Àlgebra lineal
Enginyeria Química
Curs 2003/04.1er semestre.
Examen final.(13-02-2004)

I. Nombres i convergència,(1.(1 punt),2.(1 punt))

1. Donada la successió recurrent $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(log(n+1))^4} + a_n$ per $n \geq 1$, amb $a_1 = 0$. Proveu que és creixent i està acotada superiorment. Proveu que $\{a_n\}$ té límit, i expresseu aquest límit l d'alguna forma diferent al de "límit de la successió $\{a_n\}_n$ o de successions parcials d'$\{a_n\}_n$".

   Una idea de la solució. Creixent: És molt fàcil veure que és creixent. Efectivament; com $\frac{1}{(n+1)(log(n+1))^4} \geq 0$ per tot nombre natural tenim que $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(log(n+1))^4} + a_n \geq 0 + a_n \geq a_n$ i per tant obtenim que la successió és creixent.
   Acotada superiorment: Fixem-nos de la definició de la successió recurrent que $a_2 = \frac{1}{(1+1)(log(1+1))^4} + a_1 = \frac{1}{(2)(log(2))^4} + 0$, $a_3 = \frac{1}{(2+1)(log(2+1))^4} + a_2 = \frac{1}{(3)(log(3))^4} + \frac{1}{(2)(log(2))^4}$, $a_4 = \sum_{i=2}^{4} \frac{1}{(i)(log(i))^4}$ i és fàcil obtenim d'aquí que

   $$a_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{(i)(log(i))^4}$$

   per $n \geq 2$. Estudiar doncs que a_n està acotada és demostrar que la sèrie

   $$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(i)(log(i))^4}$$

   de termes tots positius és convergent('per ser de termes positius). Aquesta sèrie és convergent (està resolta en: exemple 1.2.99, apartat 7, pàgina 60, dels apunts del tema 1) usant el criteri de condensació de Cauchy (Criteri 1.2.89 dels apunts del tema 1).
   Existencia de límit i expressar-ho d'una manera diferent: Sabem que una successió de nombres reals és creixent i acotada superiorment llavors te límit, això prova la existència d'aquest límit, diem-lo l. Aquest límit s'expressa per

   $$l = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(i)(log(i))^4},$$

   es a dir com el valor d'aquesta sèrie. (Fixeu-vos que donar el valor exacte de l és extremadament difícil, però no us demana això aquest exercici).

   □

2. Calculeu els següents límits,

   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n (n!)^{\frac{n!+1}{n!}}}{(2n)! \sqrt[n]{1^{2004} + 2^{2004} + \ldots + n^{2004}}}$

   Una idea de la solució. a) Aquest límit és l'exercici 2f de la llista 4 del curs. Useu el 2on criteri de Stolz,

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!} = \lim \frac{(n+1)!}{(n+1)! - n!} = \lim \frac{n+1}{((n+1)-1)} = 1$$

b) Aquest límit és la combinació de tres límits que ja havieu vist; 1er) $c_n = \sqrt[n!]{n!} \to 1$ ja que és una successió parcial de la successió $\sqrt[n]{n}$ que té límit 1; 2on) $b_n = \sqrt[n]{1^{2004} + 2^{2004} + \ldots + n^{2004}}$ aquest límit és un cas concret per $k = 2004$ del límit II.2.ii de l'examen parcial d'aquest any que donava 1, on per calculeu useu primer el criteri de l'arrel i aquest límit per a calcular-lo useu el criteri de Stolz, per a obtenir $b_n \to 1$; 3er) la successió $a_n = \frac{n^n(n!)}{(2n)!}$ és una successió que apareix la seva inversa en l'examen de l'any passat convocatòria de febrer I.2.b,i parcial d'aquest any (exercici 2ic), per resoldre-la com $a_n \geq 0$ estudiem la convergència o no de $\sum a_n$ (convergent ens afirmarà $\lim a_n = 0$, si divergent considerem la successió $\frac{1}{a_n}$ i estudiem la serie, si surt $\sum \frac{1}{a_n}$ convergent obtenim de $a_n \geq 0$ que $\lim a_n = +\infty$). Estudiem la convergència de la sèrie $\sum \frac{n^n(n!)}{(2n)!}$, per això usem el criteri del quocient per a sèries, i tenim

