ÀLGEBRA LINEAL

Enginyeria Química

Espais vectorials

1. Sigui $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R}), S = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b\}$. Quan és S un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$?

2. Dieu quins dels següents subconjunts de $\mathbb{R}^3$ són subespais vectorials.

   (a) $\{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{Z}\}$
   (b) $\{(x, y, z)|xy = 0\}$
   (c) $\{(x, y, z)|2x + 4y - 3z = 2\}$
   (d) $\{(x, y, z)|x \geq 0\}$

3. Sigui X un conjunt no buit. Considerem $E := \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$, el conjunt de les aplicacions de X en $\mathbb{R}$, amb l'estructura de $\mathbb{R}$-espai vectorial que li donen les operacions:

   $$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in X, \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),\ \forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Decidiu si els subconjunts següents de E són subespais vectorials:

   - $\{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f(x) \neq 1, \forall x \in X\}$
   - $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f$ contínua$\}$, on ara $X = \mathbb{R}$.
   - $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f$ dues vegades derivable i $f''(-5) = 0\}$.

4. $\mathbb{C}$ pot ser considerat $\mathbb{R}$-e.v. o com a $\mathbb{C}$-e.v.

   - Proveu que $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\}$ no és $\mathbb{R}$-s.e.v. de $\mathbb{C}$ i tampoc és $\mathbb{C}$-s.e.v. de $\mathbb{C}$
   - Proveu que $\{z \in \mathbb{C} \,|\, (z + \bar{z})/2 = 0\}$ no és $\mathbb{C}$-s.e.v. de $\mathbb{C}$, però SI és $\mathbb{R}$-s.e.v. de $\mathbb{C}$.
   - Veieu que $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \,|\, z + 3iw = 0\}$ és $\mathbb{C}$-s.e.v de $\mathbb{C}^2$ i és $\mathbb{R}$-s.e.v. de $\mathbb{C}^2$.

5. Determineu quins dels següents subconjunts de matrius són subespais vectorials:

   (a) $\{A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \,|\,$ la suma dels elements de la 2a fila és $1\}$
   (b) $\{A \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, \det(A) = 0\}$

6. Siguin u, v, w tres vectors linealment independents d'un espai vectorial E. Demostreu que $u+v, u+w, v+w$ són linealment independents.

7. Per a quins valors de λ el vector b és combinació lineal dels a_i?

   (a) $a_1 = (2,3,5)$, $a_2 = (3,7,8)$, $a_3 = (1,-6,1)$; $b = (7,-2,\lambda)$.

   (b) $a_1 = (4,4,3)$, $a_2 = (7,2,1)$, $a_3 = (4,1,6)$; $b = (5,9,\lambda)$.

8. Quines de les següents famílies de vectors són linealment independents?

   - $(1,0), (1,2), (-\frac{1}{2}, 1)$ a $\mathbb{R}^2$.
   - $(1,0,i,0), (1,1+i,2,0), (i,0,-2,i+\frac{1}{2}), (1-i,1,0,0)$ a $\mathbb{C}^4$.
   - $(1,1,\sqrt{2}), (0,\sqrt{2},1), (\sqrt{2},0,1)$ a $\mathbb{R}^3$.
   - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $M_{2,3}(\mathbb{R})$.
   - $x^2-1,\ 1+x-x^3,\ (x+1)^2,\ x^3$ a $\mathbb{R}[x]$.
   - $1,\ \sin x,\ \cos x$ a $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   - e^x, e^{x+2} a $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   Per a les famílies que són linealment dependents, expresseu un vector com a combinació lineal dels altres. Trobeu una base del subespai que genera cada família.

9. Completeu els següents conjunts per a obtenir bases de $\mathbb{R}^4$.

   (a) $(2,1,4,3), (2,1,2,0)$.

   (b) $(0,1,2,3), (1,2,3,4), (0,0,0,1)$.

   (c) $(0,2,1,0), (0,1,2,0)$.

10. Trobeu la dimensió i una base de cadascun dels següents subespais vectorials sobre $\mathbb{R}$:

    (a) $E_1 =< (1,0,-1),\ (-2,0,3),\ (3,1,0),\ (0,0,1) >$

    (b) $E_2 =< (1,0,2,3),\ (2,0,4,1),\ (1,-1,0,0) >$

    (c) $E_3 = \{(x,y,z,t) \,|\, x = y-3z,\ \ z = t\}$

    (d) $E_4 = \{(x,y,z) \,|\, x = y = z\}$

11. Trobeu la dimensió i una base de cadascun dels subespais vectorials següents:

    - $\{p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grau ≤ 3 i satisfent $p(2) = 0)\}$

- $\{A = a_{ij} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid a_{11} = 0$ i la 2a i 3a columna coincideixen$\}$
- $\langle 1, \sin x, \cos x \rangle_{\mathbb{R}}$, com a subespai de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- $\{f(x) \in \langle 1, \sin x, \cos x \rangle_{\mathbb{R}} \mid f(0) = 0\}$

12. Coordenades.

    (a) Escriu el vector $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ en coordenades en la base $\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1))\}$.

    (b) Escriu el vector $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ en coordenades en la base de $M_2(\mathbb{R})$ donada per $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$.

    (c) Escriu el vector $1+sin(x)-\pi cos(x)$ del espai vectorial $E =< 1, sinx, cosx >$ en coordenades en base de E donada per $\{1, sin(x), cos(x)\}$.

13. Considerem el $\mathbb{C}$-espai vectorial E dels polinomis de grau ≤ 2 a coeficients en $\mathbb{C}$ de dimensió 3. Triem una base de E, $\mathcal{B} = \{2 + x + x^2, 2x + x^2, 2 + 2x\}$. Digueu quin polinomi correspon el vector de E designat per $(\pi, i, e)_{\mathcal{B}}$.

14. Doneu la dimensió i una base de E, F, $E + F$ i $E \cap F$ pels casos:

    (a) Els subespais de $\mathbb{R}^3$

    $$E =< (1,1,-1),(2,0,-1),(0,2,-1) >, \ F =< (1,0,-1),(2,3,0),(4,3,-2) >$$

    (b) Els subespais de $\mathbb{R}^4$

    $$E = \{(x,y,z,t) \mid x + y + 2z = 0, 3y + 3z + t = 0, 2x - y - t = 0\},$$
    $$F = \{(0,y,z,t) \mid y + z + t = 0\}$$

    (c) Els subespais de $\mathbb{R}^4$

    $$E =< (0,0,0,1),\ (1,-1,0,1),\ (-1,1,0,3),\ (0,0,1,7) >,$$
    $$F =< (1,0,-1,1),\ (1,1,0,9),\ (2,1,-1,10) >$$

    (d) $F = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0, a_{12} = 0\}$,
    $E = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t, a_{21} = 0$, subespais de $M_2(\mathbb{R})\}$.
    (On $Tr(A)$ vol dir la suma dels elements de la diagonal, s'anomena traça).

    Discutiu, en cada cas, si E i F estan en suma directa.

15. Siguin E_1, E_2 i E_3 tres subespais vectorials de $\mathbb{R}^5$, tots tres de dimensió 2. Suposem que $E_1 \cap (E_2 + E_3) = \{0\}$ i que E_2 i E_3 no són iguals. Calculeu la dimensió de $E_2 \cap E_3$.