Pràctica de Teoria de Galois

Curs 97-98

Números trascendents sobre $\mathbb{Q}$

- **Objectiu.**
  L'objectiu d'aquesta pràctica es demostrar que infinits nombres que podem expressar de forma analitica són nombres trascendents suposant cert un teorema de Lindemann-Weierstrass.

- **Trobem nombres que són trascendents sobre $\mathbb{Q}$**
  En tota aquesta pràctica suposarem que coneixem el següent resultat de l'any 1895

  Teorema 1 (Lindemann-Weierstrauss). *Siguin $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nombres algebraics sobre $\mathbb{Q}$ diferents. Llavors les exponencials $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ compleixen que no hi ha cap polinomi no nul $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ complint $f(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}) = 0$.*

  Per una prova de l'anterior resultat podeu consultar la pagina 135 del llibre "Fields and Galois Theory" de P.Morandi, GTM 167.
  Recordem que sabeu que π i e són nombres trascendents. El primer que va provar que e era trascendent va ser Hermite l'any 1873. π va ser demostrat que era trascendent per Lindemann l'any 1882.
  Proveu vosaltres, utilitzant l'anterior teorema que:

  Exercici 2. *Els nombres π i e són nombres trascendents sobre $\mathbb{Q}$.*

  Anem a construir altres nombres trascendents.

  Exercici 3. *Proveu que si u és un nombre algebraic no zero, llavors $sin(u)$ i $cos(u)$ són nombres trascendents. (En particular tenim que $sin(1), cos(3), ..., sin(\sqrt{2}), \ldots$) són nombres trascendents).*

  Intentem veure també que les funcions trigonomètriques aplicades a un nombre algebraic donen nombres trascendents. Intenteu provar:

  Exercici 4. *Si β és un nombre trascendent sobre un cos K arbitrari, llavors β^{-1} és trascendent sobre K. Igualment si α és un nombre algebraic sobre K no nul, també és algebraic α^{-1}.*

  Aplicant l'anterior exercici obseveu que tenim:

  Corol.lari 5. *Si u és un nombre algebraic no nul sobre $\mathbb{Q}$, llavors $sec(u)$ i $cosec(u)$ són trascendents sobre $\mathbb{Q}$.*

  Apliquem igualment l'anterior exercici per provar:

  Exercici 6. *Si u és un nombre algebraic no nul sobre $\mathbb{Q}$, llavors $tan(u)$ i $cotan(u)$ són nombres trascendents sobre $\mathbb{Q}$.*

  Veiem més exemples de nombres trascendents.

  Exercici 7. *Sigui $u \neq 1$ un nombre algebraic no zero i f una de les funcions trigonomètriques inverses, proveu que el valor complex de $f(u)$ és trascendental sobre $\mathbb{Q}$.*

  Finalment donem un altre exemple de nombres algebraics.

  Exercici 8. *Sigui $u \neq 1$ un nombre algebraic qualsevol proveu que $log(u)$ és trascendental sobre $\mathbb{Q}$.*

- **És π algebraic sobre $\mathbb{Q}(e)$ Hem demostrat suposant el teorema de Lindemann-Weierstass que els nombres π i e són trascendents sobre $\mathbb{Q}$. És un problema obert saber si el nombre π és trascendent sobre $\mathbb{Q}(e)$ o si el nombre e és trascendent sobre $\mathbb{Q}(\pi)$. Per provar això caldria veure que no existeix un polinomi no nul complint $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ amb $f(e, \pi) = 0$.**

Definició 9. *Sigui K una extensió sobre un cos F. Triem $a_1, \ldots, a_m \in K$. Diem que $a_1, \ldots, a_m$ són algebraicament independents sobre F si tot polinomi $f \in F[x_1, \ldots, x_m]$ complint $f(a_1, \ldots, a_m) = 0$ llavors $f = 0$.*

Reformulant el nostre problema obert amb el llenguatge de la definició, la pregunta oberta és demostrar si els nombres π, e són algebraicament independents sobre $\mathbb{Q}$.
En aquest camp matemàtic hi ha la següent conjectura:

Conjectura 10 (Schanuel). *Si $y_1, \ldots, y_m$ són nombres complexos $\mathbb{Q}$-independents, llavors com a mínim m dels nombres $y_1, \ldots, y_m, e^{y_1}, \ldots, e^{y_m}$ són algebraicament independents sobre $\mathbb{Q}$.*

