Resultats Relació 4

Exercici 1

a) $3^0 = 1$

b) $\left(\frac{n+5}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{(\frac{n}{5})}\right)^{\frac{n}{5}}\right)^5$. Apliqueu criteri del número e. El límit és e^5.

c) $\left(\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{\left((1+\frac{1}{n})^n\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}}$. Criteri número e. Resultat $e^{-\frac{1}{2}}$.

Exercici 2

(a) 2º Criteri de Stolz amb $a_n = 1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$ i $b_n = n^n$. Després apliqueu criteri del número e. El resultat és 1.

(b) 2º Criteri de Stolz amb $a_n = 1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}$ i $b_n = n\sqrt{n}$. Heu de multiplicar pel conjugat del denominador. Resultat: $\frac{2}{3}$.

(c) 2º Criteri de Stolz amb $a_n = 1 + 2^{\frac{1}{2}} + \cdots + n^{\frac{1}{n}}$ i $b_n = n$.

També es pot fer pel criteri mitjana aritmètica amb $a_n = \sqrt[n]{n}$ i aplicant que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Resultat: 1.

(d) 1º criteri Stolz amb $a_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$ i $b_n = \frac{1}{n}$. Noteu $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) = \infty$. Resultat: 0.

(e) 1º criteri Stolz amb $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ (que té limit e)i $b_n = \frac{1}{n}$. Resultat e.

(f) 2º criteri Stolz amb $a_n = 1! + \cdots + n!$ i $b_n = n!$. Resultat: 1.

(g) 2º Stolz amb $a_n = \log 1 + \cdots + \log n$ i $b_n = n \log n$. Resultat: 1.

(h) Criteri de l'arrel amb $a_n = P(n)$. Resultat: 1.

(i) $na^{-n} = \frac{n}{a^n}$. 2º Criteri Stolz amb $a_n = n$ i $b_n = a^n$. Resultat: 0.

(k) 2º Stolz amb $a_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ i $b_n = n^3$. Resultat: 0.

(l) Resultat: $\frac{1}{3}$.

(m) $(n+1)^n \leq (n+1)(n+2)\cdots(n+n)$. Resultat: ∞.

(n) Sigui $u_n = \frac{a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{2}{n}} + \cdots + a^{\frac{n}{n}}}{n}$. Noteu que el numerador és la suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica. Per tant $u_n = \frac{a^{\frac{1}{n}}(1-a)}{n(1-a^{\frac{1}{n}})}$. Hem de calcular el límit de $n(1 - a^{\frac{1}{n}})$. Treballem de manera semblant al criteri del número e 2.

Siguin $a_n = a^{\frac{1}{n}}$ i $b_n = n$. Llavors tenim que

$$a_n^{b_n} = \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{b_n(a_n-1)}.$$

Coneixem $\lim a_n^{b_n} = a$ i $\lim \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{\frac{1}{a_n-1}} = e$. Prenem logaritmes i tenim que

$$\ln a_n^{b_n} = \ln a = b_n(a_n - 1)\ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{\frac{1}{a_n-1}}.$$

Per tant $\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1) = \ln a$. Per tant,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}}(1-a)}{n(1-a^{\frac{1}{n}})} = \frac{a-1}{\ln a}.$$

(o) Suposem $a < b$. Llavors $b = (b^n)^{\frac{1}{n}} \leq (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} \leq (2b^n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}}b$. Pel criteri del sandwich el límit és b.

També es pot fer pel criteri de l'arrel.

Exercici 3

El límit és sempre a. Però hi ha tres casos. $a = 1$, $a < 1$ i $a > 1$.
Si $a = 1$ és clar, la successió es constant.
Si $a < 1$, llavors $\sqrt{a} > a$. Es veu que $\{a_n\}$ és monòtona decreixent i acotada inferiorment per a.
Si $a > 1$, $\sqrt{a} < a$. Es veu que $\{a_n\}$ és monòtona creixent i acotada superiorment per a.

Exercici 4

Com que la sèrie $\sum \frac{1}{n^2}$ és convergent tenim que a_n té límit un número real.

Altre manera. a_n és una successió monòtona creixent de nombres positius $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)^2}$. Llavors és suficient en veure que hi ha una successió parcial acotada.

