ÀLGEBRA LINEAL

Enginyeria Química

Sucesiones, series y convergencia

1. Calcula los siguientes límites

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{n+5}\right)^{\frac{n}{n^2+3}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n}\right)^{n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}\right)^{n}$

2. Calcular los siguientes límites

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^{1/2}+3^{1/3}+\cdots+n^{1/n}}{n}$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log(2)+\frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{3}\log(1+\frac{1}{3})+\cdots+\frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 2+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$

   (g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log 1+\log 2+\cdots+\log n}{n\log n}$

   (h) $\lim\limits_{n\to\infty}P(n)^{\frac{1}{n}}$ con P un polinomio

   (i) $\lim\limits_{n\to\infty}na^{-n}$ con $a>1$

   (j) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^{1/2}+3^{1/3}+\cdots+n^{1/n}}{n}$.

   (k) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

   (l) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n}{3n^2+\log n}$

   (m) $\lim\limits_{n\to\infty}\{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)\}^{1/n}$

(n) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{2}{n}} + \cdots + a^{\frac{n}{n}}}{n}$ con $a > 0$,

(o) $\lim_{n\to\infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$ con $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \neq b$

3. Con $a > 0$, se define por recurrencia la sucesión $a_1 = \sqrt{a}$ y $a_n = \sqrt{a \cdot a_{n-1}}$. Calcular el límite.

4. Probar que la sucesión
$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$
es monótona creciente y acotada, y por tanto convergente.

5. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales no nulos. Probar que
$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1,$$
implica que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

6. Estudia la convergencia de las siguientes series

a) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+3)}$ b) $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{\log n}$ c) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n}{4^n}$ d) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n (n^{1/n} - 1)$

e) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^{\varepsilon}}$ con $\varepsilon > 0$ f) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{\log(n^2+n+3)}$ g) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{\log(n^2+n+3)}$

h) $\sum_{n\geq 1} n^3 e^{-n}$ i) $\sum_{n\geq 1} (\log n)^p$ con relación a p j) $\sum_{n\geq 1} \left(\dfrac{1}{\log(\log n)}\right)^{\log(\log n)}$

k) $\sum_{n\geq 2} n^p \left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ l) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$

m) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\log n}{n^k}$ con relación a k n) $\sum_{n\geq 3} \dfrac{(-1)^n}{n(\log n)^{\alpha}}$ con $\alpha > 0$

o) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ p) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{\alpha}} \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ $\alpha > 0$ q) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n 2^n}{n!}$

r) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^n}{n! 3^n}$ s) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{q^n - p^n}$ con $0 < p < q$ t) $\sum_{n\geq 1} \left(\dfrac{1}{2^n} + i\dfrac{1}{3^n}\right)$