ÀLGEBRA LINEAL

Enginyeria Química

Factorització polinomis

1. Proveu que si z_0 és una arrel del polinomi $P(z)$ amb coeficients reals, aleshores $\overline{z_0}$ també és una arrel de $P(z)$.

2. Calculeu totes les solucions de les següents equacions:

a) $z^2 = i$	*b)* $z^4 = i$	*c)* $z^5 = 1 + i\sqrt{3}$
d) $z^2 + z = -1$	*e)* $z^6 = -1 + i$	*f)* $z^4 + z^2 + 1 = 0$
g) $e^z = 1$	*h)* $e^{2z} = 4$	*i)* $e^{3z-1} = i$

3. Si $1, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n-1}$ són les arrels n-éssimes de la unitat, proveu que

$$(z - \omega_1)(z - \omega_2)\cdots(z - \omega_{n-1}) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$$

4. Trobeu les solucions de

   (a) $z^3 = 1 + \sqrt{3} + i$

   (b) $z^4 = i$

   (c) $z^3 + (i - 1)z^2 + (1 - i)z - 1 = 0.$

   Indicació: En el tercer apartat, una de les arrels és natural.

5. Factoritzeu a $\mathbb{C}[z]$ els següents polinomis:

   (a) $z^4 + 16$

   (b) $z^3 + 27$

   (c) $z^4 - 1$

   (d) $z^6 + z^3 + 4$

   (e) $z^3 + (i - 1)z^2 + (1 - i)z - 1$

   i descomponeu en producte de polinomis irreductibles a coeficients reals en els casos que sigui possible.

ÀLGEBRA LINEAL

Enginyeria Química

Tema 2: sistemes d'equacions lineals

6. Resoleu els següents sistemes d'equacions:

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl} x-3y+2z &=& 6\\ 2x+y-5z &=& -4\\ 2x-13y+13z &=& 28 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y-2z+t+3u &=& 1\\ 2x-y+2z+2t+6u &=& 2\\ 3x+2y-4z+3t-9u &=& 3 \end{array}\right.$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1\\ 2x-2y-z &=& 0\\ x+3y+5z &=& 2\\ 5x+3y+6z &=& 4 \end{array}\right. \qquad d)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y+az &=& 1\\ x-y+z &=& 0\\ x+3y+z &=& b \end{array}\right.$$

$$e)\ \left\{\begin{array}{rcl} ax+y &=& 2\\ x+y &=& 2a\\ x+y &=& 4 \end{array}\right. \qquad f)\ \left\{\begin{array}{rcl} ay-1+x &=& -z\\ (a-1)z+y-m &=& -mz\\ m+1 &=& x+y+z \end{array}\right.$$

7. Comproveu que el sistema següent és compatible indeterminat i té grau de llibertat 2,

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x-y+z+2t+2u &=& 1\\ y+z-2u &=& 1\\ 2x+z+t &=& 1\\ x-y+t+2u &=& 0\\ 5x+y+3z+2t-2u &=& 3 \end{array}\right.$$

Sense calcular les solucions explícitament contesteu les següents preguntes:

   (a) Quin és el número màxim d'equacions independents?
   (b) És la segona equació combinació de les altres? i la quarta?
   (c) Hi ha alguna solució amb $x = \frac{2\pi}{\sqrt{11}}$? i amb $y = \frac{2\pi}{\sqrt{11}}$?

8. Trobeu les condicions que han de complir a, b i c per que sigui compatible el sistema

$$\begin{array}{cccc} x & +y & +2z & = a\\ x & & +z & = b\\ 2x & +y & +3z & = c. \end{array}$$

9. Discutiu i resoleu el següent sistema, en funció del valor dels paràmetres que hi intervenen:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+ay+z &=& 0\\ 2x-2y+z &=& 0\\ bx+2y-4z &=& 0\\ 4x+2y+7z &=& 0 \end{array}\right.$$

10. Estudieu la compatibilitat i solucioneu (si es pot) els sistemes:

a) $\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +2y & +3z & +t & = 3 \\ x & +4y & +5z & +2t & = 2 \\ 2x & +9y & +8z & +3t & = 12 \\ 3x & +7y & +7z & +2t & = 20 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rrrrrl} 12x & +14y & -15z & +23t & +27u & = 5 \\ 16x & +18y & -22z & +29t & +37u & = 8 \\ 18x & +20y & -21z & +32t & +41u & = 9 \\ 10x & +12y & -16z & +20t & +23u & = 4 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rrrrl} 10x & +23y & +17z & +44t & = 25 \\ 15x & +25y & +26z & +69t & = 40 \\ 25x & +57y & +42z & +108t & = 65 \\ 30x & +69y & +51z & +133t & = 95 \end{array}\right.$

11. Digueu per a quins valors de λ el següent sistema té solucions no trivials.

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\lambda-3)x+y & = & 0 \\ x+(\lambda-3)y & = & 0 \end{array}\right.$$

12. Estudieu la compatibilitat segons el valor de λ i solucioneu (si es pot) els sistemes:

a) $\left\{\begin{array}{rrrrl} 5x & -3y & +2z & +4t & = 3 \\ 4x & -2y & +3z & +7t & = 1 \\ 8x & -6y & -z & -5t & = 9 \\ 7x & -3y & +7z & +17t & = \lambda \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rrrrrl} 3x & +2y & +5z & +3t & +27u & = 3 \\ 2x & +3y & +6z & +8t & +37u & = 5 \\ x & -6y & -9z & -20t & +41u & = -11 \\ 4x & +y & +4z & +\lambda t & +23u & = 2 \end{array}\right.$