 28,7''\ \text{Nord} \\ \text{Longitud} & 2^0\ 9'\ 5,9''\ \text{Est} \end{cases}$$

$$\text{Arxiu de Salamanca} \quad \begin{cases} \text{Latitud} & 40^0\ 57'\ 38''\ \text{Nord} \\ \text{Longitud} & 5^0\ 40'\ 1,5''\ \text{Oest} \end{cases}$$

Resolució: Considerem el triangle esfèric de la figura 4, de manera que el vèrtex A sigui el Pol Nord, el vèrtex B sigui Barcelona (avinguda de Ma. Cristina) i el vèrtex C sigui l'Arxiu de Salamanca. El costat c serà la colatitud de Barcelona, el costat b serà la colatitud de Salamanca, i l'angle A serà la diferència entre les longituds de Salamanca i de Barcelona. Apliquem ara les fórmules (1) per trobar l'angle B (que és el que busquem), i el costat a (que ens donarà la distància més curta entre Barcelona i Salamanca). Quan es manipulen les fórmules (1) per obtenir certs angles desconeguts, s'ha d'anar molt en compte amb les determinacions de les funcions arc sinus, arc cosinus i arc tangent. Si no es va molt en compte és fàcil obtenir resultats erronis. Per al nostre problema, els segons membres d'aquestes fórmules són coneguts. Designem per X', Y', Z' els primers membres de (1). Fent els càlculs obtenim: $X' = 0,0025867125$, $Y' = 0,1027315862$, $Z' = 0,9947057505$. De l'última de (1) obtenim $a = \arccos Z' = 0,1029458848$ radians. Aquí, com que $Z' > 0$, l'angle obtingut ha d'estar entre 0 i $\pi/2$, per tant el resultat obtingut és correcte. Tenim ara $\sin B = Y'/\sin a = 0,9996831513$, $\cos B = -X'/\sin a = -0,0251713514$. Com que B té el sinus positiu i el cosinus negatiu (i, per definició, està entre 0 i π), estarà entre $\pi/2$ i π. Obtenim el seu valor fent $B = \arccos(\cos B) = 91,4423645413$ graus. Per tant, la direcció de Salamanca forma amb la direcció Nord un angle de 91,4423645413 graus, en el sentit Oest. Per tant, la direcció de Salamanca només difereix de la direcció Oest amb 1,4 graus.

Si volem saber la distància geodèsica entre l'avinguda de Ma. Cristina de Barcelona i l'Arxiu de Salamanca, no tenim més que multiplicar a, expressat en radians, pel radi mitjà de la Terra, $R = 6.367.402,6$ metres. Això dóna 655.498 metres.

Una vegada resolt el problema, val la pena calcular l'angle C del triangle esfèric que hem considerat (que és l'únic que ens manca conèixer). Recordem que l'angle A era la diferència de longituds entre Salamanca i Barcelona, i era $A = 7,8187222222$ graus. Ara, de manera immediata, podem calcular (per les fórmules de la trigonometria esfèrica) l'angle C, i ens surt $C = 83,4062907124$ graus. Observeu que la suma dels tres angles $A + B + C$ és 182,6673774759 graus. A diferència del que passa en la geometria plana, aquí la suma dels tres angles del triangle és més gran de 180 graus. El fet que l'angle C sigui de 83,4 graus porta com a conseqüència que a Salamanca, la direcció de Barcelona difereix de la direcció Est amb 90-83,4=6,6 graus.

Algú podria pensar que com que a Barcelona la direcció de Salamanca forma un angle amb la direcció Oest de 1,3 graus, per raons de simetria, a Salamanca la direcció de Barcelona hauria de formar també amb la direcció Est un angle de 1,3 graus. En canvi els càlculs ens mostren que aquest angle és de 6,6 graus. La raó d'aquesta discrepància és que el cercle màxim que uneix Barcelona i Salamanca no forma pas un angle constant amb meridians i paral·lels.