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)^{n+1}((n+1)!)}{(2n+2)!}}{\frac{n^n(n!)}{(2n)!}} = \lim \frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{e}{4} < 1$$

per tant la sèrie $\sum a_n < +\infty$ i $\lim a_n = 0$.
L'exercici ens demana calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n(n!)^{\frac{n!+1}{n!}}}{(2n)! \sqrt[n]{1^{2004} + 2^{2004} + \ldots + n^{2004}}} = \lim \frac{a_n c_n}{b_n} = 0 \cdot 1/1 = 0$$

□

II. Espais vectorials.(1.(1'75 punts),2.(1'25 punts))

1. Donat el conjunt

$$E_{g(x)} = \{y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \textit{contínues} | y^{(5)} + 4y' = g(x)\}$$

que està inclòs dins el $\mathbb{R}$-espai vectorial de les funcions contínues de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ que anomenàvem $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ($g(x)$ denota una funció contínua).

i. Per a quines $g(x)$, $E_{g(x)}$ és un subespai vectorial?

Una idea de la solució. Recordeu que si $W \subset E$ és un s.e.v de l'e.v. E llavors $O_E \in W$. Anem a usar aquest fet per a veure que $E_{g(x)}$ no és s.e.v. per $g(x) \neq 0$ on 0 vol dir la funció de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ on a tot $x \in \mathbb{R}$ va al valor 0.
Observeu primer que $O_{\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R},\mathbb{R})} = 0$ on $0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tot $x \mapsto 0$.
Estudi de $E_{g(x)}$ amb $g(x) \neq 0$.
Estudiem si 0 és de $E_{g(x)}$ o no hi pertany. Sustituim a la condidició que defineix $E_{g(x)}$ (és a dir funcions $f(x)$ que satisfan $f(x)^{(5)} + 4f(x)' = g(x)$).

$$0^{(5)} + 40' = g(x)? \Leftrightarrow 0 = g(x)?$$

la resposta és no, per tant $0 \notin E_{g(x)}$, és a dir obtenim que $E_{g(x)}$ no és un s.e.v. de $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Estudi de E_0(és a dir per $g(x) = 0$):
(Ja sabem que és s.e.v perquè l'apartat iii d'aquest exercici ens ho afirma per tant provem aquí que és un s.e.v. de $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Provarem és s.e.v. per això provem

i)$y_1, y_2 \in E_0$ (és a dir sabem $y_1^{(5)} + 4y_1' = 0$ i $y_2^{(5)} + 4y_2' = 0$) hem de provar que $y_1 + y_2 \in E_0$.
Com sabem que la derivada de la suma, és suma de derivades obtenim: $(y_1+y_2)^{(5)} + 4(y_1+y_2)' = y_1^{(5)} + y_2^{(5)} + 4y_1' + 4y_2' = y_1^{(5)} + 4y_1' + y_2^{(5)} + 4y_2' = 0+0 = 0$ provant així que $y_1 + y_2 \in E_0$.
ii) Sigui $y \in E_0$ (és a dir sabem $y^{(5)} + 4y' = 0$) i $\lambda \in \mathbb{R}$, i hem de provar que $\lambda y \in E_0$. Anem a comprovar-ho:

$$(\lambda y)^{(5)} + 4(\lambda y)' = \lambda(y^{(5)} + 4y') = \lambda 0 = 0$$

i per tant $\lambda y \in E_0$.
De i)+ii) obtenim que E_0 és un s.e.v. de $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. □

ii. Calculeu les arrels λ de $z^5 + 4z$ i per cada λ anterior, calculeu $Re(e^{\lambda x})$ i $Im(e^{\lambda x})$ amb $x \in \mathbb{R}$.

