Resultats Relació 3

Exercici 2
Indicacions.

(a) Hi han dues successions parcials amb límits diferents. $\lim_{n\to\infty} 2^{(-1)^{2n}} = 2$ i $\lim_{n\to\infty} 2^{(-1)^{2n-1}} = 2^{-1}$.

(b) Igual. Dues successions parcials amb límits diferents ($+\infty$ i $-\infty$).

(c) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. El denominador té límit ∞.

(e) Noteu que $\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n} \leq \frac{1}{n}$. Apliquem el *criteri del sandwich* i obtenim el resultat.

(f) Hi han dues successions parcials amb límits diferents. Per exemple $(4n+1)\sin(\frac{(4n+1)\pi}{2}) = 4n+1$ i $4n\sin(\frac{4n\pi}{2}) = 0$.

(g) Com que $\{2^n\}$ té límit ∞, si dividim numerador i denominador per 2^n obtenim el resultat.

(i) $\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = \sqrt{1+(\frac{a}{n})^2}$.

(j) $\frac{2^n+(-2)^n}{3^n} = (\frac{2}{3})^n + (\frac{-2}{3})^n$.

Exercici 3

- $2 \leq x_n$ per a tot $n \geq 1$. Per inducció.

  Si $n=1$, $2 \leq x_1 = 4$. Suposem que $2 \leq x_k$ amb $k \geq 1$. $x_{k+1} = \frac{4(x_k-1)}{x_k} = 4 - \frac{4}{x_k} \overset{(*)}{\geq} 4 - \frac{4}{2} = 2$. $(*)$ és cert perquè si $2 \leq x_k$ llavors $-\frac{4}{2} \leq -\frac{4}{x_k}$.

- $\{x_n\}$ és decreixent, i.e.: $x_{n+1} \leq x_n$ per a tot n. Per inducció.

  Cas $n=1$. $x_2 = \frac{4(4-1)}{4} = 3 \leq 4 = x_1$.

  Suposem que $x_{k+1} \leq x_k$. Hem de veure que $x_{k+2} \leq x_{k+1}$.

$$x_{k+2} = \frac{4(x_{k+1}-1)}{x_{k+1}} = 4 - \frac{4}{x_{k+1}} \overset{\text{(igual abans)}}{\leq} 4 - \frac{4}{x_k} = \frac{4(x_k-1)}{x_k} = x_{k+1}.$$

- Hem vist que $\{x_n\}$ és acotada inferiorment i és monòtona decreixent, per tant, per un teorema vist a classe tenim que $\{x_n\}$ té limit $l \in \mathbb{R}$.

- Com que $x_{n+1} = \frac{4(x_n-1)}{x_n}$, llavors tenim que $l = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4(x_n-1)}{x_n} = \frac{4(l-1)}{l}$. Per tant $l^2 - 4l + 4 = (l-2)^2 = 0$. Per tant $l = 2$.

Exercici 4
Semblant a l'anterior. $l = \frac{1}{5}$.
Exercici 5

- Aquesta no es pot fer directament com les anteriors perquè no és monòtona, $x_1 \geq x_2$ i $x_2 \leq x_3$.

- Veiem primer que $0 \leq x_n \leq 2$ per a tot $n \geq 1$. Això demostra que $\{x_n\}$ est ben definida i que és acotada inferiorment i superiorment. Ho fem per inducció.

  Per $n=1$ tenim que $0 \leq x_1 = \sqrt{2} \leq 2$. Suposem que $0 \leq x_k \leq 2$. Llavors $0 \leq x_{k+1} = \sqrt{2-x_k}$, perquè $x_k \leq 2$, i $x_{k+1} = \sqrt{2-x_k} \leq 2$, perquè $0 \leq x_k$.

- La successió parcial dels senars $\{x_{2n-1}\}_{n\geq 1}$ és decreixent, és a dir, $x_{2n-1} \geq x_{2n+1}$ per a tot n. Per inducció.

  Cas $n=1$, $x_1 = \sqrt{2} \geq \sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}} = x_3$. Suposem que $x_{2k-1} \geq x_{2k+1}$ i provarem que $x_{2k+1} \geq x_{2k+3}$.

  $$x_{2k+3} = \sqrt{2-\sqrt{2-x_{2k+1}}} \leq \sqrt{2-\sqrt{2-x_{2k-1}}} = x_{2k+1},$$

  ja que $x_{2k-1} \geq x_{2k+1}$ implica que $-\sqrt{2-x_{2k-1}} \geq -\sqrt{2-x_{2k+1}}$.

- Per tant tenim que la successió parcial $\{x_{2n-1}\}$ és acotada inferiorment (ja que $\{x_n\}$ ho és) i monòtona decreixent. Per tant té límit $l \in \mathbb{R}$.

- Calculem aquest límit $l \in \mathbb{R}$. Tenim que $x_{2n+1} = \sqrt{2-\sqrt{2-x_{2n-1}}}$. Prenent límits obtenim $l = \sqrt{2-\sqrt{2-l}}$. Llavors, $l^4 - 4l^2 + l + 2 = (l-1)(l+2)(l - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(l - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 0$.

  Ja sabem que $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ no pot ésser el límit ja que $x_n \geq 0$. A més es pot veure per inducció que $x_{2n-1} \geq 1$ per a tot n.

  Resumint, tenim que $\{x_{2n-1}\}$ és monòtona decreixent, $1 \leq x_1 = \sqrt{2} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq 2$ i $x_{2n-1} \geq 1$ per a tot n. Per tant $\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = 1$.

- Com abans es pot veure que la successió parcial dels parells $\{x_{2n}\}_{n\geq 1}$ és monòtona creixent, és a dir, $x_{2n} \leq x_{2n+2}$ per a tot n.

  Com que $\{x_{2n}\}_{n\geq 1}$ és acotada superiorment tenim que $\{x_{2n}\}$ té límit $l \in \mathbb{R}$.

  Fent el mateix que abans, obtenim que $l=1$, o $l=2$, o $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, o $l = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Es prova que $1 \geq x_{2n}$. Aix= implica que $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 1$.

- Provem ara que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

  Hem de provar que per a tot $\varepsilon > 0$, existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mid x_n - 1 \mid$ per tot $n \geq n_0$. Fixem $\varepsilon > 0$.

  Com que $\lim_{k\to\infty} x_{2k} = 1$, existeix $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_1$, llavors $\mid x_{2k} - 1 \mid < \varepsilon$.

  Com que $\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = 1$, existeix $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_2$, llavors $\mid x_{2k-1} - 1 \mid < \varepsilon$.

  Sigui $n_0 = \max\{2k_1, 2k_2 - 1\}$. Llavors si $n \geq n_0$ tenim que:

  -si n és parell, tenim que $n = 2k$ amb $k \geq k_1$.

  -si n és senar, tenim que $n = 2k-1$ amb $k \geq k_2$.

  En qualsevol cas $\mid x_n - 1 \mid < \varepsilon$.

Exercici 6
Veure que $\{x_n\}$ és monòtona creixent. $\{x_n\}$ és acotada superiorment, per exemple per $\frac{2}{8}$. El límit és $\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$.

Javier Sánchez Serdà