

Àlgebra i equacions diferencials

Enginyeria Química

Curs 2001/02

10 Juliol 2002.

1. (a) Sigui E el \mathbb{R} -espai vectorial de dimensió 4,

$$E = \{y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continues} \mid y^{(4)} - 7y''' = 0\}.$$

Considereu les funcions $1+x, x(x+1), x^2+2x+2, 3e^{7x} \in E$. Són \mathbb{R} -l.i. les funcions anteriors? Trobeu una base per E . Justifiqueu les respostes.

- (b) Sigui $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y + z, t = z + x\}$ i $W = \langle (1, 1, 2, 5), (1, 0, 1, 0), (0, -1, 1, 1) \rangle$ dos \mathbb{R} -subespais vectorials de \mathbb{R}^4 . Doneu una base per V i $V+W$ com subespais de \mathbb{R}^4 . Calculeu la dimensió de $V, W, V+W$ i $V \cap W$. Justifiqueu la resposta.
- (c) Sigui l'aplicació lineal, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, donada per $f(x, y) = (x + y, 2y + 3x)$. Expressiu la matriu en la base canònica de \mathbb{R}^2 (es a dir calculeu $M(f, \text{can}, \text{can})$). Considerem la base $\mathcal{B}_1 = \{(1, 2), (1, 5)\}$ de \mathbb{R}^2 . Expressiu la matriu de f en la base \mathcal{B}_1 , és a dir calculeu $M(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$. Calculeu també $M(f, \mathcal{B}_1, \text{can})$. Decidiu si l'aplicació f és injectiva i/o exhaustiva.
2. (a) Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculeu els valors propis i per cada valor propi una base de vectors propis per aquest valor propi. Decidiu si diagonalitza. En cas afirmatiu calculeu A^n .

- (b) Amb la matriu A de l'apartat anterior, resolcu el sistema d'equacions diferencials

$$\frac{d\mathcal{X}}{dt} = A\mathcal{X}.$$

3. La velocitat de desintegració de la quantitat de massa en un temps t d'un producte radioactiu decau proporcionalment a la quantitat de massa del producte radioactiu. En un laboratori químic, es va trobar en un racó, tornant de Reis, una capça que contenia una substància radioactiva, no catalogada en el laboratori. En aquell instant teníem exactament 51 grams de la substància. Després de 150 dies de la troballa, hem mesurat que tenim exactament 50 grams de la substància. A la capça on vam trobar la substància, hi posa que inicialment hi havia 100 grams de producte. Si aquestes dades son correctes, quan de temps fa que estaria al laboratori?
4. (a) Resoleu l'equació diferencial

$$y'' - 9y = 3e^{3x},$$

amb $y(0) = 1$.

- (b) Resoleu l'equació diferencial

$$y^{(5)} - y = 0.$$