

• **Objectiu.**

L'objectiu d'aquest recull es provar que nombres que els podem expressar de forma analítica són nombres transcendentals suposant cert un teorema de Lindemann o utilitzant tècniques de Liouville.

• **Trobem nombres que són transcendentals sobre \mathbb{Q}**

En tota aquesta pràctica suposarem que coneixem el següent resultat de l'any 1895

Teorema 1 (Lindemann-Weierstrass). *Siguin $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nombres algebraics sobre \mathbb{Q} que són \mathbb{Q} -linealment independents. Llavors les exponencials $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ compleixen que no hi ha cap polinomi no nul $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ complint $f(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}) = 0$.*

Teorema 2 (Lindemann-Weierstrass). *Siguin $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nombres algebraics sobre \mathbb{Q} diferents. Llavors $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ són \mathbb{Q} -linealment independents.*

Proposició 3. *Els dos teoremes anteriors són equivalents.*

Prova. Veiem primer que el teorema 1 implica el teorema 2. Sigui $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nombres algebraics sobre \mathbb{Q} . Denotem per V el \mathbb{Q} -espai vectorial que generen, elegim-ne una base de V . Denotem-la per β_1, \dots, β_r , ($r \leq n$). Suposem que $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ són \mathbb{Q} -dependents. És a dir tenim

$$\sum_{i=1}^n r_i e^{\alpha_i} = 0$$

, $r_i \in \mathbb{Q}$ escrivim $\alpha_i = \sum_{j=1}^r r_{j,i} \beta_j$ tenim llavors que $e^{\alpha_i} = \prod_j (e^{\beta_j})^{r_{j,i}}$ per tant la relació que \mathbb{Q} -dependència ens dona una igualtat canviant $e^{\beta_j} := X_j$

$$\sum_{i=1}^n r_i \left(\prod_{j=1}^r X_j^{r_{j,i}} \right) = 0$$

escrivint el polinomi $f(X_1, \dots, X_r) = \sum_{i=1}^n r_i \left(\prod_{j=1}^r X_j^{r_{j,i}} \right)$ que és no nul tenim com β_1, \dots, β_r son \mathbb{Q} -linealment independent trobem un polinomi no nul f on $f(e^{\beta_1}, \dots, e^{\beta_r}) = 0$ en contradicció amb el teorema 1.

Provem que el t2 implica el t1. Sigui ara $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ \mathbb{Q} -linealment independents. Suposem que existís un polinomi no nul $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ on $f(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}) = 0$. Escrivim

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

considerem llavors els nombres algebraics $\beta_{a_{i_1, \dots, i_n}} = \sum_k i_k \alpha_k$ que són diferents entre ells per ser α_j \mathbb{Q} -linealment independents. Llavors tenim que f defineix una relació \mathbb{Q} -lineal entre les $e^{\beta_{a_{i_1, \dots, i_n}}}$ provant així finalment l'enunciat. \square

Per una prova del teorema de Lindemann podeu consultar la pàgina 135 del llibre "Fields and Galois Theory" de P.Morandi, GTM 167.

Recordem que sabem que π i e són nombres transcendents. El primer que va provar que e era transcendent va ser Hermite l'any 1873. π va ser demostrat que era transcendent per Lindemann l'any 1882.

Utilitzant l'anterior teorema tenim:

Corol.lari 4. *Els nombres π i e són nombres transcendents sobre \mathbb{Q} .*

Prova. Una prova utilitzant el teorema 2 seria: suposem que π fos algebraic sobre \mathbb{Q} . Llavors també ho és $i\pi$. Considerem llavors els dos nombres algebraics sobre \mathbb{Q} : $0, \pi$; aplicant el teorema de Lindemann obtenim llavors que $1 = e^0$ i $e^{\pi i} = -1$ són \mathbb{Q} linealment independents, cosa que és impossible per tant això prova que π és un nombre transcendent.

