ÀLGEBRA LINEAL

Enginyeria Química

Aplicacions Lineals i diagonalització

1. Quina de les següents aplicacions entre $\mathbb{R}$-espais vectorials són lineals? Per les que ho siguin doneu la matriu associada en la base canònica.

   (a) De $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ l'aplicació $f(x) = x^2$

   (b) De $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$ les aplicacions $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $h(x, y, z) = x + 1 - y$

   (c) De $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^4$ l'aplicació $f(x, y) = (x - y, 2x + 1, y - 3, 1)$

2. Es pot trobar una aplicació lineal F de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $F(1, -1, 1) = (1, 0)$ i $F(1, 1, 1) = (0, 1)$? I una de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $F(1, -1) = (1, 0)$, $F(2, -1) = (0, 1)$ i $F(-3, 2) = (1, 1)$?

3. Dieu si són injectives, exhaustives o bijectives les següents aplicacions:

   (a) $f(x, y, z) = (-x + y, y + z, 2x + y + z, x + y, 3x + y + z)$

   (b) $f(x, y, z) = (x + y, y + z, z)$

4. Trobeu una base del nucli i una de la imatge de les aplicacions lineals entre espais $\mathbb{R}^n$,

   (a) Associada a la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ en les bases canòniques.

   (b) Associada a la matriu $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ en les bases canòniques.

   (c) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longrightarrow & (x - 2y, 3x + y, 4y) \end{array}$

   (d) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (x, x - z, 4z, 0) \end{array}$

5. Siguin $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ les aplicacions lineals definides per:

$$f(x, y) = (2x - y, x + y, 3x) \qquad g(x, y) = (x + y + z, 3x - y + 2z),$$

   (a) Doneu les matrius de f, g, $f \circ g$, $g \circ f$, en les bases canòniques.

   (b) Siguin $e_1 = (2, 1)$, $e_2 = (1, 0)$, $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, -1, 0)$, $v_1 = (1, -1, 1)$. Vegeu que $B_1 = \{e_1, e_2\}$ i $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ són una base de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, respectivament. Calculeu $\mathrm{MAT}(f, B_1, B_2)$, $\mathrm{MAT}(g, B_2, B_1)$, $\mathrm{MAT}(g \circ f, B_1)$, $\mathrm{MAT}(f \circ g, B_2)$.

6. Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ definit per la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 2 & 1 & -1/2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Vegeu si f és isomorfisme.
   (b) Calculeu la matriu associada a f^{-1}.
   (c) Calculeu la antiimatge per f del vector $(1, 2, -1, 0)$.

7. Sigui $E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid c = a + b \right\}$. Considereu l'endomorfisme de E donat per:

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 3c + 3a \\ -2a - b & a - b + 3c \end{pmatrix}.$$

   (a) Trobeu una base de E i la matriu de f respecte a aquesta base.
   (b) Trobeu bases del nucli i de la imatge de f.

8. Calculeu els valors propis i els corresponents vectors propis de les següents matrius:

$$\textit{(a)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \textit{(b)} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

9. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

   calculeu A^{1000}.

10. Estudieu la diagonalització els endomorfismes representats per les següents matrius, referides a la base canònica si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $\mathbb{R}$-espais vectorials i també $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ com $\mathbb{C}$-espais vectorials:

$$\textit{a)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{b)} \begin{pmatrix} 3 & 17 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\textit{c)} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \textit{d)} \begin{pmatrix} 6 & -7 & -20 \\ 0 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textit{e)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textit{f)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Estudieu si diagonalitza $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, definit per

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}.$$

Si diagonalitza, trobeu una base que fa que la matriu associada a F en aquesta base sigui diagonal.

12. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal de matriu associada $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ per a certa base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.

    (a) Trobeu una base de $\mathbb{R}^2$ en la que la matriu associada a f per aquesta base sigui diagonal.

    (b) Trobeu A^{1001}.

13. Considereu l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que ve donat per:

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y - z - t, x - y + z - t, x - y - z + t)$$

Calculeu $f^n(1, 0, -1, -1)$.

14. Sigui E un espai vectorial i $f : E \longrightarrow E$ una aplicació lineal. Si v és un vector propi de valor propi 1, calculeu $f^2(v) - 3f(v) + 2v$.

15. Busqueu els valors propis de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculeu els vectors propis de A i estudieu si la matriu diagonalitza.

16. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

    (a) Calculeu els seus valors propis i els seus vectors propis.

    (b) Decidiu si A és diagonalitzable.

    (c) Calculeu la matriu A^{100}.

17. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

    (a) Calculeu el polinomi característic i els valors propis.

(b) Calculeu els vectors propis i decidiu si diagonalitza.

(c) Calculeu la matriu $(A+2I)^n$ per a tot $n \geq 1$.

18. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal i

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

la seva matriu associada en la base canònica:

(a) Trobeu els valors propis de la matriu A

(b) Trobeu una base en que la matriu A diagonalitzi.

(c) Sigui $v = (4, 4, -7)$ (en la base canònica). Calculeu $f^{20}(v)$ i $f^{31}(v)$.

19. Siguin E un $\mathbb{R}$-espai vectorial i $f : E \to E$ un endomorfisme. Proveu que:

(a) $\dim(E)$ senar $\Rightarrow f$ té almenys un valor propi.

(b) $\dim(E)$ parell i $\det(f) < 0 \Rightarrow f$ té almenys dos valors propis diferents.

(c) Hi ha exemples en què $\dim(E)$ sigui parell i f no tingui valors propis?

20. Considerem l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ donat per: $f(x, y, z) = (x-y+4z, 2y, 2z)$. Proveu que només una de les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -8 & 10 & -4 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

és la matriu de f en alguna base e_1, e_2, e_3 de $\mathbb{R}^3$. Quina? Trobeu explícitament una base de $\mathbb{R}^3$ tal, que la matriu de f en aquesta base sigui aquesta matriu.

21. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$. Resoleu l'equació diferencial $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Indicació: expressem $A = PDP^{-1}$, amb D diagonal i P invertible. Fent el canvi lineal de variables, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la nostra equació diferencial es converteix en: $D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$. Aquesta equació és molt fàcil de resoldre i a partir de les seves solucions recuperem les solucions de l'equació original via: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

22. Intenteu fer l'anterior exercici per a $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ i per a $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.