1.4 La trigonometria plana com a límit de l'esfèrica

Sobre una esfera $S^2(R)$ de $\mathbb{R}^3$ de centre l'origen O i de radi R, considerem un triangle esfèric de vèrtexs A, B, C, de manera que les longituds dels arcs AB, BC i CA siguin molt petites en comparació amb el radi R. Pensem, per exemple, en un triangle sobre l'esfera de la Terra, les longituds dels costats del qual siguin de pocs metres. Anomenem (com sempre) c, a, b les longituds respectives dels tres arcs AB, BC i CA. Per a cada punt P de l'esfera $S^2(R)$ de radi R, considerem la intersecció del segment OP amb l'esfera $S^2(1)$ de radi 1. Si el punt de partida era P, designarem aquesta intersecció per P'.

D'aquesta manera, als tres punts A, B, C de $S^2(R)$ corresponen tres punts A', B', C' de $S^2(1)$, i al triangle esfèric de $S^2(R)$ determinat per A, B, C, correspon el triangle esfèric de $S^2(1)$ determinat per A', B', C'. Òbviament els angles A i A' dels dos triangles són iguals. Anàlogament els angles B i B', i els angles C i C'. Quant als costats dels dos triangles, es té $a' = a/R$, $b' = b/R$, $c' = c/R$. Aplicant les fórmules (1) al triangle $A'B'C'$ tindrem:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\sin(a/R)\cos B & = & \cos(c/R)\sin(b/R)\cos A - \sin(c/R)\cos(b/R) \\ \sin(a/R)\sin B & = & \sin(b/R)\sin A \\ \cos(a/R) & = & \sin(c/R)\sin(b/R)\cos A + \cos(c/R)\cos(b/R) \end{array} \right. \tag{2}$$

Recordem que, per la fórmula de Taylor, es té

$$\begin{array}{l} \sin x = x - (\cos\xi)x^3/3! \\ \cos x = 1 - x^2/2 + (\cos\eta/4!)x^4 \ , \end{array}$$

on ξ i η són nombres entre 0 i x. Quan x és molt petit, x^3 i x^4 són pràcticament menyspreables, i podem posar $\sin x = x$ i $\cos x = 1 - x^2/2$. En les fórmules anteriors, com que a/R, b/R i c/R són molt petits, podem fer aquestes substitucions. Llavors les fórmules anteriors ens donen:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\dfrac{a}{R}\cos B & = & (1 - \dfrac{c^2}{2R^2})\,\dfrac{b}{R}\cos A - \dfrac{c}{R}\,(1 - \dfrac{b^2}{2R^2}) \\ \\ \dfrac{a}{R}\sin B & = & \dfrac{b}{R}\sin A \\ \\ (1 - \dfrac{a^2}{2R^2}) & = & \dfrac{cb}{R^2}\cos A + (1 - \dfrac{c^2}{2R^2})\,(1 - \dfrac{b^2}{2R^2}) \end{array} \right.$$

Quan fem aquests càlculs, seguint el criteri anterior haurem d'eliminar els termes d'ordre > 2 en a/R, b/R i c/R. Fent això i operant, les tres igualtats anteriors esdevenen

$$\left\{ \begin{array}{lcl} c & = & a\cos B + b\cos A \\ a\sin B & = & b\sin A \\ a^2 & = & b^2 + c^2 - 2cb\cos A \end{array} \right. \tag{3}$$

Reconeixem en la segona igualtat de (3) el teorema del sinus de la trigonometria plana. En la tercera igualtat hi reconeixem el teorema del cosinus.

La primera igualtat ens dóna la longitud d'un costat d'un triangle com a suma de les projeccions sobre aquest costat dels altres dos.

En resum, les fórmules de la trigonometria plana s'obtenen per una aproximació quadràtica (fins a l'ordre 2) de les fórmules (1) de la trigonometria esfèrica, aplicades a una esfera de radi R gran respecte a les longituds a, b, c dels costats.

2 Trigonometria hiperbòlica

2.1 Pla hiperbòlic: model de l'hiperboloide

El pla hiperbòlic, $\mathbb{H}_2$, és l'única varietat de Riemann de dimensió 2, completa, simplement connexa i de curvatura constant -1. Hi ha diversos models —tots ells equivalents— per introduir aquesta varietat. El model més adient per donar les fórmules de la trigonometria hiperbòlica és el model de l'hiperboloide, del qual en recordarem aquí els trets fonamentals.