Suposem ara que e fos algebraic sobre \mathbb{Q} . Això per definició ens diu que existeixen $r_i \in \mathbb{Q}$ on

$$\sum_{i=0}^m r_i e^i = 0$$

Això diu que els nombres e^0, e^1, \dots, e^m són \mathbb{Q} -dependents. Com $0, 1, \dots, m$ són nombres algebraics diferents, utilitzant el teorema de Lindemann-Weierstrass obtenim que e ha de ser transcendent. \square

Anem a construir altres nombres transcendents.

Corol.lari 5. *Proveu que si u és un nombre algebraic no zero, llavors $\sin(u)$ i $\cos(u)$ són nombres transcendents.*

Prova. Recordeu que $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$. Observem que si u és algebraic tenim llavors com que i és algebraic que el nombre iu és algebraic. Suposem que $\sin(u)$ fos algebraic; això vol dir que existeix $g(x) = \sum_{i=0}^r a_i x^i \in \mathbb{Q}[x]$ on $g(\sin(u)) = 0$, observem llavors que això ens diu $g(\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2}) = \sum_{i=0}^r a_r (\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2})^i = \sum_{j=v}^s b_j e^{iju} = 0$ amb $v, s \in \mathbb{Z}$ convenientes ($v < 0, s > 0$) i $b_j \in \mathbb{Q}$, però l'anterior expressió ens dona una \mathbb{Q} -combinació lineal pels e^{iju} i els iju són elements algebraics sobre \mathbb{Q} diferents arribant a contradicció pel teorema 2 de Lindemann-Weierstrass, provant així que $\sin(u)$ és un nombre transcendent.

La prova en el cas del $\cos(x)$ es semblant considerant que $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$. \square

Observem que si u és transcendent no podem dir res de $\sin(u)$ o $\cos(u)$ referent a la seva transcendentalitat o no:

Lema 6. *Si u és un nombre transcendent llavors $\sin(u)$ o $\cos(u)$ poden ser algebraics o transcendents. Considerem u un nombre real, si $\sin(u)$ és transcendent llavors també ho és $\cos(u)$ i viceversa; igualment si $\sin(u)$ és algebraic llavors també ho és $\cos(u)$ i viceversa.*

Prova. És clar que com π és transcendent obtenim llavors que $\cos(\pi)$ i $\sin(\pi)$ són nombres algebraics sobre \mathbb{Q} . Anem a veure que no forçosament

el sinus o cosinus d'un nombre transcendent sobre \mathbb{Q} és algebraic. Considerem l'equació $f(x) = \cos(x) - x = 0$ per Bolzano sabem que té una solució en $[0, \pi/2]$ aquest nombre α compleix $\alpha = \cos(\alpha)$ observem que α no pot ser algebraic ja que llavors seria també transcendent pel corollari anterior, per tant obtenim que α és transcendent. Com tenim la relació $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ tenim que si $\sin(u)$ és algebraic també ho és $\sin^2 u$ i per tant $\cos^2 u$ i com una extensió que contingui $\cos u$ referent a la de $\cos^2 u$ és de grau 2 tenim que $\cos(u)$ és algebraic. Un raonament similar però que cal escriure funcionaria pel cas transcendent (Exercici al lector). \square

Veiem també que altres funcions trigonomètriques aplicades a un nombre algebraic donen nombres transcendents.

Lema 7. *Si β és un nombre transcendent sobre un cos K arbitrari, llavors β^{-1} és transcendent sobre K . Igualment si α és un nombre algebraic sobre K no nul, també és algebraic α^{-1} .*

Prova. Suposem que β^{-1} fos algebraic. Llavors tindriem que existeix un polinomi a $K[x]$, $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ complint $f(\beta^{-1}) = 0$; és a dir

$$\sum_{i=0}^n a_i \left(\frac{1}{\beta}\right)^i = 0$$

multiplicant l'anterior expressió per β^n obtenim llavors

$$\sum_{i=0}^n a_i \beta^{n-i} = 0$$

per tant tenim un polinomi $g(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$ on $g(\beta) = 0$ dient-nos que β és algebraic en contra la hipòtesi, provant així l'enunciat. Si α és no nul la prova anterior mostra l'enunciat en el cas algebraic. \square

Aplicant l'anterior lema tenim:

