ÀLGEBRA LINEAL I EQUACIONS DIFERENCIALS

Curs 2002-2003

Química

Nombres complexos

1. Expresar aquests nombres en forma polar:

$$3+4i\,, \qquad 2-i\,, \qquad 3+i\,, \qquad -2-3i\,.$$

2. Siguin $z_1 = 1+2i$, $z_2 = -2-3i$, $z_3 = \frac{1}{2}+i$, $z_4 = -5i$.
   Calculeu:
   a) $z_1 \cdot z_2 - z_3 \cdot z_4$ *b)* $|\bar{z}_1 - \bar{z}_2^2|$
   c) $\frac{z_2}{z_4 - \bar{z}_3}$ *d)* $(z_1 - z_3)^2 \cdot \bar{z}_1$

3. *a)* Calculeu $(1+i)^{29}$, $(-1+i)^{17}$, $(-\sqrt{3}+i)^{13}$.
   b) Expresseu en la forma $x+iy$, on x i y són reals

$$(2+2i)^{12}\,, \qquad (-1-i)^{36}\,, \qquad (-\sqrt{3}+i)^{13}\,, \qquad i^{2002}\,.$$

4. Dibuixeu les següents regions del pla complex:
   (a) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z+3| < 2\}$
   (b) $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |Re\ z| < 1\}$
   (c) $\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} \;:\; 0 < |z-1| \leq |z|\}$
   (d) $\Omega_4 = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| \leq Re\ z + 2\}$

5. Expresseu els següents nombres complexos en la forma $a+bi$:

$$e^{i\pi},\ e^{-1+i\pi/4},\ e^{e^{5+i\pi/2}}, e^{cos(2)}, e^{cos(2)i}.$$

6. Proveu que si z_0 és una arrel del polinomi $P(z)$ amb coeficients reals, aleshores $\overline{z_0}$ també és una arrel de $P(z)$.

7. Calculeu totes les solucions de les següents equacions:

a) $z^2 = i$	*b)* $z^4 = i$	*c)* $z^5 = 1 + i\sqrt{3}$
d) $z^2 + z = -1$	*e)* $z^6 = -1 + i$	*f)* $z^4 + z^2 + 1 = 0$
g) $e^z = 1$	*h)* $e^{2z} = 4$	*i)* $e^{3z-1} = i$

8. Si $1, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n-1}$ són les arrels n-éssimes de la unitat, proveu que

$$(z - \omega_1)(z - \omega_2) \cdots (z - \omega_{n-1}) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$$

9. Trobeu les solucions de

   (a) $z^3 = 1 + \sqrt{3} + i$

   (b) $z^4 = i$

   (c) $z^3 + (i - 1)z^2 + (1 - i)z - 1 = 0.$

   Indicació: En el tercer apartat, una de les arrels és natural.

10. Factoritzeu a $\mathbb{C}[z]$ els següents polinomis:

    (a) $z^4 + 16$

    (b) $z^3 + 27$

    (c) $z^4 - 1$

    (d) $z^6 + z^3 + 4$

    (e) $z^3 + (i - 1)z^2 + (1 - i)z - 1$

    i descomposeu en producte de polinomis irreductibles a coeficients reals en els cassos que sigui posible.

Matrius i sistemes d'equacions lineals

Curs 2002-2003

11. Resoleu els següents sistemes d'equacions:

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl} x-3y+2z & = & 6 \\ 2x+y-5z & = & -4 \\ 2x-13y+13z & = & 28 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y-2z+t+3u & = & 1 \\ 2x-y+2z+2t+6u & = & 2 \\ 3x+2y-4z+3t-9u & = & 3 \end{array}\right.$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ 2x-2y-z & = & 0 \\ x+3y+5z & = & 2 \\ 5x+3y+6z & = & 4 \end{array}\right. \qquad d)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y+az & = & 1 \\ x-y+z & = & 0 \\ x+3y+z & = & b \end{array}\right.$$

$$e)\ \left\{\begin{array}{rcl} ax+y & = & 2 \\ x+y & = & 2a \\ x+y & = & 4 \end{array}\right. \qquad f)\ \left\{\begin{array}{rcl} ay-1+x & = & -z \\ (a-1)z+y-m & = & -mz \\ m+1 & = & x+y+z \end{array}\right.$$