Una idea de la solució. Solucionem $z^5 + 4z = 0$ tenim $z(z^4 + 4) = 0$ les arrels son: 0 i les arrels de $z^4 + 4 = 0$ que son les arrels 4-ssimes de $-4 = 4e^{\pi i}$ (apliqueu la fórmula de les arrels m-èssimes), obtenim que les arrels de $z^5 + 4z$ són:

$$0, 1+i, 1-i, -1+i, -1-i.$$

Anem a calcular les parts real e imaginaries que ens demana aquest apartat:

$$e^{0x} = e^0 = 1; \; Re(e^{0x}) = 1 \; Im(e^{0x}) = 0$$

$$e^{(1+i)x} = e^{x+ix} = e^x cos(x) + ie^x sin(x); \; Re(e^{(1+i)x}) = e^x cos(x), \; Im(e^{(1+i)x}) = e^x sin(x),$$

$$e^{(-1+i)x} = e^{-x+ix} = e^{-x} cos(x) + ie^{-x} sin(x); \; Re(e^{(-1+i)x}) = e^{-x} cos(x), \; Im(e^{(-1+i)x}) = e^{-x} sin(x),$$

$$e^{(-1-i)x} = e^{-x-ix} = e^{-x} cos(-x) + ie^{-x} sin(-x);$$

$$Re(e^{(-1-i)x}) = e^{-x} cos(-x) = e^{-x} cos(x), \; Im(e^{(-1-i)x}) = e^{-x} sin(-x) = -e^{-x} sin(x),$$

$$e^{(1-i)x} = e^{x-ix} = e^x cos(-x) + ie^x sin(-x);$$

$$Re(e^{(1-i)x}) = e^x cos(-x), \; Im(e^{(1-i)x}) = e^x sin(-x).$$

□

iii. Considerem l'espai vectorial E_0 (estem prenent $g(x) = 0$). Suposem que sabem que té dimensió 5 i que una base de E_0 és:

$$\mathcal{B} = \{1, cos(x)e^x, sin(x)e^x, cos(x)e^{-x}, sin(x)e^{-x}\}.$$

Considereu el subespai $W \subset E_0$ definit per

$$W = \{f \in E_0 | f(0) = 0 \; i \; f(\frac{\pi}{2}) = 0\}.$$

Respongueu a les següents preguntes:

A. Esciviu les coordenades del vector de E_0

$$e^x sin(x) - e^{-x} sin(x)$$

en la base $\mathcal{B}$ de E_0.

Una idea de la solució. (Observeu que els vectors de $\mathcal{B}$ son base de E_0 i per tant tot element de E_0 és c.l. d'aquests 5 vectors i aquesta c.l. són les coordenades que em demana.) Observem la igualtat

$$e^x sin(x) - e^{-x} sin(x) = 0 \cdot 1 + 0cos(x)e^x + 1sin(x)e^x + 0cos(x)e^{-x} - 1sin(x)e^{-x}$$

i per tant les coordenades són $(0, 0, 1, 0, -1)_{\mathcal{B}}$. □

B. Doneu-me quatre vectors diferents de W. Doneu uns vectors de W que generin W.

Una idea de la solució. Anem a trobar generadors de W i despres donarem 4 vectors (un pot veure a ull un vector de W i multiplicant per numeros reals obté per exemple 4 vectors diferents de W, (p.exemple la funció $e^x cos(x) - e^{-x} cos(x) \in W$,...))
En busca dels generadors de W:
un vector qualsevol $f(x)$ de E_0 és c.l. de la base,és a dir:

$$f(x) = \lambda 1 + \beta cos(x)e^x + \gamma sin(x)e^x + \delta cos(x)e^{-x} + \sigma sin(x)e^{-x}$$

si $v \in W$ ha de satisfer que $f(0) = 0$ i $f(\pi/2) = 0$ anem a impossar-ho, on obtenim

$$0 = f(0) = \lambda 1 + \beta cos(0)e^0 + \gamma sin(0)e^0 + \delta cos(0)e^{-0} + \sigma sin(0)e^{-0} = \lambda + \beta + \delta$$

$$0 = f(\pi/2) = \lambda 1 + \beta cos(\pi/2)e^{\frac{\pi}{2}} + \gamma sin(\pi/2)e^{\frac{\pi}{2}} + \delta cos(\pi/2)e^{-\frac{\pi}{2}} + \sigma sin(\pi/2)e^{-\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \lambda + \gamma e^{\pi/2} + \sigma e^{-\pi/2}$$