Corollari 8. *Si u és un nombre algebraic no nul sobre \mathbb{Q} , llavors $\sec(u)$ i $\operatorname{cosec}(u)$ són transcendents sobre \mathbb{Q} .*

Apliquem igualment l'anterior lema per provar:

Corollari 9. *Si u és un nombre algebraic no nul sobre \mathbb{Q} , llavors $\tan(u)$ i $\cotan(u)$ són nombres transcendents sobre \mathbb{Q} .*

Prova. Com $\cotan(u) = (\tan(u))^{-1}$ utilitzant el lema si veiem el resultat per $\tan(u)$ obtenim el resultat per $\cotan(u)$. Anem doncs a demostrar que $\tan(u)$ és un nombre transcendent quan u és un nombre algebraic no nul. Recordem que $\tan(u) = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{e^{iu} + e^{-iu}} = 1 - \frac{2}{1 + e^{-2iu}}$. Suposem que $\tan(u)$ fos algebraic llavors $\tan(u) - 1$ seria algebraic on tindriem que $-\frac{2}{1 + e^{-2iu}}$ seria algebraic. Observeu però llavors que $1 + e^{-2iu}$ seria algebraic en particular tindriem que e^{-2iu} seria algebraic. Però això entra en contradicció amb el teorema de Lindemann-Weierstrass. Ja que $-2iu$ és un nombre algebraic no nul i el teorema de Lindemann-Weierstrass en particular ens afirma que e^{-2iu} és un nombre transcendent. \square

Veiem més exemples de nombres transcendentals.

Corol·lari 10. *Si $u \neq 1$ un nombre algebraic no zero i f una de les funcions trigonomètriques inverses, proveu que el valor complex de $f(u)$ és transcendental sobre \mathbb{Q} .*

Prova. Fem-ho per $\arcsin(u)$. Per les altres es fan semblantment (exercici). Suposem que $\arcsin(u)$ fos algebraic. Com $u \neq 0$ tenim que $\arcsin(u) \neq 0$, apliquem-hi el sinus tenim llavors que utilitzant que el sinus d'un nombre algebraic no nul és transcendental tenim llavors:

$$u = \sin(\arcsin(u))$$

on u seria transcendental en contra de la hipòtesi, provant-nos que $\arcsin(u)$ és transcendental. \square

Finalment donem un altre exemple de nombres algebraics.

Corol·lari 11. *Si $u \neq 1$ un nombre algebraic qualsevol llavors $\log(u)$ és transcendental sobre \mathbb{Q} .*

Prova. Suposem que $\log(u)$ fos un nombre algebraic, com $u \neq 1$ un nombre algebraic diferent és el 0. Aplicant el teorema de Lindemann obtenim que $e^{\log(u)} = u$ no compleix cap equació polinomial però u era algebraic, provant així que $\log(u)$ és transcendental sobre \mathbb{Q} , si $u \neq 1$ és un nombre algebraic. \square

• **És π algebraic sobre $\mathbb{Q}(e)$?**

Hem demostrat suposant el teorema de Lindemann que els nombres π i e són transcendentals sobre \mathbb{Q} . És un problema obert saber si el nombre π és transcendental sobre $\mathbb{Q}(e)$ o si el nombre e és transcendental sobre $\mathbb{Q}(\pi)$. Per provar això caldria veure que no existeix un polinomi no nul complint $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ amb $f(e, \pi) = 0$.

Definició 12. *Si K una extensió sobre un cos F . Triem $a_1, \dots, a_m \in K$. Diem que a_1, \dots, a_m són algebraicament independents sobre F si tot polinomi $f \in F[x_1, \dots, x_m]$ complint $f(a_1, \dots, a_m) = 0$ llavors $f = 0$.*

Reformulant el nostre problema obert amb el llenguatge de la definició, la pregunta oberta és demostrar si els nombres π, e són algebraicament independents sobre \mathbb{Q} .