Considerem $\mathbb{R}^3$ dotat del producte escalar η que definim a continuació. Si $u = (u_x, u_y, u_z)$, $v = (v_x, v_y, v_z)$ són dos vectors,

$$\eta(u, v) = u_x v_x + u_y v_y - u_z v_z \ .$$

En el cas de $\mathbb{R}^4$, aquest producte escalar és el de Minkowski (de la relativitat especial). Recordem que u s'anomena temporal si $\eta(u, u) < 0$, que u s'anomena espacial si $\eta(u, u) > 0$, i que u s'anomena lluminós si $\eta(u, u) = 0$. Es pot demostrar que si u i v són perpendiculars (pel producte escalar η), llavors si un d'ells és temporal, l'altre és espacial.

Considerem la superfície $\mathbb{H}$ de $\mathbb{R}^3$ definida per

$$\mathbb{H} = \{p \in \mathbb{R}^3,\ \ p = (p_x, p_y, p_z),\ \text{tals que } \eta(p, p) = -1 \text{ i } p_z > 0\} \ .$$

$\mathbb{H}$ és una component connexa de l'hiperboloide de dos fulls d'equació $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. Per tal de parametritzar $\mathbb{H}$, cosiderem en el pla de coordenades (r, z) la branca d'hipèrbola donada per

$$\begin{cases} r = \sinh \varphi \\ z = \cosh \varphi \end{cases}$$

Considerem ara, a $\mathbb{R}^3$, una semirecta r que surti de l'origen i estigui continguda en el pla determinat pels eixos X, Y. Sigui π el pla de $\mathbb{R}^3$ engendrat per l'eix Z i la semirecta r. En aquest pla considerem la branca d'hipèrbola anterior. Fem ara girar el pla π entorn de l'eix Z i la branca d'hipèrbola de π engendra la superfície de revolució $\mathbb{H}$, que es parametritza, doncs, així:

$$\begin{cases} x = & r\cos\lambda = & \sinh\varphi\cos\lambda \\ y = & r\sin\lambda = & \sinh\varphi\sin\lambda \\ z = & & \cosh\varphi \end{cases}$$

Fixem-nos que en aquesta parametrització λ representa l'angle entre la semirecta r que gira i l'eix de les x.

Si $p \in \mathbb{H}$, l'espai tangent $T_p(\mathbb{H})$ es pot identificar amb $< p >^{\perp}$ (ortogonal del subespai $< p >$ pel producte escalar η, dintre de $\mathbb{R}^3$). Si $u \in T_p(\mathbb{H}) =< p >^{\perp}$, com que p és temporal, u és espacial. Per tant $\eta(u,u) > 0$. Això prova que la restricció de η a l'espai tangent $T_p(\mathbb{H})$ és definida positiva. La restricció de η a cada espai tangent dóna, doncs, un producte escalar definit positiu i converteix $\mathbb{H}$ en una varietat de Riemann (que és l'espai hiperbòlic de dimensió 2).

És ben conegut —i no gaire difícil de demostrar— que si $p \in \mathbb{H}$ i $u \in T_p(\mathbb{H})$, u unitari, llavors la geodèsica que surt de p amb vector tangent u ve donada pel vector de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{x}(t) = \cosh t\ \vec{p} + \sinh t\ \vec{u}\ .$$

Observeu que

$$\eta(\vec{x}(t), \vec{x}(t)) = \eta(\cosh t\ \vec{p} + \sinh t\ \vec{u}\ ,\ \cosh t\ \vec{p} + \sinh t\ \vec{u}) =$$

$$= \cosh^2 t\ \eta(p,p) + \sinh^2 t\ \eta(u,u)$$

(ja que p i u són ortogonals). Per tant

$$\eta(x(t), x(t)) = -\cosh^2 t + \sinh^2 t = -1\ .$$

Per tant, $x(t) \in \mathbb{H}\ \forall\ t$.