és a dir són els vectors $f(x)$ de E_0 on les coordenades respecte $\mathcal{B}$ satisfan aquest sistema homogeni de 5 incognites amb dues equacions!
Resolem el sistema i així trobem els generadors de W:

$$W = \{(\lambda, \beta, \gamma, \delta, \sigma)_{\mathcal{B}} | \lambda + \beta + \delta = 0, \lambda + \gamma e^{\pi/2} + \sigma e^{-\pi/2} = 0\} =$$

$$\{(\lambda, -\delta - \lambda, -\lambda e^{-\pi/2} - \sigma e^{-\pi}, \delta, \sigma)_{\mathcal{B}} | \lambda, \delta, \sigma \in \mathbb{R}\} =$$

$$< (1, -1, -e^{-\pi/2}, 0, 0)_{\mathcal{B}}, (0, -1, 0, 1, 0)_{\mathcal{B}}, (0, 0, -e^{-\pi}, 0, 1)_{\mathcal{B}} >_{\mathbb{R}} =$$

$$< 1 - cos(x)e^x - e^{-\pi/2} sin(x)e^x, -cos(x)e^x + cos(x)e^{-x}, -e^{-\pi} sin(x)e^x + sin(x)e^{-x} >_{\mathbb{R}} .$$

per tant les tres funcions anteriors generen W.
Per a donar quatre vectors diferents de W triem-ne un, p.e. $-cos(x)e^x + cos(x)e^{-x}$, un altre és $-2cos(x)e^x + 2cos(x)e^{-x}$, un tercer diferent $-3cos(x)e^x + 3cos(x)e^{-x}$ i un quart $cos(x)e^x - cos(x)e^{-x}$. □

C. Trobeu tres vectors de W que siguin linealment independents.

Una idea de la solució. Anem a provar que els tres generadors de W són $\mathbb{R}$-l.i.. La manera més fàcil és usant les coordenades, tenim que aquests tres vectors tenen coordenades en un ambient:

$$(1, -1, -e^{-\pi/2}, 0, 0)_{\mathcal{B}}, (0, -1, 0, 1, 0)_{\mathcal{B}}, (0, 0, -e^{-\pi}, 0, 1)_{\mathcal{B}}$$

i directament no hi ha c.l. entre ells (la matriu que usariem ja és esglaonada) i per tant ja estem.
Una altra manera és via definició i resoldrem el sistema:

$$\mu(1-cos(x)e^x-e^{-\pi/2}sin(x)e^x)+\psi(-cos(x)e^x+cos(x)e^{-x})+\phi(-e^{-\pi}sin(x)e^x+sin(x)e^{-x}) = 0$$

i usant que $1, cosxe^x, sinxe^x, sinxe^{-x}, cosxe^{-x}$ són l.i. podeu provar que $\mu = \psi = \phi = 0$ i per tant l.i. □

D. Doneu si es posible dues bases per a W on cap dels vectors triats siguin iguals. Calculeu $dim(W)$.

Una idea de la solució. Calculem primer $dim(W)$. Hem vist que W té tres generadors els quals són l.i., per tant aquest 3 generadors són una base de W i obtenim $dim(W) = 3$.
Una base és:

$$\{1 - cos(x)e^x - e^{-\pi/2}sin(x)e^x, -cos(x)e^x + cos(x)e^{-x}, -e^{-\pi}sin(x)e^x + sin(x)e^{-x}\}.$$

Ara volem donar una base de W on no hi hagi cap vector igual a l'anterior, fixeu-vos que si multipliquem cada vector de l'anterior base per un número diferent a 0 i a 1 obtenim també base amb el que us demana, per tant una altra base sense cap vector igual és (és clar que genera el mateix espai i són l.i.)

$$\{2-2cos(x)e^x-2e^{-\pi/2}sin(x)e^x, -2cos(x)e^x+2cos(x)e^{-x}, -2e^{-\pi}sin(x)e^x+2sin(x)e^{-x}\}.$$

□

2. Sigui $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 | x-2y+z+t = 0, t+z-3x = 0\}$ i $W =< (1, 1, 1, 4), (2i, i, i^3, 3i), (3, 2, 0, 7) >$ dos $\mathbb{C}$-subespais vectorials de $\mathbb{C}^4$. Calculeu una base i la dimensió de V, W, $V+W$ i $V \cap W$ com subespais de $\mathbb{C}^4$.

