Fonaments d'Àlgebra

Llista 13 de Problemes

Mòduls. Classificació de mòduls f.g..

Curs 2001/02, 1er semestre

1. Sigui M un R-mòdul. Proveu,
$$\emptyset \; és \;\; R - base \; de \; M \Leftrightarrow M = 0.$$

2. Sigui ${}_RM$. Siguin $n \geq 0$ i $m_1, \dots, m_n \in M$. Aleshores,
$$m_1, \dots, m_n \; és \; R - base \; de \; M \Leftrightarrow \begin{array}{c} M = \oplus_{i=1}^n Rm_i \\ i \\ \forall 1 \leq i \leq n \;\; l.ann_R(m_i) = 0 \end{array}.$$

3. És cert per $R = 0$ que $\forall m, n \in \mathbb{N}$ $R^n \cong R^m$ llavors $m = n$?

4. Sigui R un anell commutatiu no zero. Sigui $m, n \in \mathbb{N}$. Si existeixen matrius $A \in {}^mR^n$, $B \in {}^nR^m$ tal que $AB = I_m$ i $BA = I_n$ aleshores $m = n$.

   Què succeeix si $R = 0$?

5. Sigui ${}_RM$ R-mòdul R-lliure f.g. amb R-base $b_1, \dots, b_s$ per algun $s \in \mathbb{N}$. Sigui ${}_RN$. $\forall n_1, \dots, n_s \in N$, $\exists! f : M \to N$ R-lineal tal que $f(b_i) = n_i$ per $i = 1, \dots, s$.

6. Sigui ${}_RM$. Siguin $a_1, \dots, a_s$ i $b_1, \dots, b_t$ dues famílies finites en M. Aleshores
   (a) $\sum_{i=1}^s Ra_i \subseteq \sum_{j=1}^t Rb_j \Leftrightarrow \exists X = (x_{i,j}) \in {}^sR^t \; tal \; que \; (x_{i,j})(b_j) = (a_i)$.
   (b) Si a més $b_1, \dots, b_t$ R-base en M i X invertible aleshores $a_1, \dots, a_s$ és R-base de M.

7. Sigui $\varphi : V \to W$ un morfisme de R-mòduls. Proveu que si el nucli i la imatge de φ son R-mòduls finit generats llavors V també ho és.

8. Diem que un anell commutatiu R s'anomena noetherià si tot ideal de R és finitament generat[1]. (Observeu que tot DIP és noetherià). Suposem en aquest problema que R és un anell noetherià. Sigui V un mòdul finit generat sobre R. Llavors tot submodul de V és finit generat.
   Indicació: reduir-vos al cas $V = R^m$ i proveu-ho per inducció en m.

9. Sigui V el $\mathbb{Z}[i]$-mòdul generat pels elements v_1, v_2 subjectes a les relacions $(1+i)v_1 + (2-i)v_2 = 0$, $2v_1 + iv_2 = 0$. Escriviu-ho com suma directa de mòduls cíclics.

[1]El teorema de la base de Hilbert ens diu: si R un anell noetherià llavors $R[x]$ també és noetherià. Observeu que acceptant aquest resultat obtenim que tot ideal de $K[x_1, \dots, x_n]$ està generat per un nombre finit d'elements, on K denota un cos, resultat clau per l'estudi de varietats algebraiques.

10. Proveu que son “el mateix”:

    (a) R-mòduls, on $R = \mathbb{Z}[i]$

    (b) grups abelians V, junt amb un endomorfisme $\varphi : V \to V$ complint $\varphi \circ \varphi = -id$.

11. Sigui $R = K[x]$ amb K un cos, i sigui $V = R/(x^3 + 3x + 2)$ és a dir un R-mòdul generat per un element v subjecte a la relació $(x^3+3x+2)v = 0$. Eligeix una base per V com a K-espai vectorial, i troba una matriu de la operació multiplicar per x amb respecte aquesta base.

12. Siguin v_1, v_2 generadors de un modul M sobre l'anell $\mathbb{C}[x, y]$ (no DIP!), subjectes a les relacions

$$(x^2 + 1)v_1 + (x^2y + x + y)v_2 = 0, \; xv_1 + (xy + 1)v_2 = 0.$$

    Intenteu decidir si és lliure o no ho és.

13. Siguin v_1, v_2 generadors de un modul M sobre l'anell $K[x]$, amb K un cos, subjectes a les relacions

$$(x^2 - 3x + 2)v_1 + (x - 1)^3v_2 = 0, \; (x - 2)v_1 + (x^2 - 3x + 2)v_2 = 0.$$

    Doneu-ne la seva expressió mitjançant els factors invariants.

14. Sigui $A \in M_n(K)$ amb K un cos. Sigui M el K-espai vectorial K^n vist com $K[x]$-mòdul amb la acció de x donada per A. Proveu que la forma normal de Smith de $xI_n - A \in M_n(K[x])$ és de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & f_1 & 0 & \dots \\ & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ & & \vdots & & f_m \end{pmatrix}$$

    amb $f_1 | \dots | f_m \in K[x] - K$ mònics si i només si

$$M \cong K[x]/(f_1) \oplus \dots \oplus K[x]/(f_m).$$

15. Trobeu $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tal que $P^{-1}AP$ és de Jordan per

    (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

    (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

    Fer el mateix però per trobar la forma racional enlloc de la de Jordan.

    Trobeu la forma normal de Smith de $xI_n - A$ en $M_n(\mathbb{C}[x])$.