El punt $(0,0,1)$ pertany a $\mathbb{H}$. A l'igual que fèiem en el cas esfèric, denominarem pol nord aquest punt i el designarem per N. L'espai tangent

$T_N(\mathbb{H}) =< (0,0,1) >^{\perp}$ és el subespai de vectors $u = (u_x, u_y, 0)$ amb tercera coordenada nul·la. Un vector unitari de $T_N(\mathbb{H})$ serà, doncs, de la forma $u = (\cos\lambda, \sin\lambda, 0)$. La geodèsica que surt de N amb vector tangent u és

$$x(\varphi) = \cosh\varphi\ \vec{N} + \sinh\varphi\ \vec{u} = (\sinh\varphi\cos\lambda, \sinh\varphi\sin\lambda, \cosh\varphi)\ .$$

Veiem, doncs, que els meridians de $\mathbb{H}$ d'equació $\lambda =$ constant, són geodèsiques. Però, el que és important, també, és que sobre cada un d'aquests meridians φ és la distància geodèsica al pol nord (que correspon a $\varphi = 0$).

Si f és una isometria de $\mathbb{R}^3$ respecte al producte escalar η, llavors f preserva l'hiperboloide de dos fulls $S = \{p \in \mathbb{R}^3$ tals que $\eta(p,p) = -1\}$. En efecte, si $\eta(p,p) = -1$, també $\eta(f(p), f(p)) = -1)$. Sigui $\mathcal{I}$ el conjunt d'isometries de $\mathbb{R}^3$ respecte al producte η tals que preserven el component connex $\mathbb{H}$ de S. Llavors tot $f \in \mathcal{I}$ induirà una isometria de la varietat de Riemann $\mathbb{H}$. Es pot demostrar (malgrat que això no ens interessa) que aquestes són totes les isometries de $\mathbb{H}$. En particular, les aplicacions lineals de $\mathbb{R}^3$ que tenen una matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ 0 & \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\varphi & 0 & \cosh\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donen lloc a isometries de $\mathbb{H}$. Les dues primeres matrius corresponen a girs hiperbòlics entorn de l'eix X i de l'eix Y, mentre que la tercera correspon a un gir euclidià entorn de l'eix Z.

2.2 Fórmules de la trigonometria hiperbòlica

Considerem un triangle geodèsic del pla hiperbòlic $\mathbb{H}$ (vegeu la figura 5). Designarem per A, B i C els seus vèrtexs. Designarem per a, b i c els arcs geodèsics BC, CA i AB respectivament. Per abús de llenguatge designarem també per a, b i c les longituds dels arcs geodèsics anteriors. També designarem per A, B i C la mesura dels angles en els vèrtexs A, B i C.

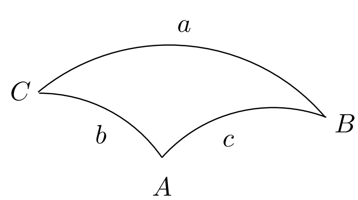


figura 5

Com que les fórmules que volem obtenir relacionen costats i angles d'un tal triangle, les mateixes fórmules seran vàlides per a qualsevol transformat d'aquest triangle per una isometria. Tenint present això, utilitzant un gir euclidià convenient entorn de l'eix Z puc portar el vèrtex A sobre un punt A' del meridià intersecció de $\mathbb{H}$ amb el pla $y = 0$. Després, per un gir hiperbòlic entorn de l'eix Y puc transformar A' en el pol nord $N = (0, 0, 1)$. Per tant, sense pèrdua de la generalitat, puc suposar que el vèrtex A inicial que m'han donat és el pol nord N. Amb un gir euclidià entorn de l'eix Z (que preservarà A), podem portar B sobre el pla $y = 0$ de manera que tingui, a més, coordenada x positiva. Fem-ho i suposem que el B inicial ja compleix això. Ens queda un triangle com el representat a la figura 6.