Una idea de la solució. -Base i dimensió de W:

$$W =< (1, 1, 1, 4), (2i, i, i^3, 3i), (3, 2, 0, 7) >=< (1, 1, 1, 4), i(2, 1, -1, 3), (3, 2, 0, 7) >=$$

$$< (1, 1, 1, 4), (2, 1, -1, 3), (3, 2, 0, 7) >=< (1, 1, 1, 4), (2, 1, -1, 3) >$$

(l'última igualtat prové de que la suma $(1, 1, 1, 4) + (2, 1, -1, 3) = (3, 2, 0, 7)$) i es clar que aquests dos últims vectors $\{(1, 1, 1, 4), (2, 1, -1, 3)\}$ generen W i són l.i; per tant $dim(W) = 2$ i una base de W és $\{(1, 1, 1, 4), (2, 1, -1, 3)\}$.
-Base i dimensió de V:

Cal resoldre el sistema i trobar-ne generadors, sabem un algoritme per obtenir directament la base (via esglaonant en columnes):

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^{-C_3 \to C_4} \sim^{2C_3 \to C_2} \sim^{-C_3 \to C_1} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^{C_3 \Leftrightarrow C_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^{2C_2 \to C_3} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

obtenim que $dim(V) = 2$ i una base de V és $\{(1, 2, 3, 0), (0, 0, -1, 1)\}$.
-Base i dimensió de $V + W$.
Agafem les bases de V i W les ajuntem, això ens dona un sistema de generadors de $V + W$ i escrivint en files els vectors i esglaonant en files trobarem una base de $V + W$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim^{-2F_1 \to F_2} \sim^{-F_1 \to F_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim^{F_2 \to F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

i és clar té rang 4, per tant $dim(V + W) = 4$ i una base és, per exemple, la canònica de $\mathbb{C}^4$.
-Base i dimensió de $V \cap W$.
Per la fórmula de Grassman $dim(V \cap W) = 0$ on $V \cap W = (0, 0, 0, 0)$.

□

III. Aplicacions lineals.(1. (1'25 punts), 2. (1'25 punts))

1. Sigui l'aplicació lineal, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donada per $f(x, y) = (3x + y, x + 3y, x - y)$.
   i. Doneu una matriu associada a f. Quin tamany té qualsevol matriu associada a f?

   Una idea de la solució. Fixem-nos $f(1, 0) = (3, 1, 1)$ i $f(0, 1) = (1, 3, -1)$ i obtenim que

$$M(f; can_{\mathbb{R}^2}, can_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(una matriu associada a f).
El tamany d'una matriu associada a $f : V \to W$ és de tamany

$$(dimW) \times (dimV)$$

en particular en el nostre cas 3×2 tres files i dues columnes. $\square$

ii. Donada la base $\mathcal{B}_1 = \{(1,1),(1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ i $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, calculeu la matriu de f associada a $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$, és a dir $M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$.

Una idea de la solució. Recordem la igualtat:

$$M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) = M(id;can_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}_2)M(f;can_{\mathbb{R}^2},can_{\mathbb{R}^3})M(id;\mathcal{B}_1,can_{\mathbb{R}^2})$$

Anem a calcular les tres matrius de la dreta en l'anterior igualtat. $M(f;can_{\mathbb{R}^2},can_{\mathbb{R}^3})$ la tenim de l'apartat anterior.

$$M(id;\mathcal{B}_1,can_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$M(id;can_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

i per tant obtenim que ens demana calcular:

$$M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$\square$

iii. Existeix una base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ on la $M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{C})$ és la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}?$$

