

## Àlgebra lineal (Mètodes Matemàtics I)

Enginyeria Química

Curs 2004/05

Prova parcial.(10-11-2004)

### I. Propietats bàsiques dels nombres.

1. Quins elements  $x \in \mathbb{R}$  amb  $x \neq 3, -3$  satisfan que  $\frac{1}{|x^2-9|} \geq 1$ ?(1 punt)
2. Sigui  $z_1 = \sqrt[2004]{2004}e^{i\pi/4}$  i  $z_2 = -\sqrt{3} - i$ . Escriu  $z_2$  en forma polar i calculeu  $z_1^{-2004}z_2^{10}$  i digueu en quin quadrant es troba aquest nombre complex.(1 punt)

### II. Propietats dels nombres reals.

1. Un químic vol introduir una població de bacteris en un cultiu i sap que en les condicions que es troba el cultiu l'evolució dels bacteris és:

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{a_n^2}{2}$$

per  $n \geq 0$  on  $a_n$  és la quantitat de bacteris en el dia  $n$  un cop introduïts els bacteris. Ell/a vol introduir una quantitat inicial de bacteris  $a_0 \geq 1$  en el cultiu de manera que la població de bacteris es mantingui controlada i no creixi infinitament o s'extingeixi al llarg dels dies. Ho pot fer? En cas afirmatiu quins valors per  $a_0$  pot triar? I a quin valor tendirà  $a_n$ ? (Justifiqueu les respostes)  
(3 punts)

2. (i) Calculeu els següents límits (justificant la resposta),

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[5]{\frac{n^2 - 3n + 6}{n^2 - 2n + 1}} \right)^{\frac{-2n^2 - 7}{3n - 1}}$  (0.5 punts)

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1/n^2} e^{2/n^2} \dots e^{(n-1)/n^2} e^{n/n^2}$  (0.5 punts)

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2004 \log 1 + 2004 \log 2 + \dots + 2004 \log n}{n \log(n^{2004})}$  (0.5 punts)

d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$  (0.5 punts).

- (ii) Estudieu en funció de  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n}$ , i  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{(2n)!}}{(2n)!}$  (1 punt)

3. Estudieu la convergència per a les sèries següents, tot justificant la resposta:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\frac{18}{n}}}$     b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^2)}{n^2}$

a)=b)=(0.5 punts).

### III. Factorització de polinomis.

1. Troba les arrels a  $\mathbb{C}$  dels polinomis:  $16x^8 - 1$  i  $4x^4 - 1$ . (0.5 punts)
2. Troba les arrels a  $\mathbb{C}$  del polinomi:  $1 + \sqrt{2}x + 2x^2 + 2\sqrt{2}x^3$ .(0.5 punts)
3. Factoritza a  $\mathbb{C}[x]$  i a  $\mathbb{R}[x]$  els polinomis  $16x^8 - 1$  i  $x^4 - \frac{1}{4}$ .(1 punt)

Examen valorat sobre 11 punts

Si obteniu  $b$  punts en aquest examen

la nota que es sumarà a l'examen final serà:  $b \cdot \frac{1.5}{10}$