12. Comproveu que el sistema següent és compatible indeterminat i té grau de llibertat 2,

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x-y+z+2t+2u & = & 1 \\ y+z-2u & = & 1 \\ 2x+z+t & = & 1 \\ x-y+t+2u & = & 0 \\ 5x+y+3z+2t-2u & = & 3 \end{array}\right.$$

Sense calcular les solucions explícitament contesteu les següents preguntes:

(a) Quin és el número màxim d'equacions independents?

(b) És la segona equació combinació de les altres? i la quarta?

(c) Hi ha alguna solució amb $x = \frac{2\pi}{\sqrt{11}}$? i amb $y = \frac{2\pi}{\sqrt{11}}$?

13. Trobeu les condicions que han de complir a, b i c per que sigui compatible el sistema

$$\begin{array}{cccl} x & +y & +2z & = a \\ x & & +z & = b \\ 2x & +y & +3z & = c. \end{array}$$

14. Discutiu i resoleu el següent sistema, en funció del valor dels paràmetres que

hi intervenen:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+ay+z & = & 0 \\ 2x-2y+z & = & 0 \\ bx+2y-4z & = & 0 \\ 4x+2y+7z & = & 0 \end{array}\right.$$

15. Estudieu la compatibilitat i solucioneu (si es pot) els sistemes:

$$a)\ \left\{\begin{array}{rrrrl} x & +2y & +3z & +t & =3 \\ x & +4y & +5z & +2t & =2 \\ 2x & +9y & +8z & +3t & =12 \\ 3x & +7y & +7z & +2t & =20 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rrrrrl} 12x & +14y & -15z & +23t & +27u & =5 \\ 16x & +18y & -22z & +29t & +37u & =8 \\ 18x & +20y & -21z & +32t & +41u & =9 \\ 10x & +12y & -16z & +20t & +23u & =4 \end{array}\right.$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{rrrrl} 10x & +23y & +17z & +44t & =25 \\ 15x & +25y & +26z & +69t & =40 \\ 25x & +57y & +42z & +108t & =65 \\ 30x & +69y & +51z & +133t & =95 \end{array}\right.$$

16. Digueu per a quins valors de λ el següent sistema té solucions no trivials.

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\lambda-3)x+y & = & 0 \\ x+(\lambda-3)y & = & 0 \end{array}\right.$$

17. Estudieu la compatibilitat segons el valor de λ i solucioneu (si es pot) els sistemes:

$$a)\ \left\{\begin{array}{rrrrl} 5x & -3y & +2z & +4t & =3 \\ 4x & -2y & +3z & +7t & =1 \\ 8x & -6y & -z & -5t & =9 \\ 7x & -3y & +7z & +17t & =\lambda \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rrrrrl} 3x & +2y & +5z & +3t & +27u & =3 \\ 2x & +3y & +6z & +8t & +37u & =5 \\ x & -6y & -9z & -20t & +41u & =-11 \\ 4x & +y & +4z & +\lambda t & +23u & =2 \end{array}\right.$$

18. Calculeu els següents determinants:

$$\left|\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right|, \qquad \left|\begin{array}{cccc} a & a & a & a \\ b & b & b & a \\ c & c & b & a \\ d & c & b & a \end{array}\right|,$$

$$\left|\begin{array}{rrrrr} 0 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right|, \qquad \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{array}\right|$$

19. Calculeu la inversa per les que es pugui, de les matrius:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

amb $a_1, a_2, a_3, a_4, a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

20. Resoleu les següents equacions matricials,

(a) $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Espais vectorials

Curs 2002-2003

21. Sigui $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^m, S = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\}$. Quan és S un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$?