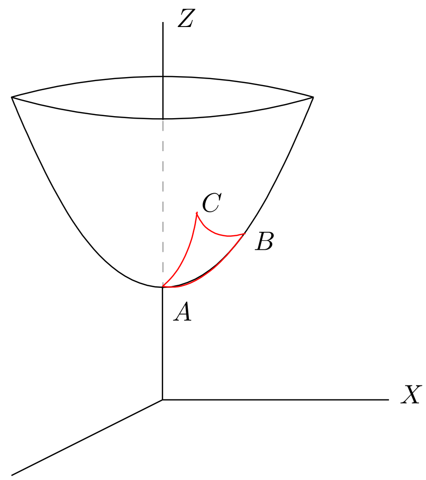


figura 6

Per veure com es mesura l'angle en A del triangle geodèsic, observem que C està sobre el meridià obtingut per intersecció de $\mathbb{H}$ i d'un pla π que passa per l'eix de les Z (de fet l'arc b del triangle és un arc d'aquest meridià). Aquest pla i aquesta intersecció estan representants en la figura 7. En aquesta figura es veu bé que l'angle en A coincideix amb l'angle que forma la intersecció de π amb el pla $z = 0$ i l'eix X. Aquest angle és el que denominàvem λ en la parametrització de $\mathbb{H}$. Per tant, queda clar que les coordenades del vèrtex C són

$$C = (\sinh b \cos A, \sinh b \sin A, \cosh b) \ .$$

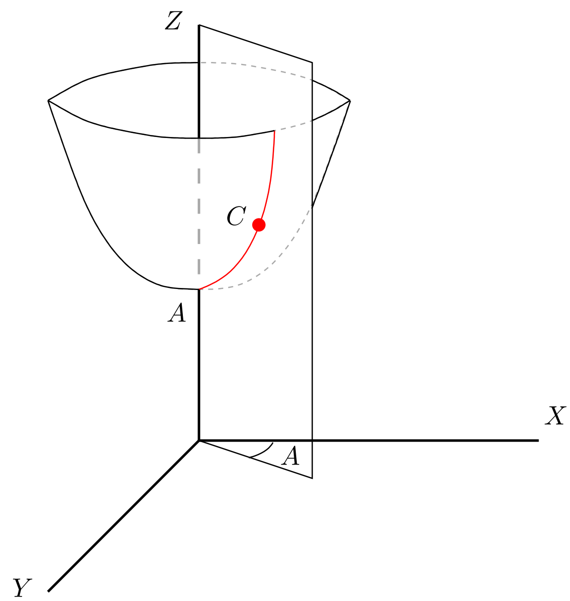


figura 7

Igual que fèiem en el cas de la trigonometria esfèrica, prenem uns nous eixos, X', Y', Z', obtinguts dels eixos X, Y, Z, fent un gir hiperbólic (en el cas esfèric era un gir euclidià) d'angle $-c$ entorn de l'eix Y (que passa a coincidir amb Y'). Les coordenades de C en aquests nous eixos (com passava en el cas esfèric) seran

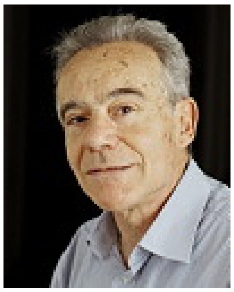
$$C = (\sinh a \cos(\pi - B), \sinh a \sin(\pi - B), \cosh a)\ .$$

Per tant, tindrem

$$\begin{pmatrix} -\sinh a \cos B \\ \sinh a \sin B \\ \cosh a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh c & 0 & -\sinh c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh c & 0 & \cosh c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh b \cos A \\ \sinh b \sin A \\ \cosh b \end{pmatrix}$$

Això ens dóna:

$$\begin{cases} -\sinh a \cos B & = & \cosh c \sinh b \cos A - \sinh c \cosh b \\ \sinh a \sin B & = & \sinh b \sin A \\ \cosh a & = & -\sinh c \sinh b \cos A + \cosh c \cosh b \end{cases}$$



Joan Girbau
Dept. de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra
girbau@mat.uab.cat

Publicat el 18 de setembre de 2006