Àlgebra I

Diplomatura d'Estadística.

Tema 1: Teoria de conjunts.

Capítol 1.1: conjunts, unió, intersecció i complementari. Producte cartesià.

1. Comproveu les següents identitats (llei distributiva):
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

2. Siguin A i B subconjunts d'un cert conjunt S. Proveu que (lleis de Morgan)
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

3. Discutiu la veracitat o falsedat de:
$$[(A \cup B) \cap (B \cup A^c)^c] \cup [(A \cap B) \cup (A^c \cup B)^c] = A.$$

4. $\boxed{\text{Febrer 02}}$ Donats A,B,$C \subset S$, es consideren els dos subconjunts de S següents :
$$(A \cap B^c)^c \cup B \qquad \text{i} \qquad A^c \cup B$$
Són iguals?

5. $\boxed{@}$ $\boxed{\textbf{Juliol 2002}}$ **Donats A,$B \subset S$, es consideren els dos subconjunts de S següents :**
$$A^c \cap B^c \qquad \textbf{i} \qquad (A \cap B)^c$$
És cert que un d'ells conté l'altre?

6. Definiu subconjunts A, B, C, D finits dins el conjunt dels nombres naturals que compleixin la següent igualtat en cas de ser posible:
$$(A \cup B) \cap (C \cup D)^c = A.$$
En cas de ser posible, són úniques les eleccions de A, B, C, D?

7. $\boxed{\text{Febrer 98}}$ Siguin A, B i C subconjunts d'un conjunt E, simplifiqueu l'expressió:
$$(A^c \cup ((B^c \cup C^c) \cap (B^c \cup C)))^c.$$

8. $\boxed{\text{Febrer 01}}$ Simplifiqueu les expressions següents:
$$(A \cup B) \cap (A \cup B^c); \quad (A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c); \quad (A \cup B) \cap (B \cup C).$$

9. Resoleu les següents qüestions.
   (a) Determineu $\mathcal{P}(A)$ quan $A = \{a, b, c, d\}$.
   (b) Si A és un conjunt de 2 elements determineu $\mathcal{P}(A)$ i $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.
   (c) Si A és un conjunt de n elements, quants elements té $\mathcal{P}(A)$?
   (d) És cert que $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$?

Àlgebra I

Diplomatura d'Estadística.

Tema 1: Teoria de conjunts.

Capítols 1.2,1.3: Aplicacions, principi d'inducció, numerabilitat.

10. Considerem les aplicacions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donades per,
    (a) $x \mapsto ln|x|$ si $x \neq 0$ i $0 \mapsto 0$
    (b) $x \mapsto e^x$
    (c) $x \mapsto x + 5$ Estudieu en cada cas la exhaustivitat i la injectivitat. Quina/es es/són bijectives?

11. Considereu aplicacions $f : A \to B$, $g : B \to C$ i $h = g \circ f : A \to C$. Demostreu les implicacions següents:
    (a) h injectiva $\Rightarrow f$ injectiva.
    (b) h exhaustiva $\Rightarrow g$ exhaustiva.
    (c) h exhaustiva, g injectiva $\Rightarrow f$ exhaustiva.
    (d) h injectiva, f exhaustiva $\Rightarrow g$ injectiva.

12. Sigui $f : X \to Y$ una aplicació, A, B subconjunts de X i C, D subconjunts de Y. Demostreu o trobeu un contraexemple de cadascuna d'aquestes afirmacions.
    (a) $f^{-1}(f(A)) = A$.
    (b) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
    (c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
    (d) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.
    (e) $f(f^{-1}(C)) = C$.

13. Definim la relació binària a $\mathbb{Z}$ per: n està relacionat amb m si i només si $n - m$ és parell.
    Proveu què és una relació d'equivalència.
    És una relació d'ordre?

14. Dóna un exemple de relació binària sobre $\mathbb{Z}$, que no sigui funció.

15. Proveu per inducció que $n^3 - n$ és un múltiple de sis.

16. Demostra, per inducció sobre $n \in \mathbb{N}$, la següent igualtat :

$$(n+1)! \quad = \quad 1 + \sum_{k=0}^{n} k(k)!.$$

17. $\boxed{@}$ **Demostra, per inducció sobre $n \in \mathbb{N}$, la següent igualtat :**

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} \quad = \quad \frac{n}{n+1}$$

18. Sigui $P(n)$ la proposició:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{2}, \text{ per tot } n \in \mathbb{N}.$$

Demostreu que si $P(k)$ és certa llavors també ho és $P(k+1)$. És certa $P(n)$ per tot $n \in \mathbb{N}$?