En aquest camp matemàtic hi ha la següent conjectura:

Conjectura 13 (Schanuel). *Si y_1, \dots, y_m són nombres complexos \mathbb{Q} -independents, llavors com a mínim m dels nombres $y_1, \dots, y_m, e^{y_1}, \dots, e^{y_m}$ són algebraicament independents sobre \mathbb{Q} .*

Llavors si suposem que l'anterior conjectura sigui certa llavors obtenim

Corol·lari 14. *Suposant que fos certa la conjectura de Schanuel llavors tenim que π és transcendental sobre $\mathbb{Q}(e)$, i que e és transcendental sobre $\mathbb{Q}(\pi)$.*

Prova. Es deixa com exercici al lector veure que π és transcendent sobre $\mathbb{Q}(e)$ és equivalent a e transcendent sobre $\mathbb{Q}(\pi)$ i equivalent a que e, π siguin algebraicament independents sobre \mathbb{Q} .

Considerem els dos nombres algebraics $1, i\pi$ que són \mathbb{Q} -independents. Llavors considerem $i\pi, 1, e^{i\pi} = -1, e$ utilitzant llavors la conjectura tenim que per força els únics dos valors que poden ser algebraicament independents són $i\pi, e$ per tant obtenim que no existeix f no nul en $\mathbb{Q}[x, y]$ on $f(i\pi, e) = 0$. És clar llavors el mateix resultat per π, e provant el resultat, ja que si π fos algebraic sobre $\mathbb{Q}(e)$ com i és algebraic també seria $i\pi$ algebraic sobre $\mathbb{Q}(e)$ cosa que acabem de provar que no succeeix. \square

- **El problema clàssic de la quadratura del cercle**

Un problema dels temps de la Grècia clàssica, era:

Es possible construir un quadrat d'àrea π ? És a dir sempre triant com una longitud fixada com a 1 podem construir en regla i compàs el cercle de radi 1, el problema es si podem construir el quadrat d'àrea π , és a dir si per regla i compàs podem trobar una longitud de $\sqrt{\pi}$, el fet de poder aconseguir-ho s'anomenava la quadratura del cercle.

Veureu a teoria que per construir un valor α mitjançant regla i compàs és necessari i suficient que l'extensió $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ sigui de grau una potència de 2 i algebraica. Utilitzant això tenim:

Teorema 15. *És impossible la quadratura del cercle.*

Prova. Observem com π és transcendent, tenim que $\sqrt{\pi}$ és transcendent. Per tant l'extensió $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})|\mathbb{Q}$ no és algebraica, provant que no és construïble. \square

- **Una prova on el nombre e és transcendent**

Anem a fer aquí la prova de la trascendència del nombre e sense utilitzar el resultat de Lindemann. No obstant la prova que farem segueix en el cas particular per e les traces que se segueixen per la prova del teorema de Lindemann.

Suposeu que e no fos transcendent sobre \mathbb{Q} . Això ens diu que tenim:

$$a_m e^m + \dots + a_1 e + a_0 = 0$$

on podem triar els $a_i \in \mathbb{Z}$ complint que $a_0 \neq 0$.

Definim:

$$f(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \dots (x-m)^p}{(p-1)!}$$

on p denota un nombre primer arbitrari. Observem que $\deg(f) = mp + p - 1$. Definim:

$$F(X) = f(x) + f'(x) + \dots + f^{(mp+p-1)}(x)$$

Observeu que $f^{(mp+p)} = 0$ i que $\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}f(x)$. D'aquí obtenim per cada j

$$a_j \int_0^j e^{-x} f(x) dx = a_j F(0) - a_j e^{-j} F(j)$$

multiplicant per e^j i sumant sobre $j = 0, 1, \dots, m$ obtenim

$$\sum_{j=0}^m (a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x) dx) = F(0) \sum_{j=0}^m a_j e^j - \sum_{j=0}^m a_j F(j) = - \sum_{j=0}^m a_j \sum_{i=0}^{mp+p-1} f^{(i)}(j) \quad (1)$$

del fet que $\sum_{j=0}^m a_j e^j = 0$.

Proveu llavors que $f^{(i)}(j)$ són enters, i és divisible per p a excepció per $j = 0$ i $i = p - 1$ i llavors $f^{(p-1)}(0) = (-1)^p \dots (-m)^p$.

