

Fonaments d'Àlgebra

Llista 3 de Problemes

Repàs de Grups. Curs 2001/02, 1er semestre

1. Sigui A un grup (no necessàriament abelià). Sigui $(B_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ una família de subgrups de A . Es defineix la intersecció per,

$$\cap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda := \{a \in A | \forall \lambda \in \Lambda, a \in B_\lambda\}.$$

- (a) Proveu que per a cada λ , $\cap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \subseteq B_\lambda$.
- (b) Proveu que $\cap B_\lambda$ és el subgrup més gran de A que està contingut en cada B_λ .
- (c) Quin subgrup de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ és $\cap_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} (n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z})/m\mathbb{Z}$ on m és un natural fixat?
2. Sigui A un grup abelià additiu. Sigui $(B_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ una família de subgrups de A . Definim la suma per:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda := \{a \in A | \exists (b_\lambda) \in \prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \text{ t.q. } \forall \lambda \in \Lambda, b_\lambda = 0 \text{ i } a = \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda\}.$$

Proveu que,

- (a) és un subgrup de A .
- (b) per a cada $\lambda \in \Lambda$, $B_\lambda \subseteq \sum_{\lambda} B_\lambda$.
- (c) $\sum_{\lambda} B_\lambda$ és el subgrup més petit de A que conté cada B_λ .
- (d) $\mathbb{Q} = \sum_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} \frac{1}{n}\mathbb{Z}$.
3. En la notació de l'exercici anterior,

- (a) trobeu un exemple on

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda.$$

- (b) Proveu

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \subseteq \sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda.$$

- (c) Veieu que en general $\sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \neq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$.
- (d) És en general $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ un subgrup de A ?