19. Considereu la següent utilització del principi d'inducció:
Demostrarem per inducció que tothom té el mateix nom. En particular, provarem que, donada una col.lecció de n persones amb $n \in \mathbb{N}$ qualsevol, totes les persones tenen el mateix nom.

La primera etapa és trivial, perquè si $n = 1$, qualsevol persona té el mateix nom que ella mateixa.

La hipòtesi d'inducció és que, en tota col.lecció de k persones, totes tenen el mateix nom.

Ara considerem una col.lecció de $k+1$ persones. Fem marxar una d'aquestes persones. Per la hipótesi d'inducció, les altres k persones tenen totes el mateix nom. Ara canviem la persona que és fa fora per una d'aquestes k persones. Tornem a tenir un grup de k persones que, per la hipótesi d'inducció, tenen el mateix nom. Per tant la persona que acaba d'entrar es diu igual que la resta. Així les $k+1$ persones tenen el mateix nom.

On "falla" aquesta demostració?

20. Doneu un exemple, si és posible, d'aplicació bijectiva entre els conjunts

(a) $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$.

(b) $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(c) $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$.

(d) $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$.

Àlgebra I

Diplomatura d'Estadística.

Tema 2:Anàlisi Combinatoria.

Capítol 2.1: Fórmula d'inclusió-exclusió

21. Donat un conjunt finit A, indiquem per $|A|$ el nombre d'elements d'A (cardinal d'A). Siguin A, B conjunts finits.
    (a) Proveu $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
    (b) Trobeu una fórmula semblant per a tres conjunts finits.
    (c) D'una mostra de 1000 "internautes" s'estudia l'ús que fan dels monitors de cerca Yahoo, Olé! i Alta Vista, donant els següents resultats: 850 utilitzen Yahoo, 200 Olé!, 350 Alta Vista, 130 Yahoo i Olé!, 200 Yahoo i Alta Vista, 30 Olé! i Alta Vista, i només 20 els tres cercadors. És possible aquesta distribució?

22. En 100 mostres d'aigua s'ha comprovat que 7 contenen mercuri, 5 arsènic, 4 plom, 3 tenen arsènic i mercuri, 3 tenen arsènic i plom, 2 tenen mercuri i plom i 1 té mercuri i arsènic però no plom. Quantes mostres tenen *a*l menys un dels tres components tòxics?

23. En una reunió hi ha més homes que dones, més dones que beuen que homes que fumen, i més dones que fumen i no beuen que homes que no beuen ni fumen. Demostreu que hi ha menys dones que no beuen ni fumen que homes que beuen i no fumen.

24. $\boxed{@}$ Es fa un estudi de compra de tres productes alimentaris. D'entre tots els clients que participen en l'estudi, 99 compren el producte C, 30 el producte A i B, 28 l'A i el C, 29 el B i el C, 133 el producte A i no el B, 10 el producte A i C i no el B, 91 el B i no el C i 46 no compren cap producte. Es demana quantes persones van participar en aquest estudi com a possibles compradors.

25. En un grup de 1000 homes se sap que 950 porten rellotge, 750 paraigua, 800 corbata i 850 barret. Trobeu el nombre *m*ínim de persones que porten les quatre coses.

26. En un grup de 300 dones que es troben en una reunió se sap que 250 porten arracades, 200 pulsera, 200 anell(s) i 249 collaret. Amb les dades que teniu, pot haver-hi alguna dona que no porti cap arracada, pulsera, anell o collaret? Trobeu el nombre *m*ínim de dones que porten les quatre coses.
    Després però ens assabentem que hi ha 2 dones més que tenen anell, però que no el porten possat. Hi ha llavors, alguna dona que no porti cap arracada, pulsera, anell o collaret?

27. Trenta persones són examinades per a saber si són immunes a la tuberculosi, a la rubèola i a la verola. De les 30 persones, 13 són trobades immunes a la tuberculosi, 17 a la rubèola, 13 a la verola, 7 a la tuberculosi i la rubèola, 8 a la rubèola i la verola, 7 a la tuberculosi i la verola, i 1 a la tuberculosi, la rubèola, però no a la verola. Quantes persones no són immunes a cap de les tres malalties?

