

ÀLGEBRA LINEAL

Enginyeria Química

Càlcul Matricial

1. Considerem les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculeu la segona fila de la matriu producte AB de dues maneres diferents: com un producte de matrius CB (per a una matriu adequada C) i com una combinació lineal de les files de B .

Calculeu la tercera columna de la matriu producte AB de dues maneres diferents: com un producte de matrius AC (per a una matriu adequada C) i com una combinació lineal de les columnes de A .

2. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, determineu a, b números reals que compleixin la relació $A^2 + aA + bI = 0$, on I és la matriu identitat i 0 és la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Mostreu amb exemples que a $M_2(K)$ les següents identitats són falses:

$$(AB)^2 = A^2B^2, \quad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \quad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$

Proveu, en canvi, que si A i B commuten les identitats són correctes.

4. Esclaoneu per files les següents matrius, calculant la matriu P que us permet obtenir la matriu esglaonada multiplicant la matriu original per l'esquerra.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5/2 & -5/2 & -3 & 2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -9 & -6 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -6 & -4 & 7 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 2 & 4 & -5 \\ -6 & 4 & -8 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & -8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Apliqueu la tècnica de les transformacions elementals per files per mirar si aquestes matrius quadrades són invertibles i, en cas afirmatiu, calcular la seva inversa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 0 & 2 \\ 3 & 2 & i & -1 \\ 0 & i & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} i & i & -i \\ 1+i & 1-i & 2i \\ 1 & 0 & 3i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Calculeu el rang en funció de a per a les següents matrius (primer a coeficients $K = \mathbb{R}$, i després a coeficients $K = \mathbb{C}$):

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

7. Esclaoneu per columnes les matrius de l'Exercici 4. Repetiu l'Exercici 5, però ara esclaonant només per columnes.

8. Calculeu els següents determinants:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & a \\ c & c & b & a \\ d & c & b & a \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix}$$

9. Calculeu la inversa per les que es pugui, de les matrius:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

amb $a_1, a_2, a_3, a_4, a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

10. Resoleu les següents equacions matricials,

$$1. X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$