Una idea de la solució. Pensem en la igualtat(si existis aquesta base s'ha de complir):

$$M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{C}) = M(id;\mathcal{B}_2,\mathcal{C})M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$$

i cal trobar si es posible una matriu invertible $M(id;\mathcal{B}_2,\mathcal{C})$ on les seves columnes seran els vectors de la base $\mathcal{B}_2$ en coordenades en $\mathcal{C}$(i $M(id;\mathcal{C},\mathcal{B}_2) = M(id;\mathcal{B}_2,\mathcal{C})^{-1}$ les seves columnes donarien la base $\mathcal{C}$ en coordenades en la base $\mathcal{B}_2$), si aquesta matriu no existeix llavors la resposta serà NO. Anem a plantejar (consisteix en resoldre sistemes lineals i impossar a més la condició de determinant no zero en les matrius solucions dels sistemes, anem a veure-ho): De la igualtat i substituint per la matriu donada en l'apartat ii tenim a resoldre;

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ t & s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}?$$

És equivalent a plantejar-se;

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & 2x-4y+6z \\ 4u & 2u-4v+6w \\ 4t & 2t-4s+6r \end{pmatrix}?$$

Resolem aquests sistemes de 9 incognites amb 6 equacions, (volem trobar una solució de manera que el determinant doni $\neq 0$ per a respondre SI a la pregunta!!!), una solució és $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{8}$, $z = 0$, $u = \frac{1}{4}$, $v = \frac{5}{8}$, $w = 0$, $t = \frac{3}{4}$, $s = 0$ i $r = \frac{5}{12}$ on la matriu per $M(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{C})$ proposada és:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{5}{12} \end{pmatrix},$$

clarament té determinant diferent de zero (comproveu-ho) i la resposta és SI.

$\square$

2. Sigui $h : V \to V$ (on V denota l'$\mathbb{R}$-espai vectorial dels polinomis de grau ≤ 1 $(dimV = 2)$) l'aplicació lineal definida per,

$$h(ax+b) = (\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b)x + (-\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b)$$

i. Doneu una matriu associada a h.

Una idea de la solució. Per això necessitem fixar una base de V, triem $\mathcal{B} := \{1, x\}$ que obviament generen V i són linealment independents. Calculem

$$h(1) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})_{\mathcal{B}}, \ h(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})_{\mathcal{B}};$$

i per tant obtenim que

$$M(h; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$\square$

ii. Calculeu una base del nucli i de la imatge de h. És exhaustiva h?, és injectiva h?

Una idea de la solució. Com $det(M(h; \mathcal{B}, \mathcal{B})) \neq 0$ tenim que és bijectiva, és a dir injectiva i exhaustiva. Per tant com és injectiva el $Ker(h) = 0$ i no parlem de base. Per ser exhaustiva $Im(h) = V$ i per tant una base de $Im(h)$ és una base de V, per exemple $\{1, x\}$. $\square$

iii. Té sentit parlar si h diagonalitza? En cas afirmatiu, i sense calcular-ne el polinomi característic: té h el valor propi zero?

Una idea de la solució. Si té sentit parlar si h diagonalitza. Recordeu que sempre ens podem preguntar això per endomorfismes i h és un endomorfisme.
Si h tingués el valor propi zero, vol dir existeix vector propi($\neq 0$) diem-lo v de VAP igual a 0,és a dir $h(v) = 0v = 0$ però això ens diria que v és del nucli de h, pero com és h injectiva no pot passar, per tant no hi ha el valor propi 0 associat a h. $\square$

iv. És el vector $x + 1$ un vector propi? En cas afirmatiu, digueu també el seu valor propi.

Una idea de la solució. Recordem que v és vector propi de h si $h(v) = kv$ amb k un numeret (el valor propi). Calculem doncs $h(x + 1)$ i tenim;

$$h(x+1) = (\frac{1}{2} - \frac{3}{2})x + (-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}) = -x - 1 = (-1)(x+1);$$

i d'aquí podem afirmar que $x + 1$ és un vector propi per h de valor propi -1. $\square$

IV. Aplicacions de diagonalització. (1. (1'25 punts), 2. (1'25 punts))

1. Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Estudiar la diagonalització de A a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$. Calculeu $A^n \in M_2(\mathbb{R})$.

