

Àlgebra lineal i Equacions diferencials

Curs 2002-2003

Equacions diferencials

48. Resoleu les següents equacions diferencials de variables separades:

(a) $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$

(b) $(y - a)dx + x^2dy = 0$

(c) $\frac{dx}{dy} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$

(d) $d\rho + \rho \tan(\theta)d\theta = 0$

(e) $(yx^2 - y)dy + (y + 1)^2dx = 0$

(f) $x\sqrt{1 - y^2}dx = dy$

49. Resoleu les següents equacions diferencials lineals:

(a) $y' - \frac{y}{x} = x$

(b) $y' + 2\frac{y}{x} = x^3$

(c) $xy' + y - e^x = 0, y(0) = 1$

(d) $x^2y' + xy = 1$

(e) $(x + 4y^2)dy + 2ydx = 0$

(f) $(1 - x^3)y' = 3x^2y$

50. Resoleu les següents equacions diferencials homogènies:

(a) $y' = \frac{(x-y)y}{x^2}$

(b) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$

(c) $y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, y(2) = 1$

(d) $xy' = y + xe^{y/x}$

51. Resoleu:

(a) $(x + y)y' = x \arctan(y/x)$

(b) $(y' - 2xy)\sqrt{y} = x^3$

(c) $xy' + y = \sin y$

(d) $y' + \frac{y}{x} = -xy^2, y(1) = 0$

(e) $2xyy' - y^2 + x = 0, y(1) = 0$

(f) $(xy^2 + x^2y^2 + 3)dx + x^2ydy = 0$

(g) $x \frac{dy}{dx} - 3y = x^4$

(h) $xy' + y = x^4y^3$

52. Inicialment havia 100 grs d'una substància radioactiva. Després de sis hores la massa va disminuir un 3%. Si la velocitat de desintegració és, en un instant qualsevol, proporcional a la quantitat de substància present en aquest instant, trobeu la quantitat que quedarà després de 24 hores.
53. Segons la llei de refredament de Newton, la velocitat a la que es refreda una substància és proporcional a la diferència de temperatura entre la substància i l'ambient. Si la temperatura ambient és de $30^{\circ}C$ i la substància es refreda de $1000^{\circ}C$ a $70^{\circ}C$ en 15 minuts, en quin moment es trobarà a $40^{\circ}C$?
54. Un estudiant portador d'un virus torna a un campus universitari aïllat que té 1000 estudiants. Si es suposa que la velocitat amb la que el virus es propaga es proporcional al producte entre el nombre d'estudiants contagiats i el de no contagiats, trobeu el nombre d'estudiants contagiats després de sis dies, si a més s'observa que després de quatre dies n'hi ha 50.
55. Resoleu l'equació logística $p' = rp(1 - \frac{p}{k})$, on r i k són constants. Aquesta equació modelitza el creixement d'una població biològica amb limitació d'aliment, r rep el nom de taxa de creixement ideal i k el de capacitat del medi.
56. Les dimensions d'una classe són 12, 8 i 4 metres. Quan s'acaba la classe l'aire conté un 0.12% del seu volum en CO_2 , i es vol renovar de manera que al cap de 10 minuts quedi només un 0.06% de CO_2 . Calculeu quants metres cúbics per minut cal introduir de l'exterior, si aquest aire que introduïm conté un 0.04% de CO_2 .
57. El fons d'un dipòsit de 300 l és cobert de sal. Si la velocitat de dissolució de la sal és proporcional a la diferència entre la concentració a l'instant considerat i la concentració de la dissolució saturada (1 Kg de sap per 3 l), i si la quantitat d'aigua pura que tenim dissol 1/3 Kg de sal per minut, trobeu la quantitat de sal que contindrà la dissolució al cap d'una hora.
58. En un dipòsit que conté 200 l d'aigua es dissolen 30 grs de sal. Posteriorment es bombeja una dissolució d'aigua i sal, amb una concentració de 1 gr de sal per litre d'aigua, amb una velocitat de 4 l per minut. A la vegada la solució, adequadament barrejada, es bombeja fora amb la mateixa velocitat. Trobeu el número de grams de sal que hi ha al dipòsit en un instant qualsevol.
59. Es bombeja cervesa amb un contingut d'alcohol del 6% per litre dins d'un dipòsit que inicialment conté 400 l de cervesa amb un 3% d'alcohol. La cervesa es bombeja

a l'interior amb una velocitat de 3 l per minut, mentre que el líquid barrejat es bombeja a l'exterior amb una velocitat de 4 l per minut. Trobeu el número de litres d'alcohol que hi han dins del dipòsit en un instant qualsevol. Quin és el percentatge d'alcohol que hi ha en el dipòsit després de 60 minuts? Quan trigarà a buidar-se el dipòsit?

60. Dues substàncies químiques A i B es combinen per formar una substància química C. La velocitat de la reacció és proporcional al producte de les quantitats instantànies de A i B que no s'han convertit en la substància C. Inicialment hi han 40 grs d'A i 50 grs de B i per cada gram de B es fan servir 2 grs d'A. S'observa que es formen 10 grs de C en 5 minuts. Quina és la quantitat que es formarà en 20 minuts? Quina és la quantitat límit de C després de molt temps? Quina és la quantitat d'A i de B que quedarà després de molt temps?

61. Per raons òbvies, la sala de dissecció d'un forense es manté freda a una temperatura constant de $5^{\circ}C$. Mentre es trobava realitzant l'autòpsia d'una víctima d'un assassinat, el mateix forense es assassinat, i el cos de la víctima robat. A les 10 del matí l'ajudant del forense troba el seu cadàver a una temperatura de $23^{\circ}C$. A les 12 del matí la seva temperatura és de $18.5^{\circ}C$. Si suposem que el forense tenia en vida la temperatura normal de $37^{\circ}C$, a quina hora va ser assassinat?

62. Solucioneu les següents equacions:

$$(a) \quad y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(\pi/2) = 1, \quad y'(\pi/2) = 0$$

$$(b) \quad y^{(4)} + 2y'' + y = 0, \quad y(0) = y'(\pi/2) = 0, \quad y'(0) = y(\pi/2) = 1$$

63. Doneu la solució general de les equacions següents:

$$(a) \quad y'' - 4y' + 5y = e^{2x}(\cos x + 3 \sin x) \qquad (b) \quad y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$$

$$(c) \quad y'' - 2y' = x^2 + 2x - 1 \qquad (d) \quad y'' - y' - 2y = 2e^{3x}$$

64. Resoleu els sistemes d'equacions següents:

$$(a) \quad \begin{cases} x' &= -2x + y \\ y' &= y - 2x \\ z' &= -2z \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} x' &= -y + 6t \\ y' &= 4x - 2 \end{cases}$$