Topologia II

Llista de problemes (2006-2007)

1. Sigui el semi-espai $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$. Demostreu que el camí tancat

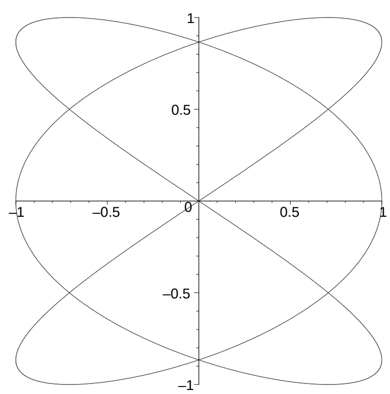
$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & H \\ t & \longmapsto & (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0). \end{array}$$

   és homòtop al camí constant $t \mapsto (1, 0, 0)$.

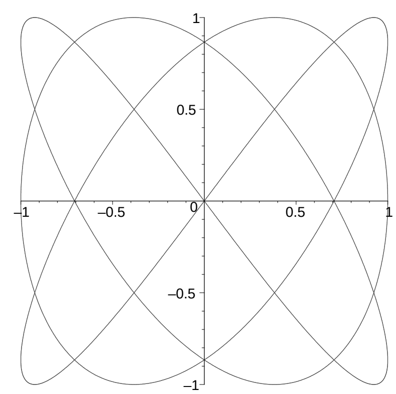
2. Demostreu que el camí de l'exercici anterior és homòtop al camí

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & H \\ t & \longmapsto & (1, \sin(2\pi t), 1 - \cos(2\pi t)). \end{array}$$

3. Les dues corbes de Lissajous,



$$t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(6\pi t + \pi/2) \\ \sin(4\pi t) \end{pmatrix}$$



$$t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(6\pi t + \pi/2) \\ \sin(8\pi t) \end{pmatrix}$$

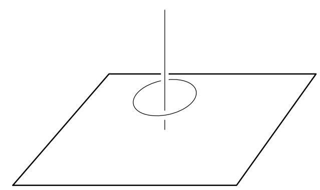
   són camins tancats $[0, 1] \to \mathbb{R}^2$ amb punt de base $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Demostreu que són homòtops.

4. Siguin ω i ω' dos camins $I \to X$ de un subespai $X \subset \mathbb{R}^n$ amb $\omega(0) = \omega'(0)$ i $\omega(1) = \omega'(1)$, tals que per a tot $s \in I$ el segment $\overline{\omega(s)\omega'(s)}$ està contingut a X. Demostreu que ω i ω' són homòtops.

5. Sigui $H := \{(x,y,z) \mid z > 0\}$ i $T = \{(x,y,z) \mid x = 0, y = 0, z \in [0,10]\}$. Sigui $X := H \setminus T$. (Es pot pensar X com l'aire al redor de una asta alçada en la terra.) Desmostreu que el camí tancat

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \big(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 1\big) \end{aligned}$$

(al redor de la asta) és homòtop al camí constant $(1,0,1)$.



6. **(Examen de Juliol de 2003.)** Siguin $0 < k < 1$, α i β dos camins a un espai topològic X amb $\alpha(1) = \beta(0)$. Definim

$$\omega(t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{t}{k}\right) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq k \\ \beta\left(\frac{t-k}{1-k}\right) & \text{si} \quad k \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Demostreu que $\omega \simeq \alpha \cdot \beta$.

7. Sigui $\phi : I \to I$ una aplicació que preserva les extremitats (i.e. $\phi(0) = 0$ i $\phi(1) = 1$). Altrament dit, ϕ és un camí de I amb inici igual a 0 i fi igual a 1. Demostreu que ϕ és homòtop al camí donat per la funció identitat $I \to I$, $s \mapsto s$.

   Pista: utilitzeu l'Exercici 4.

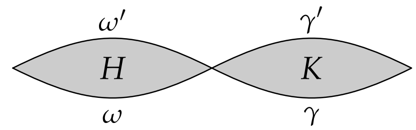
8. Si $\omega : I \to X$ és un camí, i si $\phi : I \to I$ és una aplicació que preserva les extremitats, aleshores $\omega \circ \phi$ és novament un camí amb els mateixos inici i fi. Demostreu que $\omega \circ \phi$ és homòtop a ω.