Treballem de manera semblant a com es veu que $\sum \frac{1}{n}$ no és convergent. Noteu que si $2^k \leq m < 2^{k+1}$ llavors $\frac{1}{(2^{k+1})^2} < \frac{1}{m^2} \leq \frac{1}{(2^k)^2}$ i que hi ha 2^k nombres naturals m entre 2^k i 2^{k+1}. Per tant

$$\frac{1}{(2^k)^2} + \frac{1}{(2^k+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^2} \leq \frac{1}{(2^k)^2} + \frac{1}{(2^k)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^k)^2} = \frac{2^k}{(2^k)^2} = \frac{1}{2^k}.$$

Llavors $a_{2^l-1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(2^l-1)^2} \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{l-1}} = \frac{1-\frac{1}{2^l}}{1-\frac{1}{2}} \leq 2$.

Exercici 5

Aplicant el criteri del quocient tenim que $\sum a_n$ és convergent i per tant $\lim a_n = 0$.

Altre manera. Sigui $l = \lim \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid$ i $\varepsilon > 0$ tal que $l + \varepsilon < 1$. Per definició de límit existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ llavors $|| \frac{a_{n+1}}{a_n} | - l | < \varepsilon$. És a dir $l - \varepsilon <| \frac{a_{n+1}}{a_n} |< l + \varepsilon$. Si $n \geq n_0$, tenim que $n = n_0 + k$. Es pot veure que $| a_n |< (l+\varepsilon)^k \mid a_{n_0} \mid$. D'això es dedueix que $\lim a_n = 0$.

Exercici 6

a) Pel criteri de comparació per quocient, la comparem amb la successió $b_n = \frac{1}{n^2}$ ($\sum \frac{1}{n^2}$ és convergent!!), tenim que la sèrie és convergent.

b) Pel criteri de comparació per quocient, la comparem amb la successió $b_n = \frac{1}{n}$ ($\sum \frac{1}{n}$ no és convergent!!), i fent servir que $\lim \frac{n}{\ln n} = \infty$, tenim que no és convergent.

c) Pel criteri del quocient tenim que és convergent.

d) $\lim(n^{\frac{1}{n}} - 1) = 0$. Llavors aplicant el criteri de Leibniz tenim que la sèrie és convergent.

Veure que $n^{\frac{1}{n}}$ és decreixent (a partir d'un n_0) és equivalent, prenent logaritmes, a que $\frac{\ln(n+1)}{n+1} < \frac{\ln n}{n}$ sii $n \ln(n+1) < (n+1) \ln n$ sii $\ln(n+1)^n < \ln n^{n+1}$. Com que ln és una funció creixent veurem que $(n+1)^n < n^{n+1}$.

Recordeu la demostració del límit de $(1 + \frac{1}{n})^n$.

Volem veure que $(n+1)^n < n^n \cdot n$ sii $\frac{(n+1)^n}{n^n} < n$ sii $(1 + \frac{1}{n})^n < n$. Apliqueu ara que $(1 + \frac{1}{n})^n$ és acotada per 3. Per tant la desigualtat és certa per tot $n \geq 3$.

e) Per Leibniz és convergent.

f) Per Leibniz és convergent.

g) Pel criteri de comparació per quocient, la comparem amb la successió $b_n = \frac{1}{\log n^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\ln n}$. Aplicant b) tenim que no és convergent.

h) Pel criteri del quocient tenim que si és convergent.

i) Si $p \geq 0$ no és convergent, el límit de la successió no és zero.

Si $p < 0$ apliqueu el criteri de condensació de Cauchy. Per veure que la sèrie que surt no és convergent apliqueu el criteri del quocient. Per tant la sèrie no és convergent.

j) Pel criteri de condensació de Cauchy la sèrie és convergent si i només si $\sum \left(\frac{2^n}{(\ln(n \ln 2))^{\ln(n \ln 2)}} \right)$. Veurem que aquesta no és convergent perquè $\frac{2^n}{(\ln(n \ln 2))^{\ln(n \ln 2)}}$ no té límit zero. De fet veurem que $2^n > (\ln(n \ln 2))^{\ln(n \ln 2)}$ per a n suficientment gran. $2^n > (\ln(n \ln 2))^{\ln(n \ln 2)}$ és equivalent a que $n \ln 2 > (\ln n + \ln(\ln 2)) \ln(\ln n + \ln(\ln 2))$. Això es equivalent a que

$$\ln 2 > \frac{\ln n + \ln(\ln 2)}{n^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{\ln(\ln n + \ln(\ln 2))}{n^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}.$$

