Fonaments d'Àlgebra
Llista 10 de Problemes
Factoritzacions canòniques, $D[X]$ DFU's.
Curs 2001/02, 1er semestre

1. * Proveu que un conjunt de representants d'àtoms (CRA) de l'anell $\mathbb{Z}[i]$ és $\Gamma = \{1+i\} \cup \{p \in \mathbb{Z} | p \geq 3, p\ primer,\ p \equiv 3 (mod\ 4)\} \cup \{a \pm bi | a, b \in \mathbb{Z}, a \geq 1,\ a^2 + b^2 = q\ primer\ en\ \mathbb{Z}\ i\ q \equiv 1 (mod\ 4)\}$.

2. Sigui D un DFU i P un CRA de D, tot $d \in D - \{0\}$ s'expressa per
$$d = up_1^{n_1} \dots p_s^{n_s}$$
amb $u \in U(D)$, $s \in \mathbb{N}$, amb $p_i \in P$ diferents i $n_i \in \mathbb{N} - \{0\}$. Proveu, que si $a \sim \prod_{p \in P} p^{n_p}$ i $b \sim \prod_{p \in P} p^{m_p}$ amb $a, b \in D - \{0\}$ i n_p, m_p naturals, llavors:
$$a | b \Leftrightarrow n_p \leq m_p\ \forall p \in P.$$

3. En la notació introduïda en l'exercici anterior, $d \in D - \{0\}$ expressat per
$$up_1^{n_1} \dots p_s^{n_s}.$$
Proveu:
   (a) tret d'associats d té $(n_1 + 1) \dots (n_s + 1)$ divisors.
   (b) si $U(D)$ és finit d té $|U(D)|(n_1 + 1) \dots (n_s + 1)$ divisors.

4. Proveu que en un DFU existeixen el mcd i el mcm. Més precisament, si D és un DFU i P un CRA per a D, i a, b dos elements de $D - \{0\}$, seguint la notació introduida en l'exercici 2, proveu que
$$mcd(a, b) = \prod_{p \in P} p^{min(n_p, m_p)}\ i\ mcm(a, b) = \prod_{p \in P} p^{max(n_p, m_p)}.$$
Com a conseqüència proveu que
$$mcm(a, b) mcd(a, b) \sim ab.$$
A més proveu que a i b són coprimers $\Leftrightarrow min(n_p, m_p) = 0\ \forall p \in P$.

5. (a) Sigui D un DFU, $a \in D$, $f \in D[x]$. Llavors $\underset{\sim}{c}(af) = a\underset{\sim}{c}(f)$ en D. En particular, si f és primitiu $\underset{\sim}{c}(af) = a$.
   (b) Sigui D un anell commutatiu, $d \in D$. Aleshores existeix una projecció canònica $D \to D/dD$, $a \mapsto \overline{a} := a + dD$ i un morfisme d'anells $\varphi : D[x] \to (D/dD)[x]$, $\sum a_n x^n \mapsto \sum \overline{a_n} x^n$. Demostreu que φ és exhaustiva amb nucli $dD[x] = (d)$. Conclou
$$(D[x])/(dD[x]) \cong (D/dD)[x].$$
   (c) Sigui D un domini i $p \in D$. Proveu que p és primer a D sii p és primer a $D[x]$. Proveu que p és irreductible a D sii p és irreductible a $D[x]$.

6. Proveu el criteri de Eisenstein: Sigui $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ amb $a_n \neq 0$ i sigui p un primer de $\mathbb{Z}$. Suposeu que els coeficients de f satisfant les següents condicions:
- p no divideix a_n
- p divideix els altres coeficients: $a_{n-1}, \ldots, a_0$;
- p^2 no divideix a_0.

Proveu llavors que f és irreductible a $\mathbb{Q}[x]$. A més, si f és primitiu, llavors és irreductible a $\mathbb{Z}[x]$.

7. (Criteri Eisenstein a $\mathbb{C}[x,t]$). Sigui $f(t,x)$ un element a $\mathbb{C}[x,t]$ escrit com un polinomi en x on els seus coeficients són polinomis en t:

$$f(t,x) = a_n(t)x^n + \ldots + a_1(t)x + a_0(t).$$

Suposeu

(a) t no divideix cap $a_n(t)$;

(b) t divideix $a_{n-1}(t), \ldots, a_0(t)$;

(c) t^2 no divideix $a_o(t)$.

Llavors $f(t,x)$ és irreductible en l'anell $\mathbb{C}(t)[x]$. A més si f és primitu, volen dir que no té cap factor que és un polinomi sol en la variable t, llavors f és irreductible en $\mathbb{C}[x,t]$.

8. **Exercici complementari**. Dos ideals A, B de un domini R commutatiu, diem que són similars ($A \sim B$) si hi ha elements no zero $\sigma\tau \in R$ complint

$$\sigma A = \tau B.$$

Proveu que és una relació d'equivalència. Les classes d'equivalència per aquesta relació les anomenarem *c*lasses d'ideals i la classe d'ideal corresponent a A l'anotarem $< A >$.

(a) Proveu que un ideal $\mathfrak{b}$ de R és similar a l'ideal impropi R si i nomes si $\mathfrak{b} = \lambda R$ amb $\lambda \in \mathbb{Q}(D)$.

(b) Proveu que la classe $< R >$ consisteix amb els ideals principals de R.

(c) Proveu que les classes d'ideals tenen una operació multiplicació d'ideals:

$$< A >< B >=< AB > .$$

Proveu que té aquesta operació element neutre, que és associativa i que és commutativa.

(d) Prenem $R = R_d$ com en la llista 9. Utilitzant l'exercici suplementari 10 a) proveu que l'anterior operació defineix un grup. S'anomena el grup de classes d'ideal.

(e) Proveu que R_d és un DFU si i nomes si el grup de classes d'ideals de R_d és el grup trivial.