

Àlgebra lineal (Mètodes Matemàtics I)

Enginyeria Química

Curs 2003/04

Prova parcial.(14-11-2003)

I. Propietats bàsiques dels nombres.

1. Quins elements son $\{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } \frac{1}{|(x-2)|(x+2)} \leq 3\}$?(1 punt)
2. Sigui $z_1 = \sqrt[2003]{2003}e^{i\pi/4}$ i $z_2 = -\sqrt{3} + i$. Escriu z_2 en forma polar i calculeu $z_1^{-2003}z_2^{10}$ explicitant en quin quadrant es troba aquest nombre complex.(1 punt)

II. Propietats dels nombres reals.

1. Un químic vol introduir una població de bacteris en un cultiu i sap que en les condicions que es troba el cultiu l'evolució dels bacteris és: $a_{n+1} = 2 + \sqrt{\frac{7}{4} + a_n}$ on a_n és la quantitat de bacteris en el dia n un cop introduïts els bacteris. Ell/a vol introduir una quantitat inicial de bacteris $a_0 > 0$ en el cultiu de manera que la població de bacteris es mantingui controlada i no creixi infinitament o s'extingueixi al llarg dels dies. Ho pot fer? En cas afirmatiu quins valors per a_0 pot triar? I a quin valor tendirà a_n ? (Justifiqueu les respostes) (2 punts)
2. (i) Calculeu els següents límits (justificant la resposta),

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{n^2 + 3n + 6}{n^2 - 4n + 1}} \right)^{\frac{2n^2 + 5}{n+1}}$ (1 punt)

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n}$ amb $a > 1$ (0.5 punts)

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{n^n(n!)}$ (0.5 punts)

- (ii) Calculeu per a cada $k \in \mathbb{N}$ el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^k + 2^k + \dots + n^k}. \text{ (1 punt)}$$

3. Estudieu la convergència per a les sèries següents, tot justificant la resposta:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{2003} - 1)$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^{2003} + n)}{n^2}$
a)=b)=c)=(0.5 punts).

III. Factorització de polinomis.

1. Troba les arrels a \mathbb{C} del polinomi: $32x^5 - 1$. (0.5 punts)
2. Troba les arrels a \mathbb{C} del polinomi: $2^4x^4 + 2^3x^3 + 2^2x^2 + 2x + 1$.(0.5 punts)
3. Factoritza a $\mathbb{C}[z]$ i a $\mathbb{R}[z]$ el polinomi $x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}$.(0.5 punts)