Llavors si suposem que l'anterior conjectura sigui certa llavors proveu llavors

Exercici 11. *Suposant que fos certa la conjectura de Schanuel proveu que π és trascendent sobre $\mathbb{Q}(e)$, i que e és trascendent sobre $\mathbb{Q}(\pi)$.*

Nota 1. *Es deixa com exercici suplementari al lector veure que π és trascendent sobre $\mathbb{Q}(e)$ és equivalent a e trascendent sobre $\mathbb{Q}(\pi)$ i equivalent a que e, π siguin algebraicament independents sobre $\mathbb{Q}$.*

- **El problema clàssic de la quadratura del cercle Un problema dels temps de la Grècia clàssica, era:**
  Es posible construir un quadrat d'àrea π? És a dir sempre triant com una longitut fixada com a 1 podem construir en regla i compas el cercle de radi 1, el problema es si podem construir el quadrat d'àrea π, és a dir si per regla i compàs podem trobar una longitut de $\sqrt{\pi}$, el fet de poder aconseguir-ho s'anomenava la quadratura del cercle.
  Veureu a teoria que per construir un valor α mitjançant regla i compas és necessari i suficient que l'extensió $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ sigui de grau una potència de 2 i algebraica. Utilitzant això proveu:

  Exercici 12. *És impossible la quadratura del cercle.*

- **Una prova on el nombre e és trascendent Anem a fer aquí la prova de la trascendència del nombre e sense utilitzar el resultat de Lindemann-Weierstrass. No obstant la prova que farem segueix en el cas particular per e les traces que se segueixen per la prova del teorema de Lindemann-Weierstrass.**
  Suposeu que e no fos trascendent sobre $\mathbb{Q}$. Això ens diu que tenim:

$$a_m e^m + \ldots + a_1 e + a_0 = 0$$

  on podem triar els $a_i \in \mathbb{Z}$ complint que $a_0 \neq 0$.
  Definim:

$$f(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \ldots (x-m)^p}{(p-1)!}$$

  on p denota un nombre primer arbitrari. Observem que $deg(f) = mp + p - 1$. Definim:

$$F(X) = f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(mp+p-1)}(x)$$

  Observeu que $f^{(mp+p)} = 0$ i que $\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}f(x)$.
  D'aquí obtenim per cada j

$$a_j \int_0^j e^{-x} f(x)dx = a_j F(0) - a_j e^{-j} F(j)$$

multiplicant per e^j i sumant sobre $j=0,1,\ldots,m$ obtenim

$$\sum_{j=0}^{m}(a_je^j\int_0^j e^{-x}f(x)dx)=F(0)\sum_{j=0}^{m}a_je^j-\sum_{j=0}^{m}a_jF(j)=-\sum_{j=0}^{m}a_j\sum_{i=0}^{mp+p-1}f^{(i)}(j) \tag{1}$$

del fet que $\sum_{j=0}^{m}a_je^j=0$.
Proveu llavors que $f^{(i)}(j)$ són enters, i és divisible per p a excepció per $j=0$ i $i=p-1$ i llavors $f^{(p-1)}(0)=(-1)^p\ldots(-m)^p$.
Llavors tenim que el valor de (??) és

$$Kp+a_0(-1)^p\ldots(-m)^p$$

per algun $K\in\mathbb{Z}$. Triant $p>max(m,|a_0|)$ l'enter $Kp+a_0(-1)^p\ldots(-m)^p$ no és divisible per p.
Per tant pels p suficientment grans el valor de (??) no és zero.
Estimem ara el valor de la integral. Observem que per $0\leq x\leq m$ llavors

$$|f(x)|\leq\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}$$

on tenim llavors

$$|\sum_{j=0}^{m}a_je^j\int_0^j e^{-x}f(x)dx|\leq\sum_{j=0}^{m}|a_je^j|\int_0^j\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}dx$$

$$\leq\sum_{j=0}^{m}|a_je^j|j\frac{m^{pm+p-1}}{(p-1)!}$$

compreveu que l'última expressió tendeix a 0 quan p tendeix a ∞, en contradicció amb el fet que hem vist que aquest valor és no nul pels p suficientment grans, provant així:

Teorema 13 (Hermite). *El nombre real e és trascendent sobre $\mathbb{Q}$.*