Tema 2:Anàlisi Combinatòria.
2.2. Variacions, permutacions i combinacions

28. Una clau es fabrica fent incisions de profunditat variable en certes posicions d'una clau verge. Si hi ha 8 profunditats possibles, quantes posicions són necessàries per tal de fabricar un mil.lió de claus diferents?

29. Quants números sencers diferents se'n pot obtenir emprant cadascun dels dígits 0,1,2,4,5,6,7,8,9 exactament un cop? Quants d'ells són més grans que 5.000.000.000? Suposeu que un número no pot començar amb un 0.

30. De quantes maneres sen pot ordenar les 26 lletres de l'alfabet, de manera que:
    (a) les lletres V,I,C surtin totes tres juntes i en aquest ordre;
    (b) les lletres V,I,C surtin totes tres juntes, però no necessàriament en aquest ordre; Resultat: 6(24!)
    (c) les lletres V,I,C no surtin totes tres juntes? Resultat:644(24!)

31. En un plató de televisió, es pretén col.locar 5 persones al voltant d'una taula rodona per fer un programa de tertúlia.
    (a) De quantes maneres diferents podem fer-ho? Es consideren iguals dues col.locacions si cada persona té els mateixos acompanyants a la seva dreta i a la seva esquerra. Resultat:24
    (b) Suposeu que, entre els 5 participants s'escull un moderador de la tertúlia i se'l col.loca en un lloc determinat a la taula. De quantes maneres diferents podem col.locar als 5 participants del programa en aquest cas? Resultat:120

32. Quants nombres entre 1000 i 3000 es pot formar amb les xifres 0,1,2,3,4 i 5 si es permet repetir dígits en un nombre?

33. Se situa un rei a la casella inferior esquerra d'un tauler d'escacs amb l'objectiu de traslladar-lo a la casella superior dreta. Si els seus únics desplaçaments possibles són una casella cap amunt o una casella cap a la dreta, quants camins diferents pot fer? Resultat= 3432

34. S'ha de formar una comissió de 8 persones a partir d'un grup de 10 habitants d'un poble A i 15 habitants d'un altre poble B. De quantes maneres es pot triar la comissió, si:
    (a) cada poble ha d'estar representat per 4 persones; Resultat=286650
    (b) hi ha d'haver més representants del poble B, ja que aquest és més gran;Resultat=656370
    (c) hi ha d'haver almenys dos representants del poble A a la comissió? Resultat=1010790

35. Trobeu el nombre de permutacions de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en les quals no apareix la successió 236 ni la 14.

36. Trobeu el nombre (la quantitat) de números des de 0 fins a 10^n que no tinguin xifres iguals successives. Per exemple, si $n = 3$, llavors 371 seria un dels nombres buscats i 331 no ho seria.

37. De quantes maneres poden seure n homes i n dones al voltant d'una taula rodona si demanem que dues persones del mateix sexe no estiguin de costat?

38. **El polinomi de Leibnitz.** Si n i m són dos nombres naturals positius, considerem l'expressió $(x_1 + \cdots + x_n)^m$ on $x_1, \ldots, x_n$ són variables independents. En desenvolupar la potència obtenim un polinomi en n variables, els monomis del qual són de la forma $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ amb $k_1 + \cdots + k_n = m$.

    (a) Quants monomis diferents té el desenvolupament d'aquesta expressió?

    (b) Quin coeficient acompanya cada monomi en el desenvolupament?

39. Calculeu de quantes maneres es poden repartir n boles iguals en m urnes diferents, tenint en compte les següents condicions:

    (a) no hi ha cap urna buida,

    (b) a la segona urna hi ha k boles.

40. En un tauler d'escacs estan col.locades, arbitràriament, dues torres (negra i blanca). Què és més probable: que les torres puguin menjar-se una a l'altra o que no puguin?

41. Demostreu que és més probable obtenir com a mínim un u amb quatre daus, que com a mínim un doble u en 24 tirades de dos daus. La resposta es coneix com la paradoxa de Méré (1654).

42. Un armari conté n parelles de sabates. Escollim a l'atzar $2r$ sabates (amb $2r < n$). Quina és la probabilitat de que:

    (a) no hi hagi cap parella completa?

    (b) hi hagi exactament una parella completa?

