

ÀLGEBRA LINEAL

Enginyeria Química

Sucesiones

1. Demuestra los siguientes límites

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{10^n} = 1$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + q^2 + \dots + q^n) = \frac{1}{1-q}, \quad 0 < |q| < 1$

2. Determina si las siguientes sucesiones tienen límite. En caso de que así sea, calcúlalo.

(a) $\{2^{(-1)^n}\}$

Resp: No tiene.

(b) $\{(-1)^n n\}$

Resp: No tiene.

(c) $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$

Resp: 0.

(d) $\left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\}$

Resp: 1.

(e) $\left\{ \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n} \right\}$

Resp: 0.

(f) $\left\{ n \sin(\frac{n\pi}{2}) \right\}$

Resp: No tiene.

(g) $\left\{ \frac{2^n - 1}{2^n} \right\}$

Resp: 1.

$$(h) \left\{ \frac{4n^2 + 1}{3n^2 + 1} \right\}$$

$$\text{Resp: } \frac{4}{3}.$$

$$(i) \left\{ \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} \right\}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ fija.}$$

$$\text{Resp: } 1.$$

$$(j) \left\{ \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} \right\}$$

$$\text{Resp: } 0.$$

$$(k) \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n} \right\}$$

3. Definimos por recurrencia la sucesión,

$$x_1 = 4, x_{n+1} = \frac{4(x_n - 1)}{x_n}, (n \geq 1).$$

Probar que está acotada inferiormente por 2 y es decreciente. Encontrar su límite.

4. Sea $x_1 = 1/2$. Definimos por recurrencia la sucesión,

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25}.$$

Probar que es monótona, y para todo n tenemos $1/5 < x_n < 4/5$. Demostrar que tiene límite y calcular el límite.

5. Consideremos la sucesión definida por recurrencia,

$$x_1 = \sqrt{2}, x_n = \sqrt{2 - x_{n-1}}, (n > 1).$$

Probar que x_n converge y calcular su límite.

6. Sea la sucesión $x_1 = 1/8$ i $x_n = 1/8 + x_{n-1}^2$ si $n \geq 2$. Probar que la sucesión converge y calcular su límite.