Fonaments d'Àlgebra

Llista 9 de Problemes

Àtoms, primers i factorització única. Curs 2001/02, 1er semestre

1. Proveu que l'anell $\mathbb{Z}[i]/(1+3i)$ és isomorf a l'anell $\mathbb{Z}/(10)$.

2. Considerem el subanell $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbb{C}$. Proveu que $(2+\sqrt{5})$, $(2-\sqrt{-5})$ i 3 són àtoms per a aquest anell. Proveu llavors que $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ no és un DFU.

3. Sigui un cos imaginari quadràtic $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ amb $d < 0$ un enter lliure de quadrats. Considerem l'anell R_d següent:

$$R_d := \begin{cases} \{n + m\sqrt{d} | n, m \in \mathbb{Z}\} & si \quad d \not\equiv 1 (mod 4) \\ \{u + v\sqrt{d} | u, v \in \mathbb{Z} \ o \ u, v \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\} & si \quad d \equiv 1 (mod 4) \end{cases}$$

Definim amb l'anell R_d la norma N per:

$$N : R_d \to \mathbb{N} \cup \{0\}, a + b\sqrt{d} \mapsto (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - db^2 \geq 0.$$

   (a) Proveu que $\forall \alpha, \beta \in R_d$ llavors $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

   (b) Un element $\alpha \in R_d$ és una unitat si i només si $N(\alpha) = 1$.

   (c) Les unitats de R_d són $\{\pm 1\}$ a excepció de per $d = -1$ i $d = -3$. Si $d = -1$, les unitats són $\{\pm 1, \pm i\}$ i si $d = -3$ les unitats són les poténcies de $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$ una 6-ésima arrel primitiva de 1.

   (d) Proveu que l'únic d amb $d \equiv 3 (mod\ 4)$ tal que R_d és un DFU, és $d = -1$.
   Indicació: $1 - d = 2(\frac{1-d}{2})$ i $1 - d = (1 + \sqrt{d})(1 - \sqrt{d})$ i veure 2 és irreductible.

4. Sigui D un DFU. Proveu llavors que D és un domini tal que tot element no zero i no unitat descompon en producte d'àtoms i que tot àtom és primer.

5. Sigui D un DIP que no sigui cos. Llavors proveu que $\forall p \in D$ són equivalents:

   (a) p és primer,

   (b) pD és un ideal primer diferent del ideal zero,

(c) pD és un ideal maximal.

6. Proveu que en un domini D, $\forall p \in D$ són equivalents:

   (a) p és àtom,

   (b) pD és un ideal diferent del zero i l'impropi i
   $\forall q \; pD \subseteq qD \subseteq D \Rightarrow qD = pD$ ó $qD = D$.

7. Considerem la notació de l'exercici 3.

   (a) Suposem que $d \equiv 2 \; o \; 3 (mod \; 4)$. Demostreu que un primer p de $\mathbb{Z}$ es manté primer en R_d si i només si el polinomi $x^2 - d$ és irreductible a $\mathbb{F}_p[x]$.

   (b) Suposem ara que $d \equiv 1 (mod \; 4)$. Llavors p és manté primer en R_d si i nomes si el polinomi $x^2 - x + \frac{1}{4}(1-d)$ és irreductible sobre $\mathbb{F}_p$.

8. Sigui R un domini i I un ideal de R. Recordeu que hi ha una bijecció entre els ideals de R que contenen I i els ideals de R/I.
   Restringim-nos ara amb $R = R_d$.

   (a) Proveu que donat un ideal I de R_d no trivial llavors R_d/I és finit. Conclou llavors que el nombre d'ideals de R_d que contenen I és finit.

   (b) Proveu que si $\mathfrak{p}$ és un ideal primer no trivial de R_d, llavors $R_d/\mathfrak{p}$ és un cos.
   Indicació: un domini d'integritat amb un nombre finit d'elements és un cos.

9. **Exercici complementari** Aceptem el següent resultat (veieu el següent exercici suplementari):

   Proposició 1 *(a) Siguin* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ *ideals no zero de* R_d*. Si* $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}\mathfrak{c}$ *llavors* $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{c}$*. A més, si* $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}$ *llavors* $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$*.*

   (b) Si $\mathfrak{a}$,$\mathfrak{b}$ *són ideals no zero de* R_d*, llavors* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ *si i només si* $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}$ *per algun ideal* $\mathfrak{c}$ *de* R_d*.*

   Utilitzant aquest resultat, proveu

   (a) * Tot ideal no zero i diferent de l'impropi de R_d és el producte d'ideals primers de R_d. Aquesta factorització és única, llevat d'ordre dels factors.
   Indicació: Donat un ideal el podem incloure en un maximal que és un ideal que conté l'ideal inicial i que en particular un ideal maximal és primer.

   (b) * Proveu que R_d és un DFU si i només si és un DIP.
   Indicació: Veieu que un ideal primer està generat per un element irreductible de l'ideal, el qual defineix un ideal maximal.

10. **Exercici suplementari**

    (a) * Sigui $\mathfrak{a}$ un ideal de R_d arbitrari. Proveu que existeix un enter n on

    $$\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}} = (n)$$

    on $\bar{\mathfrak{a}} := \{u + v\sqrt{d} \in R_d |\ u, v \in \mathbb{Q},\ i\ u - v\sqrt{d} \in \mathfrak{a}\}$.
    Indicació: Aquest ideal el podem pensar com una xarxa a $\mathbb{R}^2$ i per tant generada per dos elements.

    (b) Proveu la proposició 1.