El terme de la dreta té límit 0 (vegeu apartat m)), i per tant si n suficientment gran hem acabat.

k) Fent la resta i multiplicant pel conjugat ens queda $\frac{n^p}{\sqrt{n^2(n-1)} + \sqrt{n(n-1)^2}} = \frac{n^{p-\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}} + 1 - \frac{1}{n}}$. Pel criteri de comparació per quocient amb $b_n = n^{p-\frac{3}{2}}$ tenim que la série és convergent sii $p - \frac{3}{2} < -1$ sii $p < \frac{1}{2}$.

l) La successió no té límit zero, per tant la sèrie no és convergent.

m) Si $k \leq 1$. Tenim que $\frac{\log n}{n^k} > \frac{1}{n^k}$ i $\sum \frac{1}{n^k}$ no és convergent. Per tant la sèrie no és convergent.

Suposem $k > 1$.

Provarem que si $\delta > 0$ existeix n_0 tal que si $n \geq n_0$ llavors $\frac{\ln n}{n^\delta} < 1$.

Per això, fent servir que $x < e^x$, tenim que $\ln x < x$ si $x \in \mathbb{R}, x > 0$. Per tant $\ln n^{\frac{\delta}{2}} < n^{\frac{\delta}{2}}$, i $\ln n < \frac{2}{\delta} n^{\frac{\delta}{2}}$. Llavors,

$$\frac{\ln n}{n^\delta} < \frac{\frac{2}{\delta} n^{\frac{\delta}{2}}}{n^\delta} = \frac{2}{\delta} \frac{1}{n^{\frac{\delta}{2}}} < 1$$

si n_0 adequat.

Escrivim $k = 1 + 3\delta$.

$$\frac{\frac{\ln n}{n^k}}{\frac{1}{n^{1+\delta}}} = \frac{\ln n}{n^\delta} \cdot \frac{1}{n^\delta}.$$

Això té límit zero perquè si n és prou gran tenim que $\frac{\ln n}{n^\delta} < 1$ i $\lim \frac{1}{n^\delta} = 0$.

Sabem que $\sum \frac{1}{n^{1+\delta}}$ és convergent. Pel criteri de comparació per quocient tenim que la sèrie $\sum \frac{\ln n}{n^k}$ és convergent.

n) Per Leibniz és convergent.

o) Si $\alpha > 0$ per Leibniz és convergent.

Si $\alpha = 0$, no és convergent.

Si $\alpha < 0$, $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ no és convergent i per tant la sèrie no és convergent.

p) $\sin(\frac{(-1)^n}{n}) = (-1)^n \sin \frac{1}{n}$. $\frac{1}{n^\alpha} \sin \frac{1}{n}$ és decreixent amb límit zero. Apliqueu Leibniz.

q) Pel criteri del quocient tenim que $\sum \frac{2^n}{n!}$ és convergent. Llavors $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$.

$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2}{(n+1)} \frac{2^n}{n!} \leq \frac{2^n}{n!}$.

Apliquem Leibniz i tenim que $\sum (-1)^n \frac{2^n}{n!}$ és convergent.

Altre manera. Tenim que $\frac{2^n}{n!}$ és decreixent i acotada inferiorment. Per tant té límit $l \in \mathbb{R}$.

$\lim \frac{2^{n+1} - 2^n}{(n+1)! - n!} = \lim \frac{2^n}{n!} \frac{1}{n} = \lim \frac{l}{n} = 0$. Llavors per Stolz 2 tenim que $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$. Apliqueu Leibniz i la sèrie és convergent.

r) Pel criteri de l'arrel (per sèries) tenim que és convergent. Apliqueu el criteri de l'arrel (per límits) per veure que $\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$ té límit e.

s) Pel criteri de comparació per quocients amb $\frac{1}{q^n}$ tenim que la sèrie és convergent si i només si $q > 1$.

t) És convergent perquè la part real i la part imaginària són convergents.

Javier Sánchez Serdà