22. Dieu quins dels següents subconjunts de $\mathbb{R}^3$ són subespais vectorials.

    (a) $\{(x, y, z)|x, y, z \in Z\}$

    (b) $\{(x, y, z)|xyz = 0\}$

    (c) $\{(x, y, z)|2x + 4y - 3z = 2\}$

    (d) $\{(x, y, z)|x \geq 0\}$

23. Determineu quins dels següents subconjunts són subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$.

    (a) $\{a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)|\alpha_1 = 2\alpha_2\}$

    (b) $\left\{a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\right\}$

24. Sigui $\mathbf{P}[\mathbb{R}]$ el conjunt de polinomis a coeficients a $\mathbb{R}$. Fixat $a \in \mathbb{R}$, dieu si són subespais de $\mathbf{P}[\mathbb{R}]$ els subconjunts següents

    (a) $V = \{f(x) \in \mathbf{P}[\mathbb{R}]|f(a) = 0\}$

    (b) $V = \{f(x) \in \mathbf{P}[\mathbb{R}]|f(a) = 1\}$

25. Siguin u, v, w tres vectors linealment independents d'un espai vectorial E. Demostreu que $u + v, u + w, v + w$ són linealment independents.

26. Per a quins valors de λ el vector b és combinació lineal dels a_i?

    (a) $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$, $a_3 = (1, -6, 1)$; $b = (7, -2, \lambda)$.

    (b) $a_1 = (4, 4, 3)$, $a_2 = (7, 2, 1)$, $a_3 = (4, 1, 6)$; $b = (5, 9, \lambda)$.

27. Completeu els següents conjunts per a obtenir bases de $\mathbb{R}^4$.

    (a) $(2, 1, 4, 3), (2, 1, 2, 0)$.

    (b) $(0, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 4), (0, 0, 0, 1)$.

    (c) $(0, 2, 1, 0), (0, 1, 2, 0)$.

28. Trobeu la dimensió i una base de cadascun dels següents subespais vectorials sobre $\mathbb{R}$:

(a) $E_1 =< (1,0,-1),\ (-2,0,3),\ (3,1,0),\ (0,0,1) >$

(b) $E_2 =< (1,0,2,3),\ (2,0,4,1),\ (1,-1,0,0) >$

(c) $E_3 = \{(x,y,z,t)\,|\,x = y - 3z,\ \ z = t\}$

(d) $E_4 = \{(x,y,z)\,|\,x = y = z\}$

29. Doneu la dimensió i una base de E, F, $E+F$ i $E\cap F$ pels casos:

(a) Els subespais de $\mathbb{R}^3$

$$E =< (1,1,-1),(2,0,-1),(0,2,-1) >,\ F =< (1,0,-1),(2,3,0),(4,3,-2) >$$

(b) Els subespais de $\mathbb{R}^4$

$$E = \{(x,y,z,t)\,|\,x+y+2z = 0, 3y+3z+t = 0, 2x-y-t = 0\}\,,$$

$$F = \{(0,y,z,t)\,|\,y+z+t = 0\}$$

(c) Els subespais de $\mathbb{R}^4$

$$E =< (0,0,0,1),\ (1,-1,0,1),\ (-1,1,0,3),\ (0,0,1,7) >,$$

$$F =< (1,0,-1,1),\ (1,1,0,9),\ (2,1,-1,10) >$$

Discutiu, en cada cas, si E i F estan en suma directa.

Aplicacions lineals i diagonalització

Curs 2002-2003

30. Quina de les següents aplicacions entre $\mathbb{R}$-espais vectorials són lineals? Per les que ho siguin doneu la matriu associada en la base canònica.

    (a) De $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ l'aplicació $f(x) = x^2$

    (b) De $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$ les aplicacions $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $h(x,y,z) = x+1-y$

    (c) De $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^4$ l'aplicació $f(x,y) = (x-y, 2x+1, y-3, 1)$

31. Es pot trobar una aplicació lineal F de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $F(1,-1,1) = (1,0)$ i $F(1,1,1) = (0,1)$? I una de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $F(1,-1) = (1,0)$, $F(2,-1) = (0,1)$ i $F(-3,2) = (1,1)$?