Llavors tenim que el valor de (1) és

$$Kp + a_0(-1)^p \dots (-m)^p$$

per algun $K \in \mathbb{Z}$. Triant $p > \max(m, |a_0|)$ l'enter $Kp + a_0(-1)^p \dots (-m)^p$ no és divisible per p .

Per tant pels p suficientment grans el valor de (1) no és zero.

Estimem ara el valor de la integral. Observem que per $0 \leq x \leq m$ llavors

$$|f(x)| \leq \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}$$

on tenim llavors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^m a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x) dx \right| &\leq \sum_{j=0}^m |a_j e^j| \int_0^j \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} dx \\ &\leq \sum_{j=0}^m |a_j e^j| j \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \end{aligned}$$

comproveu que l'última expressió tendeix a 0 quan p tendeix a ∞ , en contradicció amb el fet que hem vist que aquest valor és no nul pels p suficientment grans, provant així:

Teorema 16 (Hermite). *El nombre real e és transcendent sobre \mathbb{Q} .*

- **Construcció de Liouville de nombres transcendents**

Liouville, va ser el matemàtic que primer va desxifrar les notes d'Evariste Galois i fou el dia 4 de Juliol de 1843 que va comunicar a l'Academia de Ciències de França la importància i profunditat dels resultats obtinguts per Evariste Galois.

Igualment aquest matemàtic té un paper destacat en els avenços en construcció de nombres transcendents, la idea de construcció fou que els nombres algebraics reals estan allunyats dels nombres racionals; és a dir

Proposició 17 (Liouville, 1851). *Sigui α una arrel real d'un polinomi irreductible de grau $n > 1$ amb coeficients enters. Llavors existeix una constant $c(\alpha)$ tal que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c(\alpha)}{q^n}$$

per tot nombre racional $\frac{p}{q}$.

Prova. Escrivim $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ el polinomi irreductible de grau n on $f(\alpha) = 0$. Observem que com $q^n f(p/q) \in \mathbb{Z}$, $|q^n f(p/q)| \geq 1$. Podem pensar $|\alpha - \frac{p}{q}| \leq 1$. Utilitzant el teorema del valor mig obtenim

$$|f(p/q)| = |f(\alpha) - f(p/q)| \leq |\alpha - \frac{p}{q}| \sup_{|x-\alpha| \leq 1} |f'(x)|$$

obtenint així el resultat. \square

Com aplicació veiem que **el nombre** $\alpha = 0.11000100\dots = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ **és transcendent.**

Anem a aplicar el resultat de Liouville per a provar que l'anterior nombre és transcendent. Per això considerem $\alpha_r = \sum_{n=1}^r 10^{-n!} = p/q$ on $p = 10^{r!} \sum_{n=1}^r 10^{-n!}$, $q = 10^{r!}$ tenim llavors

$$|\alpha - \alpha_r| = |\alpha - \frac{p}{q}| = \sum_{n=r+1}^{\infty} 10^{-n!} < 10^{-(r+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} < 10^{-(r+1)!} 2 = \frac{2 \cdot 10^{-r!}}{q^r}$$

Si $r \geq n$ i suficientment gran tenim $2 \cdot 10^{-r!} < c(\alpha)$ i

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{c(\alpha)}{q^n} \quad (2)$$

, on llavors obtenim que hi ha una infinitat de nombres racionals satisfent l'inequació 2 on amb el resultat de Liouville, aquest fet ens diu que α és transcendent.

Corol.lari 18. *Tot nombre real α que s'expressi mitjançant*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{t^{n!}}$$

amb k_n enters amb valor absolut acotat i t un enter arbitrari, és un nombre transcendent.

Prova. La prova es únicament acotant les k_n per una constant i utilitzar el mateix argument que s'ha fet pel nombre $\alpha = 0.11000100\dots$ substituint $10 = t$ i els canvis convenients. \square

Nota 19. *Els nombres reals ψ que són aproximats per successions racionals p_n/q_n on*

$$|\psi - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^{w_n}}$$

on $\lim_{sup} w_n = +\infty$ s'anomenem nombres de Liouville i són transcendents.