9. Utilitzant l'exercici anterior, doneu una solució alternativa del Exercici 6, sense escriure cap homotopia explícita.

10. Siguin ω i ω' dos camins homòtops amb inici x_0 i fi x_1. Sigui γ un camí qualsevol amb inici x_1. Demostreu que $\omega.\gamma \simeq \omega'.\gamma$. (Donada una homotopia explícita $H : \omega \simeq \omega'$, construïu una homotopia explícita $\omega.\gamma \simeq \omega'\gamma$ (que convén escriure $H.\gamma$).)

    Copieu la demostració per a provar un enunciat anàleg per a la situació on γ ve abans d'els ω i ω'.

11. Generalitzant l'exercici anterior, donades homotopies $H : \omega \simeq \omega'$ i $K : \gamma \simeq \gamma'$ (on $\omega(1) = \omega'(1) = \gamma(0) = \gamma'(0)$)



construïu una homotopia $H.K$ de $\omega.\gamma$ a $\omega'.\gamma'$ que anomenarem la *composició horitzontal* de H i K.

12. La composició de dues homotopies com en Proposició 1.1.3 és anomenada *composició vertical*, i és notada amb mera juxtaposició. Proveu que la composició horitzontal (definida en el exercici anterior) és compatible amb la composició vertical en el sentit següent: Donats camins ω, ω', ω'' de x_0 a x_1 i altres tres camins γ, γ', γ'' de x_1 a x_2, i donades quatre homotopies

$$\begin{array}{rl} H' : \omega' \simeq \omega'' & \quad K' : \gamma' \simeq \gamma'' \\ H : \omega \simeq \omega' & \quad K : \gamma \simeq \gamma' \end{array}$$

aleshores

$$(H.K)(H'.K') = (HH').(KK').$$

Aquesta figura pot ser útil:

H'	K'
H	K

13. Demostreu que les dues afirmacions següents són equivalents per a un espai X donat:
    (i) Dos camins qualssevol que comencen en un punt x_0 i acaben en un altre punt x_1 són homòtops.
    (ii) Tot camí que comença i acaba en un mateix punt és homòtop al camí constant.

14. Demostreu que E^2 és contràctil. (I.e., l'aplicació identitat $E^2 \to E^2$ és homòtopa a una aplicació constant).

15. Sigui $f : S^1 \to X$ una aplicació homòtopa a una aplicació constant. Demostreu que existeix una aplicació contínua $g : E^2 \to X$ extenant f. És a dir que $g|_{S^1} = f$:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[dr, "f"'] & \subset & E^2 \arrow[dl, phantom] \arrow[d, "g"] \\ & & X \end{tikzcd}$$

16. Recíprocament, sigui $f : S^1 \to X$ una aplicació contínua amb una extension $g : E^2 \to X$ com en l'exercici anterior. Demostreu que f és homòtopa a una aplicació constant.

    Pista: Utilitzeu Exercici 14.

17. Generalitzant l'exercici anterior, demostreu que toda aplicació contínua que factoritza a través d'un espai contràctil és homòtopa a una aplicació constant.

Dos exercicis donant un punt de vista més categòric.

18. Sigui $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un functor entre dues categories. Demostreu que si $\varphi : X \to Y$ és una fletxa invertible en $\mathscr{C}$ aleshores $F(\varphi) : FX \to FY$ és invertible en $\mathscr{D}$. (Aquest fet general immediatament implica Corol·lari 1.2.2.)

19. Sigui $\mathscr{C}$ una categoria qualsevol. Una fletxa $r : X \to A$ es diu una *retracció* si existeix una fletxa $i : A \to R$ tal que $r \circ i = \mathrm{id}_A$.

    A més, un objecte A es diu *retracte* de un objecte X si existeix una retracció $r : X \to A$.

    Demostreu que tot functor preserva retraccions. (Així generalitza Corol·lari 1.2.3.)

20. Definició: Un espai topològic X es diu gaudir de la *propietat del punt fix* si tota aplicació contínua $f : X \to X$ té un punt fix.

    Demostreu que si X té la propietat del punt fix aleshores tot retracte $A \subset X$ també té la propietat del punt fix.

21. Demostreu que si X té el propietat del punt fix, llavors tot espai homeomorfe també ho té. Demostreu que la propietat no és un invariante de homotopia. És a dir, doneu un exemple de dos espais homotopicament equivalents tals que un espai té la propietat i l'altre no. Pista: considereu $\mathbb{R}^n$.

    Definició: una aplicació contínua $f : S^n \to \mathbb{R}^k$ és *senar* si $f(-x) = -f(x)$.

22. Anàlog 1-dimensional de Borsuk-Ulam (Corol·lari 2.2.11 i Corol·lari 2.2.12).

    (i) Demostreu que tota aplicació senar $S^1 \to \mathbb{R}$ té un zero.