    (c) hi hagi exactament dues parelles?

43. $\boxed{\text{Juny 98}}$ Hi ha n persones entre les quals es troben l'Oscar i la Núria.

    (a) De quantes maneres podem ordenar-los en fila de forma que entre l'Oscar i la Núria hi hagin exactament r persones?

    (b) I si els ordenem en cercle? (cal notar que ordenacions que difereixen en una rotació es consideren iguals i que quan diem que entre l'Oscar i la Núria hi ha r persones vol dir hi ha r persones quan anem de l'Oscar cap a la Núria en la direcció del moviment de les agulles d'un rellotge).

44. $\boxed{\text{Febrer 01}}$

    (a) Per a confeccionar un menú, que consiteix de primer plat, segon plat i postre, disposem d'un assortiment de 5 primers plats, 5 segons plats i 5 postres.

(a1) Quants menús diferents podrem fer ?

(a2) Durant 5 dies volem programar 5 menús, de manera que tots ells no tinguin ni un sol plat en comú. De quantes maneres ho podrem fer ?

(b) Tenim una baralla de 48 cartes. De quantes maneres podem ordenar-les, de manera que les 4 reines quedin situades consecutivament ?

Cal que raoneu o justifiqueu les vostres respostes.

45. $\boxed{@}$

(a) Disposes de pintura de quatre colors i vols confeccionar una bandera. Aquesta bandera ha de constar de quatre bandes horitzontals. Dues bandes contigües no poden ser del mateix color. Quàntes banderes diferents pots obtenir? (es distingeix l'ordre dels colors que integren la bandera).

(b) La suma de les edats de tres estudiants de la classe és 60. Tenint en compte que cada un d'ells no és menor de 18 anys, troba el nombre de les possibles distribucions de les seves edats.

46. (a) De quantes maneres diferents podem escollir els cardinals de tres conjunts A, B, C, per tal que $|A \cup B \cup C| = 120$, $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 2$ i $|A \cap B \cap C| = 1$?

(b) Quinze estudiants es presenten a una aula per a examinar-se. Vuit d'ells s'examinen d'àlgebra i els altres set, de càlcul. Els volem distribuir en tres files de cinc estudiants cadascuna. Dos estudiants de la mateixa assignatura no poden seure junts. De quantes maneres diferents ho podem fer si distingim l'ordre en que seuen els estudiants a cada fila i l'ordre de les files? I si no distingim ni l'ordre dels estudiants ni el de les files?

Àlgebra I

Diplomatura d'Estadística.

Tema 3: Sistemes d'equacions lineals.

47. Estudieu, segons els valors del paràmetres, els sistemes següents:

(a) $\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = m \end{cases}$ (b) $\begin{cases} (a-1)x - ay = 2 \\ 6ax - (a-2)y = 1-a \end{cases}$

(c) $\begin{cases} bx + y + z = b^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3b \end{cases}$ (d) $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$

48. $\boxed{\text{Juny 98}}$ Discutiu el sistema d'equacions

$$\begin{cases} ax + bz = 2 \\ ax + ay + 4z = 4 \\ ay + 2z = b \end{cases}$$

en funció dels valors d'a i b. Concretament, dieu per a quins valors de a i b el sistema té

(a) solució única,

(b) una família uniparamètrica de solucions,

(c) una família biparamètrica de solucions,

(d) cap solució.

49. $\boxed{\text{Juny 99}}$ Discutiu i resoleu el següent sistema d'equacions en funció dels valors dels paràmetres λ i μ.

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda x + \lambda z & = & \lambda \\ \mu y + \lambda z & = & 1+\mu \\ x + (\lambda+1)z & = & 2 \end{array}\right\}$$

50. Estudieu el següent sistema segons els valors del paràmetre s. Trobeu les solucions (si n'hi han) quan $s = -1$.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & sy & + & & + & st & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & + & 3t & = & s \\ 2x & + & y & + & z & + & 2t & = & s \end{array}\right\}$$

51. $\boxed{\text{Febrer 02}}$ Considera el següent sistema d'equacions lineals en funció d'un paràmetre real a :

$$\begin{cases} (a-1)x - 3ay - 2az = a \\ 2x + 3ay + 6z = 6a + 1 \\ x + (a-1)y + 2z = 4 \end{cases}$$

Discuteix la compatibilitat de l'anterior sistema, segons el valor d'a i, en el cas de ser compatible, dóna els graus de llibertat del conjunt de les solucions.

