Fonaments d'Àlgebra

Llista 1 de Problemes

Repàs de Grups. Curs 2001/02, 1er semestre

1. Sigui G un grup i H un subgrup de G i $g \in G$. Proveu
   (a) Si $g \in H$, llavors $gH = H$.
   (b) Si $gH = H$ llavors $g \in H$.

2. Sigui H un subgrup de G. Considerem el conjunt G/H. Proveu que $\forall$ $S \in G/H$ i $\forall g \in G$,
$$S = gH \Leftrightarrow g \in S.$$

3. Sigui $H \leq G$. Proveu que les següents afirmacions son totes equivalents,
   (a) $H \trianglelefteq G$.
   (b) $\forall g \in G$, $g^{-1}Hg \subseteq H$.
   (c) $\forall g \in G$, $g^{-1}Hg = H$.
   (d) $\forall g \in G$, $Hg = gH$.
   (e) $H \setminus G = G/H$.

4. Proveu per un grup G, que les següents afirmacions són equivalents:
   (a) G és un grup abelià.
   (b) $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ és un morfisme de grups.
   (c) $G \to G$, $x \mapsto x^2$ és un morfisme de grups.

5. Sigui G un grup, considereu $G' := \{x^2 | x \in G\}$. Proveu:
   (a) Suposem que G és un grup abelià. Llavors G' és un subgrup de G.
   (b) Sigui $H \leq G$ tal que $H \supseteq G'$. Proveu que H és un subgrup normal i que G/H és un grup abelià.
   (c) Calculeu G' i G/G' en els casos següents en cas de ser posible: $G = \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{Z}/(n)$ $n \geq 1$ enter i $G = S_3$.

6. Sigui G un grup. Considerem $g \in G$. Es defineix el centralitzador de g en G per

$$C_g(G) := \{h \in G | hg = gh\}.$$

   (a) És un subgrup? Justifica la resposta.
   (b) Proveu $C_g(G) = C_{g^{-1}}(G)$.

7. Considereu $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ amb la operació suma. Proveu que és un grup abelià no finit.

8. Doneu tots els morfismes $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}/14 \to \mathbb{Z}/11$.