    (ii) Demostreu que si $f : S^1 \to \mathbb{R}$ és una aplicació contínua existeixen sempre dos punts antipodals amb la mateixa imatge.

23. Sigui $\varphi : S^1 \to S^1$ una aplicació contínua. Definim el seu grau per la següent: agafa una parametrització $\gamma : I \to S^1$ de grau 1, i defineix

    $$\deg(\varphi) := \deg(\varphi \circ \gamma)$$

    Demostreu que aquesta definició no depèn de γ.

24. Considerant $S^1 \subset \mathbb{C}$, demostreu que l'aplicació $z \mapsto z^k$ té grau k, per a tot $k \in \mathbb{Z}$.

25. Donades dues aplicacions contínues
$$S^1 \xrightarrow{f} S^1 \xrightarrow{g} S^1$$
demostreu que
$$\deg(g \circ f) = \deg f \cdot \deg g.$$

26. (Variacions del Borsuk-Ulam.) Demostreu que els quatre enunciats següents són equivalents:
   (a) (2.2.10) Dues aplicacions senars $s_1, s_2 : S^2 \to \mathbb{R}$ tenen sempre un zero comú. (És a dir, $\exists x \in S^2 \mid s_1(x) = s_2(x) = 0$.)
   (b) (2.2.11) Tota aplicació senar $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ té un zero.
   (c) (7.1.1) No existeix cap aplicació senar $g : S^2 \to S^1$.
   (d) (2.2.12) Para tota aplicació $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ existeixen dos punts antipodals amb la mateixa imatge.

27. Siguin A_1, A_2, A_3 tres tancats de S^2 tals que $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Demostreu que algun dels tres conjunts A_1, A_2, A_3 conté un parell de punts antipodals.

   Pista: Definiu dues funcions f_1, f_2 com la distància a A_1, A_2:
$$f_i(x) := \inf\{d(x,a) \mid a \in A_i\}$$
   i poseu
$$\begin{aligned} g : S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (f_1(x), f_2(x)). \end{aligned}$$
   Ara utilitzeu Borsuk-Ulam (d): garanteix l'existència de un punt $x \in S^2$ tal que $g(-x) = g(x)$, i aquest punt deu estar en un dels A_i. Considereu els tres casos.

28. Demonstreu que tota aplicació injectiva $f : S^2 \to S^2$ és bijectiva (i per tant, perqué S^2 és compacte i Haussdorff, f és un homeomorfisme).

29. Demostreu que el grup $G = \langle x, y \mid xyx^{-1} = y^2, yxy^{-1} = x^2 \rangle$ és trivial.

30. Calculeu l'abelianitzat del grup $G = \langle x, y \mid x^{10}, yxy^{-1}x^{-3} \rangle$.

31. Considereu el grup $G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$. Demostreu que:
   (i) G conté elements d'ordre infinit.
   (ii) Els únics elements d'ordre finit són els de $\mathbb{Z}_2$ i $\mathbb{Z}_3$ i tots els seus conjugats.
   (iii) El centre de G és el grup trivial.
   (iv) El abelianitzat de G és $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.

32. En l'exemple important 4.4.6 vam mostrar que el grup fonamental del tor $T = S^1 \times S^1$ és isomorf a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ obtingut com $\pi(T) = \langle \alpha, \beta; \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$, on α i β són els generadors dels factors S^1. Per tant, els dos camins $\alpha.\beta$ i $\beta.\alpha$ deuen ser homòtops. Escreueu una homotopia explícita.

33. Més generalment, donats dos espais topològics puntejats (X, x) i (Y, y), i dos camins tancats
$$\alpha : I \to X \quad \text{baseat a } x$$
$$\beta : I \to Y \quad \text{baseat a } y.$$
Denotem també per α i β els camins induits en $X \times Y$, és a dir, els camins (α, y) i (x, β). Demostreu que $\alpha.\beta = \beta.\alpha$ en $\pi(X \times Y)$ construint una homotopia explícita.

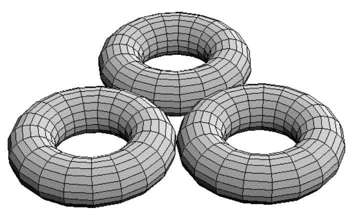
    Pista: mireu els projeccions i construïu la homotopia separadament en cada factor.