52. $\boxed{@}$ Considera el següent sistema d'equacions lineals en funció d'un paràmetre real a :

$$\begin{cases} x - y + az = 1 \\ 2x + ay + 6z = 8 \\ x + y + 3z = a + 2 \end{cases}$$

Discuteix la compatibilitat de l'anterior sistema, segons el valor d'a i, en el cas de ser compatible, dóna els graus de llibertat del conjunt de les solucions.

Àlgebra I

Diplomatura d'Estadística.

Tema 4: Àlgebra de les matrius.

53. Considerem les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \; i \; E = (1\,2\,3\,4).$$

(a) Calculeu $A + B$, $A^t + B^t$, $C + D$, $C^t + D^t$, $(C + D)^t$.

(b) Calculeu AB, A^tB^t, B^tA^t, $(AB)^t$, CD, C^tD^t, D^tC^t, $(CD)^t$.

(c) Calculeu EE^t i E^tE.

54. Siguin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Trobeu, quan tingui sentit, $A+B$, $-2B$, $A+2B$, $B-A$, $A+C$, AB, AB^t, A^tB, $A(BC)$.

55. Sigui A una matriu de $\mathcal{M}_{3\times 4}$. Trobeu una matriu P tal que $P \cdot A$ correspongui a l'operació elemental per files de sumar 3 vegades la fila 1 de la matriu A a la fila 3 de A.

56. És cert que si es compleix la igualtat matricial $AB = AC$ aleshores $B = C$?

57. Doneu dues matrius A i B de 2×2 que no tinguin cap component nul.la però $AB = 0$.

58. Suposem que A és una matriu quadrada que satisfà $A^2-3A+I=0$. Demostreu que $A^{-1}=3I-A$.

59. Sigui $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tal que $ad-bc\neq 0$. Trobeu A^{-1}.

60. Sense usar *ni llapis ni paper*, determineu si les següents matrius són invertibles.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0.1 \\ 0 & 5 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0.37 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

61. És possible trobar una matriu K tal que $AKB=C$? on

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En cas afirmatiu trobeu-la.

62. Donada la matriu

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

trobeu una matriu invertible $P\in\mathcal{M}_3$ tal que PA tingui la forma esgraonada reduïda per files.

63. Per a cadascuna de les següents matrius A trobeu unes matrius invertibles Q i P tal que $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, és a dir, la PAQ-reducció:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0.5 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & -8 & 10 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ -5 & 7 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

64. Donades les matrius $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $F=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ és possible transformar E en F fent canvis elementals de files?

65. Trobar, si existeix, la inversa de cadascuna de les següents matrius:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 5 & 11 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$

66. Calculeu els següents determinants (practiqueu diferents formes de fer-los):

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

67. Siguin A i B dues matrius quadrades $n \times n$. Digueu si són certes o falses les

següents igualtats:

(a) $\det(A + B) = \det A + \det B$.

(b) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

(c) $\det(-A) = -\det A$.

(d) $\det(-A) = \begin{cases} \det A & n \text{ parell,} \\ -\det A & n \text{ senar.} \end{cases}$

68. Demostreu, sense calcular-lo explícitament, que el següent determinant és múltiple de 19:

$$\begin{vmatrix} 9 & 5 & 1 & 4 \\ 8 & 6 & -1 & 6 \\ -1 & 4 & 7 & 9 \\ 6 & 7 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

69. Calculeu una inversa generalitzada de les matrius

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -8 & 1 & -1 \\ 5 & -20 & -4 & -22 \\ -3 & 12 & 5 & 21 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

70. $\boxed{\text{Juny 99}}$

(a) És possible trobar matrius invertibles P i Q tals que

$$P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}?$$

Justifiqueu perquè i en cas afirmatiu trobeu-les.

(b) Doneu *tres* inverses generalitzades diferents de

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

71. $\boxed{\text{Febrer 02}}$ Utilitzant el mètode de la matriu inversa generalitzada, explicita totes les solucions del sistema d'equacions lineals de l'exercici 51 quan a=1.

72. $\boxed{@}$ Utilitzant el mètode de la matriu inversa generalitzada, explicita totes les solucions del sistema d'equacions lineals de l'exercici 52 quan a=2.