

ÀLGEBRA LINEAL

Enginyeria Química

Nombres reals, propietats i nombres complexos

1. Dibuixeu les següents conjunts de nombres

(a) $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \text{ i } n \geq 1 \right\}$

(b) $B = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ i } n \geq 1 \right\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, x^2 < 2\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, x^2 < 2\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + 3x + 2 \leq 0\}$

2. Expliciteu els nombres reals que compleixen cadascuna de les desigualtats següents

(a) $|x - 2| < 3$

(b) $|6 - 1/x| < 1$

(c) $\frac{x - 1}{x + 1} > 0$

(d) $|x^2 - 3| \leq 1$

(e) $x^2 < |1 - x| + 1$

3. Expressar aquests nombres en forma polar:

$$3 + 4i, \quad 2 - i, \quad 3 + i, \quad -2 - 3i.$$

4. Siguin $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 - 3i$, $z_3 = \frac{1}{2} + i$, $z_4 = -5i$.

Calculeu:

a) $z_1 \cdot z_2 - z_3 \cdot z_4$ b) $|\bar{z}_1 - \bar{z}_2|$

c) $\frac{z_2}{z_4 - \bar{z}_3}$ d) $(z_1 - z_3)^2 \cdot \bar{z}_1$.

5. a) Calculeu $(1 + i)^{29}$, $(-1 + i)^{17}$, $(-\sqrt{3} + i)^{13}$.

b) Expressen en la forma $x + iy$, on x i y són reals

$$(2 + 2i)^{12}, \quad (-1 - i)^{36}, \quad (-\sqrt{3} + i)^{13}, \quad i^{2002}.$$

6. Dibuixeu les següents regions del pla complex:

(a) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 3| < 2\}$

(b) $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$

(c) $\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1| \leq |z|\}$

(d) $\Omega_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \operatorname{Re} z + 2\}$

7. Expressen els següents nombres complexos en la forma $a + bi$:

$$e^{i\pi}, e^{-1+i\pi/4}, e^{e^{5+i\pi/2}}, e^{\cos(2)}, e^{\cos(2)i}.$$