34. (i) Trobeu una aplicació entre espais topològics $f : X \to Y$ que indueixi en els grups fonamentals la projecció canònica $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

    (ii) Trobeu dos espais X i Y tals que $\pi(X)_{\mathrm{ab}} \simeq \pi(Y)_{ab}$ però on $\pi(X)$ i $\pi(Y)$ no siguin isomorfs.

35. Sigui C el cercle $S^1 \times \{e\} \subset T = S^1 \times S^1$, i sigui Q el quocient de T obtingut col·lapsant C. Calculeu el grup fonamental de Q.

36. Siguin T_1, T_2, T_3 tres tors disjunts. Escollim a cada tor T_i un parell de punts x_i, y_i amb $x_i \neq y_i$. Calculeu el grup fonamental de l'espai que s'obté unint els tres tors mitjançant les identificacions $x_1 = y_2$, $x_2 = y_3$, $x_3 = y_1$, tal com indica el dibuix.



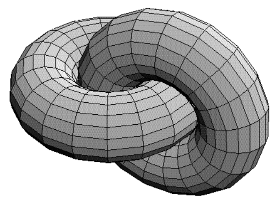
37. Demostreu que un obert de $\mathbb{R}^2$ no és homeomorfe a cap obert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Pista: Un obert de $\mathbb{R}^n$ conté una bola E^n, la vora de la qual és S^{n-1} que conté S^2. Ara utilitzeu el teorema de Borsuk-Ulam.

38. Calculeu el grup fonamental de $\mathbb{R}P^2$ menys un punt.

39. Calculeu el grup fonamental de $\mathbb{R}P^2$ menys dos punts.

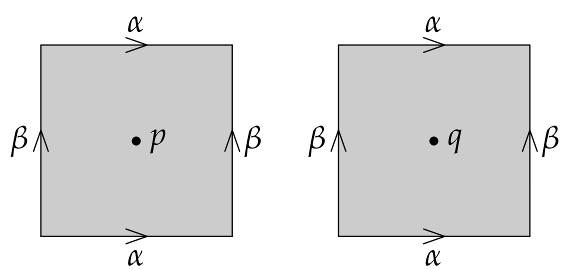
40. Calculeu el grup fonamental de $\mathbb{R}P^2$ menys tres punts.

41. Calculeu el grup fonamental de l'espai que s'obté enganxant dos tors T_1 i T_2 de la manera que indica el dibuix (el paral·lel de radi mínim de cadascun dels tors s'identifica amb un meridià de l'altre tor).



Pista: utilitzeu Seifert-van Kampen amb dos oberts una mica més gran que cada tor.

42. Calculeu el grup fonamental del espai d'identificació següent:



Pista: utilitzeu Seifert-van Kampen amb dos oberts: $U := X \smallsetminus \{p\}$ i $V := X \smallsetminus \{q\}$.

43. Sigui L una recta de $\mathbb{R}^3$. Calculeu el grup fonamental de $X := \mathbb{R}^3 \smallsetminus L$.

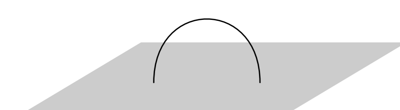
Pista: utilitzeu la regla del producte.

44. Sigui C_2 l'espai de parells de punts distints en $\mathbb{R}^2$. Altrement dit, $C_2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \smallsetminus \Delta$, on Δ és el diagonal. Calculeu el grup fonamental de C_2.

Pista: el diagonal és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ de dimensió 2. Ara utilitzeu l'idea de l'exercici anterior.

45. Sigui L_1 i L_2 dues rectas disjuntas de $\mathbb{R}^3$. Calculeu el grup fonamental de llur complement.

46. *(Fonaments teòrics per al croquet.)* Considereu el semi-espai superior $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$, i siqui $A \subset H$ l'arc $\{(x, y, z) \in H \mid y^2 + z^2 = 1,\ x = 0\}$.



Demostreu que $\pi(H \smallsetminus A) \simeq \mathbb{Z}$.

47. Utilitzant Seifert-van Kampen i els exercicis anteriors, calculeu el grup fonamental de $\mathbb{R}^3$ menys un cercle. (Un cercle no-nuat, és a dir — concretament, diguem $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \neq 1\}$.)

48. (i) Calculeu el grup fonamental de $\mathbb{R}^3$ menys els eixos de coordenades.
 (ii) Calculeu el grup fonamental de $\mathbb{R}^3$ menys n rectes concorrents.

49. Sigui T una arbre, i sigui e una aresta qualsevol de T. Proveu que el graf $T \smallsetminus e$ no és connex.

ATENCIÓ. En els exercicis següents no és suposat que l'espai total d'un recobriment sigui connex (contràriament a la convenció del llibre).