Una idea de la solució. Podem pensar $A = M(f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; can, can)$ i estudiar-ho a $\mathbb{R}$ i pensar $A = M(g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2; can_{\mathbb{C}^2}, can_{\mathbb{C}^2})$ per a estudiar-ho a $\mathbb{C}$.
L'algoritme per decidir si diagonalitza a $\mathbb{R}$ o/i a $\mathbb{C}$ és el mateix, unicament que en $\mathbb{C}$ hi tenim més números.
1er pas: Càlcul del polinomi caracteristic+ VAPS
Hem de resoldre

$$det(A - \lambda Id) = det(\begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix}) = (-2-\lambda)(-3-\lambda) = 0,$$

i obtenim que els VAPS són $-2, -3$. Com tenim 2 vaps diferents i la matriu és de tamany 2×2 obtenim que diagonalitza (aquest argument tant serveix a $\mathbb{R}$ com a $\mathbb{C}$).
Anem a calcular A^n per això necessitem calcular una base formada per vectors propis.
2'-pas: Càlcul vectors propis i obtenció si es posible d'una base on diagonalitza.
-Base de veps de VAP -2:
Busquem (x, y) que satisfan

$$(A - (-2)Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

i d'aquest triem-ne una base. Resolem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que té per solució $(x, 2x)$, per tant triem com una base el vector $(1, 2)$
-Base de veps de VAP -3:
Busquem (x, y) que satisfan

$$(A - (-3)Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

i d'aquest triem-ne una base. Resolem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que té per solució $(0, y)$, per tant triem com una base el vector $(0, 1)$
Obtenim que una base on diagonalitza A formada per vectors propis és:

$$\mathcal{D} = \{(1, 2), (0, 1)\}.$$

-3'er pas: càlcul de A^n;
quan A diagonalitza obtenim que $A^n = PD^nP^{-1}$ on P és possar en ordre i en columna la base on diagonalitza, és a dir per les nostres notacions possar en columna el vectors de $\mathcal{D}$ i D és la matriu diagonal amb els VAPs en la diagonal i en l'ordre que estan associats a la tria de $\mathcal{D}$, en el nostre cas obtenim:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 2(-2)^n - 2(-3)^n & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

□

2. Una reacció elemental irreversible l'escriurem per

$$aA + bB + \ldots \rightarrow eE + fF + \ldots$$

on $a, b, ..., e, f, ...$ són els coeficients estequiomètrics i $A, B, ..., E, F, ..$ les espècies químiques. Aquest procés té una constant k anomenada cinètica de la reacció.
Considerem la reacció de dues reaccions elementals irreversibles,

$$A {\rightarrow}^{k_1} B {\rightarrow}^{k_2} C$$

on $k_1 = 2$ i $k_2 = 3$ $segons^{-1}$. Denotem per x =concentració de A en mmol/l en la reacció, y =concentració de B en mmol/l i si z=concentració de C en mmol/l en la reacció, es té pel principi de conservació de la matèria que $x + y + z$ =Constant=$\mathcal{K}$. Suposem que inicialment hi ha 4mmol/l del component A (és a dir $\mathcal{K} = 4mmol/l$) i sabem que x i y satisfan el sistema d'equacions diferencials,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

(aquests valors 2 i 3 en la matriu provenen de les constants cinètiques de la reacció que són k_1 i k_2).
En aquesta situació, calculeu quan val la concentració del producte C en aquesta reacció.

Una idea de la solució. Com sabem que $x(t), y(t)$ satisfan,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix};$$

obtenim que la solució és:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{-2t} \\ C_2 e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-2t} \\ 2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Però sabem que en iniciar la reacció sol teniem producte A i per tant $x(0) = 4$, $y(0) = 0$ i $z(0) = 0$ d'aquí podrem calcular C_1, C_2:

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-0} \\ 2C_1 e^{-0} + C_2 e^{-0} \end{pmatrix}$$

on $C_1 = 4$ i $C_2 = -8$, per tant

$$x(t) = 4e^{-2t},\ y(t) = 8e^{-2t} - 8e^{-3t}$$

i d'aquí

$$z(t) = 4 - x(t) - y(t) = 4 + 8e^{-3t} - 12e^{-2t},$$

en mmol/l. $\square$