32. Dieu si són injectives, exhaustives o bijectives les següents aplicacions:

    (a) $f(x,y,z) = (-x+y, y+z, 2x+y+z, x+y, 3x+y+z)$

    (b) $f(x,y,z) = (x+y, y+z, z)$

33. Trobeu una base del nucli i una de la imatge de les aplicacions lineals,

    (a) Associada a la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

    (b) Associada a la matriu $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

    (c) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longrightarrow & (x-2y, 3x+y, 4y) \end{array}$

    (d) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (x, x-z, 4z, 0) \end{array}$

34. Siguin $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ les aplicacions lineals definides per:

    $$f(x,y) = (2x-y, x+y, 3x) \qquad g(x,y) = (x+y+z, 3x-y+2z),$$

    (a) Doneu les matrius de f, g, $f \circ g$, $g \circ f$, en les bases canòniques.

    (b) Siguin $e_1 = (2,1)$, $e_2 = (1,0)$, $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,-1,0)$, $v_1 = (1,-1,1)$. Vegeu que $B_1 = \{e_1, e_2\}$ i $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ són una base de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, respectivament. Calculeu $\mathrm{MAT}(f, B_1, B_2)$, $\mathrm{MAT}(g, B_2, B_1)$, $\mathrm{MAT}(g \circ f, B_1)$, $\mathrm{MAT}(f \circ g, B_2)$.

35. Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ definit per la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 2 & 1 & -1/2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Vegeu si f és isomorfisme.

(b) Calculeu la matriu associada a f^{-1}.

(c) Calculeu la antiimatge per f del vector $(1, 2, -1, 0)$.

36. Sigui $E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid c = a + b \right\}$. Considereu l'endomorfisme de E donat per:

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 3c + 3a \\ -2a - b & a - b + 3c \end{pmatrix}.$$

(a) Trobeu una base de E i la matriu de f respecte a aquesta base.

(b) Trobeu bases del nucli i de la imatge de f.

37. Calculeu els valors propis i els corresponents vectors propis de les següents matrius:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad (b) \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

38. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

calculeu A^{1000}.

39. Estudieu la diagonalització sobre un espai vectorial real dels endomorfismes representats per les següents matrius, referides a la base canònica:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 3 & 17 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad d) \begin{pmatrix} 6 & -7 & -20 \\ 0 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad f) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

40. Estudieu si diagonalitza la matriu associada al l'endomorfisme següent,

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}$$

Si diagonalitza, trobeu en quina base la matriu és diagonal.

41. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal de matriu associada $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

    (a) Trobeu una base de $\mathbb{R}^2$ en la que la matriu de f sigui diagonal.

    (b) Trobeu A^{1001}.

42. Considereu l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que ve donat per:

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y - z - t, x - y + z - t, x - y - z + t)$$

Calculeu $f^n(1, 0, -1, -1)$.

43. Sigui E un espai vectorial i $f : E \longrightarrow E$ una aplicació lineal. Si v és un vector propi de valor propi 1, calculeu $f^2(v) - 3f(v) + 2v$.

44. Busqueu els valors propis de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculeu els vectors propis de A i estudieu si la matriu diagonalitza.

45. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

    (a) Calculeu els seus valors propis i els seus vectors propis.

    (b) Decidiu si A és diagonalitzable.

    (c) Calculeu la matriu A^{100}.

46. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

    (a) Calculeu el polinomi característic i els valors propis.

(b) Calculeu els vectors propis i decidiu si diagonalitza.

(c) Calculeu la matriu $(A+2I)^n$ per a tot $n \geq 1$.

47. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal i

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

la seva matriu associada en la base canònica:

(a) Trobeu els valors propis de la matriu A

(b) Trobeu una base en que la matriu A diagonalitzi.

(c) Sigui $v = (4, 4, -7)$ (en la base canònica). Calculeu $f^{20}(v)$ i $f^{31}(v)$.