50. Sigui $H = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0\}$, el mig-pla superior obert, i considereu l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} H & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}$$

Mostreu que és una projecció recobridora. Encontreu una acció de $\mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} = H/\mathbb{Z}$.

51. Mostreu que la funció exponencial $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \exp(z)$ és una projecció recobridora.

52. Mostreu que si $Z \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$ són projeccions recobridores llavors $g \circ f$ també ho és. Suposem que g sigui un recobriment d'un nombre finit de fulls.

53. Mostreu que si en el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p'"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

p i p' són ambdues projeccions recobridores, i si tots els espais són connexos, aleshores q també és una projecció recobridora.

54. Considereu un diagrama de pullback

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "p"] \\ X' \arrow[r, "f"'] & X. \end{tikzcd}$$

Mostreu que si p és una projecció recobridora, llavors p' també ho és.

55. Demostreu que si un G-recobriment té una secció, llavors és el recobriment trivial.

56. Considereu el grup G de homeomorfismes de $\mathbb{R}^2$ generat per

$$(x, y) \mapsto (x + 1, y) \qquad \text{i} \qquad (x, y) \mapsto (-x, y + 1).$$

Demostreu que l'acció de G sobre $\mathbb{R}^2$ és propiament discontínua i que el quocient és l'ampolla de Klein.

57. Considereu el grup G' de homeomorfismes de $\mathbb{R}^2$ generat per

$$(x, y) \mapsto (x + 1, y) \qquad \text{i} \qquad (x, y) \mapsto (x, y + 2).$$

Demostreu que l'acció de G' sobre $\mathbb{R}^2$ és propiament discontínua i que el quocient és el tor.

58. Continuant la notació dels exercicis anteriors, observeu que G' és un subgrup de G. Descreveu la projecció recobridora $X/G' \to X/G$ (cf. Exercici **??**) del tor sobre l'ampolla de Klein.

59. *Elevació de aplicacions arbitràries.* Sigui $p : Y \to X$ una projecció recobridora, sigui $f : A \to X$ una aplicació contínua amb A arc-connex. Suposeu que g_1 i g_2 són dues elevacions de f per a Y i que existeix un punt $a \in A$ tal que $g_1(a) = g_2(a)$. Demostreu que $g_1 = g_2$.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[ur, dashed, "g_1 = g_2"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Pista: per a verificar que g_1 i g_2 tenen la mateixa valor en un punt $z \in A$, agafeu un camí de a a z i utilitzeu la unicitat de l'elevacions de camins.

Tranformacions de cobertes. Sigui $p : Y \to X$ una projecció recobridora. Una *tranformació de cobertes* (deck transformation) és un homeomorfisme $f : Y \to Y$ compatible amb p, en el sentit que comuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Denotem per $\mathrm{Aut}(Y/X)$ el grup de totes les transformacions de cobertes.

60. Mostreu que si $p : Y \to X$ és un recobriment trivial de n fulls, i si X és connex, llavors $\mathrm{Aut}(Y/X) \simeq \mathfrak{S}_n$ (el grup simètric en n lletres).

61. Donat un G-recobriment $Y \to Y/G = X$, demostreu que el homomorfisme de grups natural $G \to \mathrm{Aut}(Y/X)$ és injectiu.

62. Continuant la notació de l'exercici anterior, mostreu que si Y és connex, llavors $G \to \mathrm{Aut}(Y/X)$ és un isomorfisme.

    (Pista: utilitzeu *l'unicidad d'elevació d'aplicacions* (Exercici 59).

63. Demostreu que si $f\colon \widetilde{X} \to X$ i $g\colon \widetilde{Y} \to Y$ són projeccions recobridores llavors $f \times g\colon \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to X \times Y$ també és una projecció recobridora.

64. (i) Mostreu que S^n és un espai recobridor de $\mathbb{R}P^n$.

    (ii) Calculeu el grup fonamental de $\mathbb{R}P^n$.

65. Calculeu, llevat d'isomorfisme, tots els espais recobridors dels espais projectius $\mathbb{R}P^n$ de dimensions $n \geq 2$. (El cas $n = 1$ és tractat en l'exercici següent.)

66. Calculeu, llevat d'isomorfisme, tots els espais recobridors del cercle.

67. Sigui X un espai connex amb $\pi(X) \simeq \mathbb{Z}$, i sigui $p : \widetilde{X} \to X$ un recobriment de n fulls. Calculeu $\pi(\widetilde{X})$ i calculeu $\pi(p)$.